

Aula 1 - Linearidade, Superposição e Relações V/A

Sumário

- Dicas úteis;
- Leis e métodos mais importantes;
- Técnicas de simplificação de circuitos;
- Teoria de sistemas lineares;
- Teorema da superposição;
- Teoria e fontes de erro.

Dicas Úteis

As dicas apresentadas a seguir, são úteis para o estudante conseguir um bom aproveitamento na disciplina de Análise de Circuitos II:

- * Organizar o trabalho, documentando cada passo da solução.
- * Sempre simplificar passo-a-passo o circuito em questão, quando possível, antes de resolvê-lo.
- * Escrever textos explicativos, gráficos com valores e unidades, equações e esquemas ilustrativos.
- * Analisar e comparar os resultados teóricos e práticos.
- * Resolver o maior número de exercícios.
- * Resolver provas de semestres anteriores.
- * Estudar todo conteúdo, tirar dúvidas e não desistir.

Leis e Métodos Importantes

- Lei de Ohm ¹: define a relação entre a corrente e a tensão em um resistor.

A Fig. 1 exhibe o símbolo do resistor.

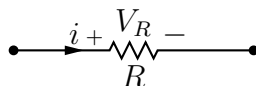


Figura 1: Tensão e corrente sobre um resistor.

A relação entre tensão e corrente em um resistor é dada por:

$$V_R = R i. \quad (1)$$

Usando a Fig. 1, pode-se escrever ainda a equação da potência:

$$P_R = V_R i = i^2 R = (V_R)^2 / R. \quad (2)$$

¹George Simon **Ohm**, (1827) físico/matemático alemão que a formulou pela primeira vez no início do século XIX.

- Leis de Kirchhoff ²: leis para as correntes (1) e tensões (2) em um circuito.

1. Lei dos nós ou correntes: a soma algébrica de todas as correntes em qualquer nó de um circuito é sempre nula (sinal + \Leftrightarrow corrente saindo, sinal - \Leftrightarrow corrente entrando). Esta lei é baseada no princípio da conservação de carga. A Fig. 2 exhibe as correntes em um nó, por exemplo.

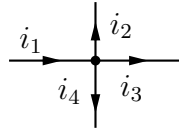


Figura 2: Correntes em um nó.

A soma algébrica das correntes neste nó é vista a seguir:

$$\sum_{n=1}^N i_n = 0 \Rightarrow -i_1 + i_2 + i_3 + i_4 = 0. \quad (3)$$

2. Lei das tensões: a soma algébrica das tensões em qualquer malha (percurso fechado) de um circuito é sempre nula. Esta lei de Kirchhoff é baseada no princípio da conservação da energia. A Fig. 3 exhibe as tensões em uma malha com três resistores e uma fonte, como exemplo.

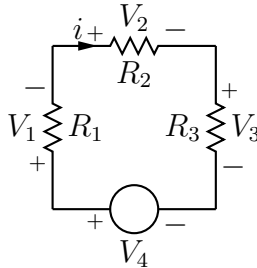


Figura 3: Tensões em uma malha.

A soma algébrica das tensões nessa malha é a seguinte:

$$\sum_{n=1}^N V_n = 0 \Rightarrow V_1 + V_2 + V_3 - V_4 = 0, \quad (4)$$

onde: N é o número de elementos ou componentes do circuito.

- Métodos das Tensões de Nó e Correntes de Malha: aplica-se as leis de Kirchhoff para correntes e tensões em todos os nós ou malhas, em um circuito com mais de uma malha, monta-se um sistema de equações e resolve-se esse sistema.

Simplificação de Circuitos

As técnicas de simplificação de circuitos são úteis para diminuir a complexidade do circuito, reduzindo o número de incógnitas e de equações finais a serem calculadas. Assim, deve-se utilizar as seguintes técnicas de simplificação na solução de circuitos, sempre que possível.

As figuras vistas a seguir, são um esboço destas técnicas para obter-se circuitos equivalentes envolvendo resistores e fontes de tensão ou corrente conectadas em série ou paralelo.

