Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Escola de Engenharia de Porto Alegre
Departamento de Engenharia Elétrica
ANÁLISE DE CIRCUITOS II - ENG04031

Aula 5 - Condições Iniciais e Finais de Carga e Descarga em Capacitores e Indutores

Sumário

- Análise de circuitos no domínio tempo;
- Equações básicas de tensão e corrente em indutores e capacitores;
- Condições iniciais e finais de tensão e corrente nos capacitores e indutores;
- Resposta de circuitos RC série a um degrau;
- Procedimentos práticos de solução de circuitos RC;
- Resposta de circuitos RL série a um degrau.

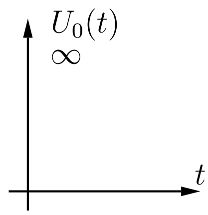
Análise de Circuitos no Domínio Tempo

Ao se iniciar a análise de circuitos no domínio tempo, deve-se conhecer os modelos no domínio tempo das principais funções que representam as fontes de tensão e corrente (sinais) presentes em um circuito.

Esses sinais estão associados a fenômenos físicos que ocorrem em um circuito; representam o fechamento de uma chave, o decaimento natural da tensão em um elemento do circuito, entre outros.

São seis as principais funções: (1) impulso unitário, (2) degrau unitário, (3) rampa, (4) quadrática, (5) exponencial e (6) senoidal. As equações e os gráficos dessas funções são vistas a seguir.

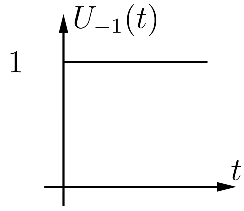
1. O gráfico da função Impulso Unitário, bem como sua equação, são vistos na Fig. 1.



$$U_0(t)\begin{cases} 0 & : \quad t<0 \\ \infty & : \quad t=0 \\ 0 & : \quad t>0. \end{cases}$$

Figura 1: Função Impulso Unitário.

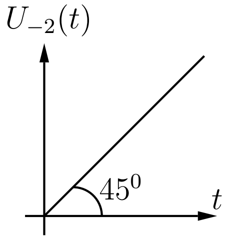
2. O gráfico e a equação da função Degrau Unitário são vistos na Fig. 2.



$$U_{-1}(t)\begin{cases} 0 & : \quad t<0 \\ 1 & : \quad t\geq 0. \end{cases}$$

Figura 2: Função Degrau Unitário.

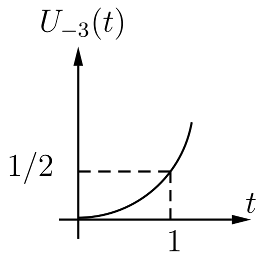
3. A equação e o gráfico da função Rampa são vistos na Fig. 3.



$$U_{-2}(t)\begin{cases} t & : \quad t \geq 0 \\ 0 & : \quad t < 0. \end{cases}$$

Figura 3: Função Rampa.

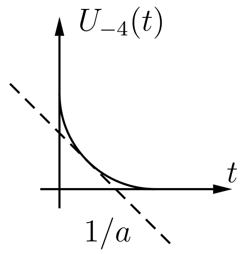
4. A Fig. 4 exibe a função Quadrática.



$$U_{-3}(t)\begin{cases} 0 & : \quad t < 0 \\ \dfrac{t^2}{2} & : \quad t \geq 0. \end{cases}$$

Figura 4: Função Quadrática.

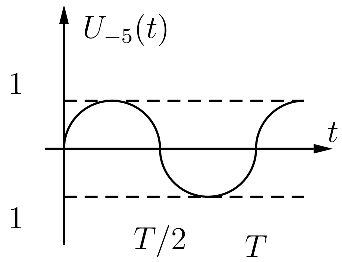
5. Já a Fig. 5 mostra a função Exponencial.



$$U_{-4}(t)\begin{cases} 0 & : \quad t < 0 \\ e^{-at}\, U_{-1} & : \quad t \geq 0. \end{cases}$$

Figura 5: Função Exponencial.

6. Por fim, o gráfico e equação da função Senoidal são exibidos na Fig. 6.



$$U_{-5}(t)\begin{cases} 0 & : \quad t < 0 \\ sen(\omega_0 t)\, U_{-1}(t) & : \quad t \geq 0. \end{cases}$$

Figura 6: Função Senoidal.

Obs.: defini-se o instante de tempo $t = 0$ o momento inicial em que ocorrre alguma transição no circuito, tal como uma chave abrindo ou fechando, um sinal (fonte) sendo "ligado"ao circuito, entre outros. Ainda, defini-se também os intantes $t = 0_-$ e $t = 0_+$ os intantes imediatamente anterior e posterior a $t = 0$, respectivamente.

Indutor

A capacidade que um condutor possui de induzir tensão em si mesmo quando a corrente varia é a sua *auto-indutância* ou simplesmente *indutância*, simbolizada pela letra L [1], medida em henrys (H).

[1] L = fluxo magnético/corrente = Weber/Ampére = henry.

Em outras palavras, a indutância é a propriedade de um circuito fazer oposição a qualquer mudança na circulação de corrente.

Um indutor é uma bobina de indução (condutor enrolado), usado para introduzir uma indutância em um circuito. O comportamento dos indutores se baseia em fenômenos associados a campos magnéticos produzidos por correntes elétricas. Quando há variação de corrente elétrica, o campo magnético produzido por esta corrente também varia.

O símbolo do indutor é visto na Fig. 7.

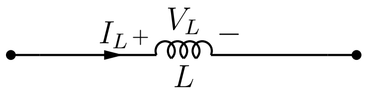


Figura 7: Símbolo do indutor.

A tensão entre os terminais de um indutor é proporcional à taxa de variação da corrente que o percorre. Matematicamente, a relação é a seguinte:

$$V_L = L\,\frac{\partial I_L}{