Os circuitos equivalentes são formados por somente uma única fonte de tensão ou corrente. A prova dessas técnicas envolve a prova de que os circuitos equivalentes possuem as mesmas características que as configurações originais.

²Gustav **Kirchhoff**, o primeiro a formulá-las, em um artigo publicado em 1848.

São oito as técnicas de simplificação de circuitos apresentadas a seguir: (1) fontes de tensão em paralelo, (2) fontes de corrente em série, (3) fontes de tensão em série, (4) fontes de corrente em paralelo, (5) fontes de corrente e tensão em paralelo, (6) fonte de corrente e resistor em paralelo, (7) explosão de fontes de tensão e (8) explosão de fontes de corrente.

1. A Fig. 4 exibe a técnica de simplificação de fontes de tensão em paralelo.

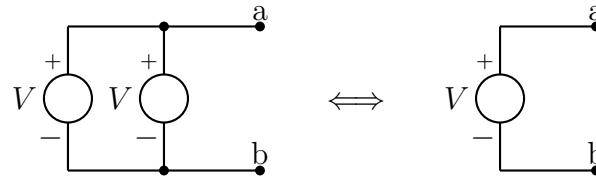


Figura 4: Fontes de tensão em paralelo

2. A Fig. 5 exibe a técnica de simplificação de fontes de corrente em série.

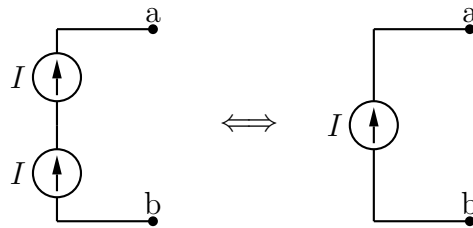


Figura 5: Fontes de corrente em série.

3. A técnica de simplificação de fontes de tensão em série é vista na Fig. 6.

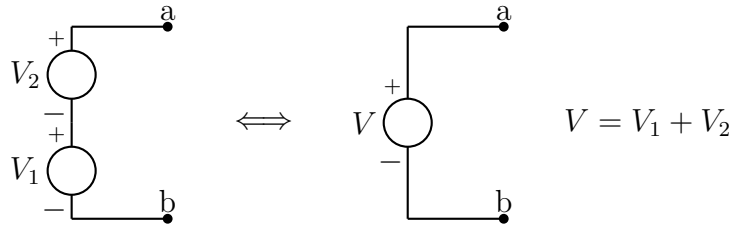


Figura 6: Fontes de tensão em série.

4. Fontes de corrente em paralelo, conforme a Fig. 7.

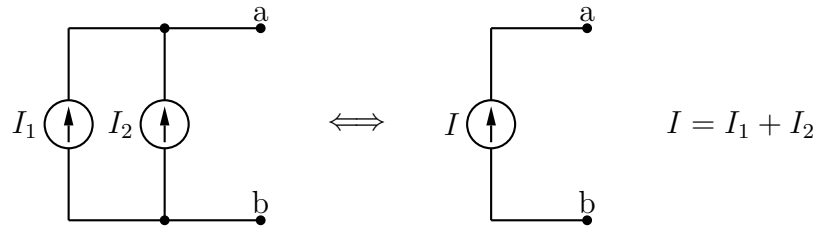


Figura 7: Fontes de corrente em paralelo.

5. Fontes de corrente e tensão em paralelo, Fig. 8.

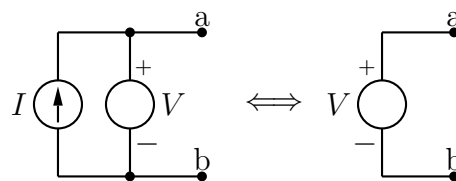


Figura 8: Fontes de corrente e tensão em paralelo.

6. A Fig. 9 exibe a técnica de simplificação de fonte de corrente e resistor em paralelo.

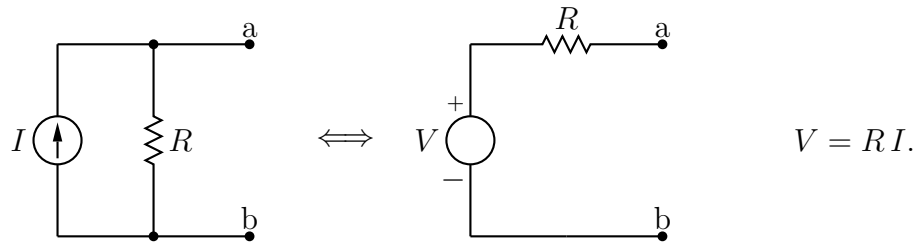


Figura 9: Fonte de corrente e resistor em paralelo.

7. Já a Fig. 10 exibe a técnica de explosão de fontes de tensão.

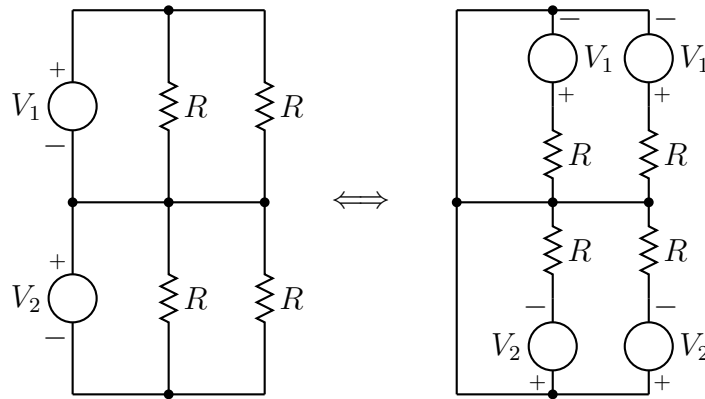


Figura 10: Explosão de fontes de tensão.

8. A técnica de explosão de fontes de corrente é vista na Fig. 11.

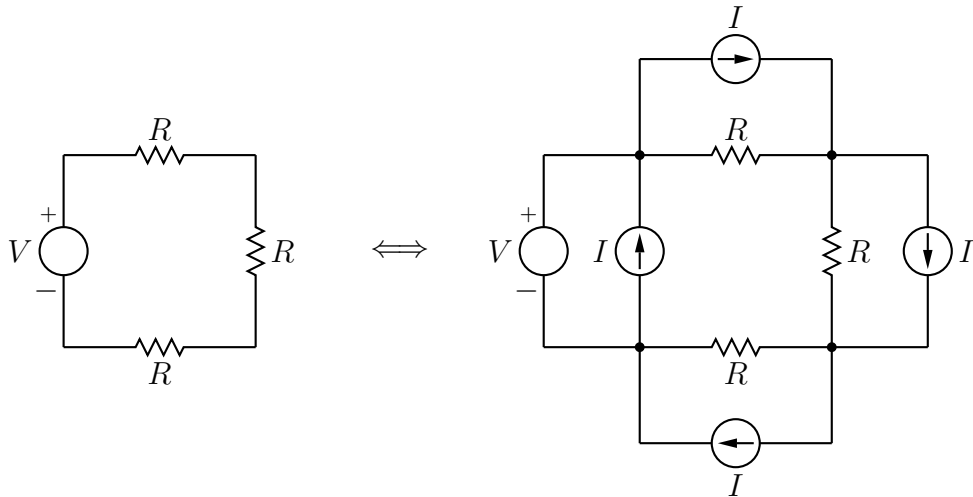


Figura 11: Explosão de fontes de corrente.

Sistemas Lineares

Um sistema linear, um circuito linear por exemplo, pode ser adequadamente modelado usando somente elementos lineares e fontes independentes. O diagrama visto na Fig. 12, representa um sistema linear H (um circuito puramente resistivo, por exemplo).

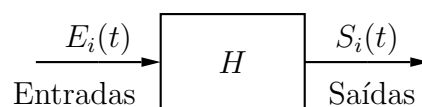


Figura 12: Sistema linear H .

A representação do sistema visto na Fig. 12 (modelo) é um conjunto de equações, obtidas pelas leis de Kirchhoff por exemplo, que permitem determinar o seu comportamento:

$$(S) \begin{cases} S_1(E_1, E_2, \dots, E_n) \\ S_2(E_1, E_2, \dots, E_n) \\ \vdots \\ S_n(E_1, E_2, \dots, E_n), \end{cases} \quad (5)$$

onde: S_i e E_i representam, respectivamente, a saída e a entrada i .

Por exemplo, para um circuito resistivo com entradas E_1 , E_2 e E_3 e saídas S_1 e S_2 , poderia-se obter:

$$(S) \begin{cases} S_1(E_1) = C_1 + C_2 E_1 \rightarrow \textbf{Equação de reta} \\ S_2(E_2, E_3) = C_3 + C_4 E_2 + C_5 E_3, \end{cases} \quad (6)$$

onde: C_1, C_2, \dots, C_5 são constantes. $S_1(E_1)$ é uma equação de reta.

Ou seja, a principal característica de um circuito linear é que suas saídas são funções lineares das entradas, onde as entradas de um circuito são os sinais produzidos por fontes externas, e as saídas são sinais de tensão ou corrente escolhidos.

Matematicamente, uma função (equação) é dita linear se possuir duas propriedades: homogeniedade e aditividade. Para um circuito linear, homogeniedade significa que a saída é proporcional a entrada. A aditividade diz que a saída devido a duas ou mais entradas pode ser encontrada pela adição das saídas obtidas separadamente. Estas propriedades podem ser escritas como a seguir:

$$f(Kx) = Kf(x), \quad (7a)$$

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2), \quad (7b)$$

onde: K é uma constante. Na análise de circuitos a propriedade da homogeniedade é chamada de proporcionalidade enquanto a propriedade da aditividade é conhecida como superposição.

Equação de Reta

A Eq. (6), $S_1(E_1)$, é uma equação de reta e apresenta as propriedades da homogeniedade e aditividade. A Fig. 13 exhibe o gráfico da equação de reta: $y(t) = at + b$, bem como o cálculo de a e b .

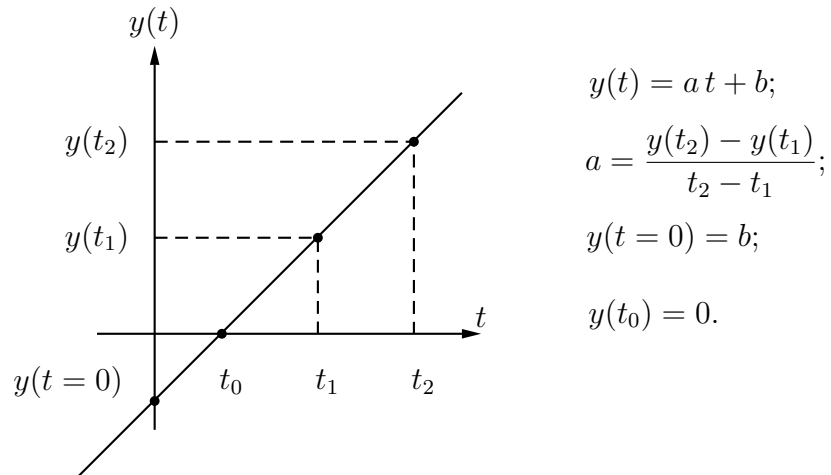


Figura 13: Gráfico de equação de reta.

Exemplo: obtendo a equação de reta determinada por $y(4) = 3$ e $y(2) = 1$, pode-se desenhar o seu gráfico como visto na Fig. 14.

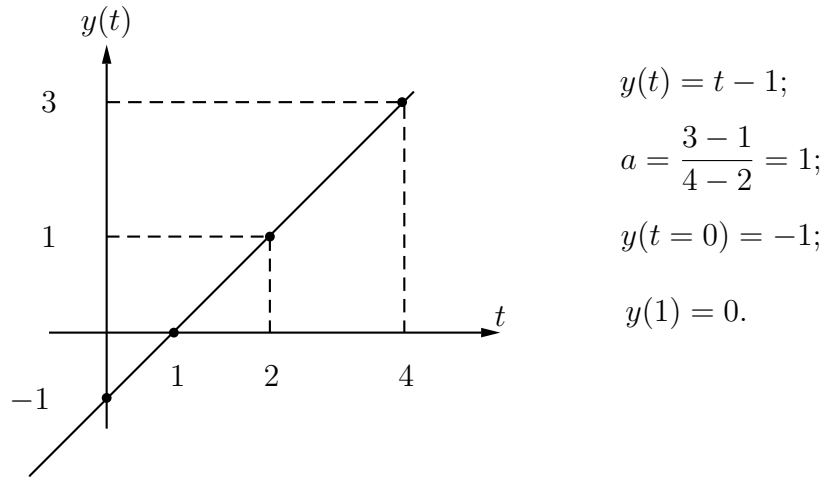


Figura 14: Exemplo de equação de reta.

Superposição

Segundo o teorema da superposição, quando um **Sistema Linear** é excitado ou alimentado por mais de uma fonte de energia, a resposta total é a soma das respostas a cada uma das fontes agindo separadamente. Utilizado, tanto em análise quanto em projeto de circuitos, para encontrar a solução de problemas que envolvem circuitos com duas ou mais fontes que não estejam em série nem em paralelo, o teorema da superposição pode ser aplicado a qualquer sistema linear.

Facilita a análise de circuitos complexos com muitas fontes de tensão e corrente, dispensando o uso de ferramentas matemáticas, como os determinantes, para determinar o valor das incógnitas.

Permite trabalhar com vários circuitos simples em lugar de um único mais complexo; em geral: o número de circuitos a serem analisados é igual ao número de fontes independentes.

Os efeitos são considerados separadamente (um de cada vez) e o valor das grandezas procuradas é obtido efetuando a soma algébrica desses efeitos individuais. Para levar em conta separadamente os efeitos de cada fonte é necessário que estas sejam removidas e substituídas sem alterar o resultado ideal. Removendo os efeitos das fontes:

- As fontes de tensão devem ser curto-circuitadas, conforme visto na Fig. 15.

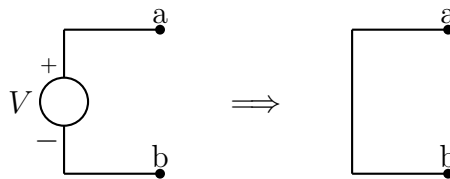


Figura 15: Remoção de fontes de tensão.

- As fontes de corrente devem ser isoladas entre si (circuito aberto), como visto na Fig. 16.

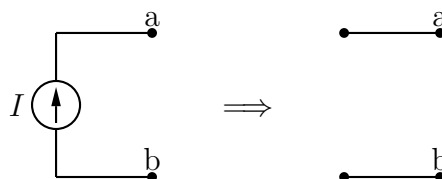


Figura 16: Remoção de fontes de corrente.

- As fontes dependentes não devem ser removidas.

O teorema da superposição não pode ser usado para determinar a potência dissipada em um circuito, já que a dissipação de potência em um resistor varia com o quadrado da corrente ou tensão, sendo portanto um efeito não linear.

Por exemplo, para um circuito resistivo com entradas E_1 , E_2 , E_3 e E_4 e saídas S_1 e S_2 :

$$(S) \begin{cases} S_1(E_1, E_2) = S_1(E_1) + S_1(E_2) \\ S_2(E_2, E_3, E_4) = S_2(E_2) + S_2(E_3) + S_2(E_4). \end{cases} \quad (8)$$

Teoria dos Erros

É sabido que a medida de uma grandeza física com absoluta exatidão é impossível. São apresentados a seguir, alguns termos importantes relacionados a teoria dos erros.

Erro: diferença entre o valor medido e o valor verdadeiro.

Exatidão: é a medida do grau de concordância entre a indicação de um instrumento e o valor verdadeiro da grandeza.

Tendência: é a parcela do erro que se repete em um conjunto de medidas (erro sistemático). Pode ser cancelada por calibração do instrumento ou por cálculo.

Imprecisão: é a parcela do erro que não se repete, contribuindo de forma aleatória nas medidas.

Precisão: é a medida do grau de repetibilidade de uma medida.

Fontes de Erro

As diferenças encontradas em laboratório entre os valores medidos e/ou observados e os valores esperados (calculados) deve-se, principalmente, aos instrumentos de medida (amperímetros³ e voltímetros), erros de arredondamento, valores dos componentes, e à imprecisão das fontes de tensão e corrente.

É sabido que os resistores, capacitores, etc., apresentam um certo grau de tolerância no seu valor (1, 5 ou 10%) o que provoca uma diferença (erro) entre as medidas e os valores teóricos observados em um circuito com estes componentes. O erro de arredondamento surge devido ao grau de exatidão adotado nos cálculos. Já para se compreender o erro presente nos instrumentos de medida, é necessário conhecer o seu princípio de funcionamento, apresentado a seguir.

O mecanismo sensor mais utilizado nos amperímetros e voltímetros de corrente contínua, e também nos ohmímetros, é um dispositivo sensor de corrente também conhecido como galvanômetro, chamado mecanismo medidor de D'Arsonval ou mecanismo de bobina móvel e ímã permanente.

O medidor D'Arsonval é um dispositivo que possui, simplificada, uma bobina (espira) móvel (livre para girar) que fica disposta entre os pólos de um ímã permanente.

Através do fio da bobina móvel, que apresenta uma certa resistência, circula a corrente a ser medida. O campo magnético interage com a corrente da espira para produzir um torque, o que provoca uma reação da espira.

O torque resultante tende a girar a bobina, cuja rotação é limitada por uma mola helicoidal. Deste modo, o movimento da bobina e, conseqüentemente, o do ponteiro é linearmente proporcional à corrente aplicada na bobina.

³André-Marie Ampère, (1775-1836) matemático/físico Francês, primeiro a reconhecer os efeitos elétricos hoje conhecidos como tensão e corrente.

Os circuitos de um amperímetro e de um voltímetro de corrente contínua são vistos na Figura 17.

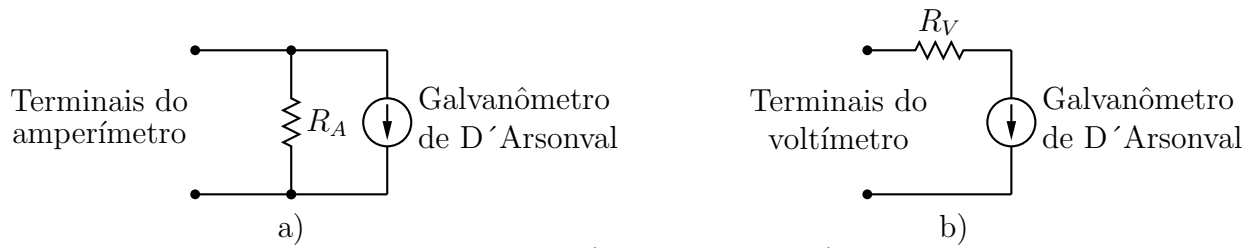


Figura 17: Circuitos de: a) amperímetro, b) voltímetro.

Os amperímetros apresentam dois tipos de erros: erro de carga e de calibração. O erro de carga é devido ao efeito de carga, resultante do acréscimo da resistência do medidor, R_A . O segundo erro, surge do fato de que a escala do medidor não pode ser marcada de forma exata.

Quando um voltímetro é conectado a um circuito ele absorve uma corrente. Esta corrente produz uma queda de tensão na resistência, R_V , de sua bobina que é subtraída da tensão que está sendo medida. Esta redução (erro) na tensão medida é chamada efeito de carga.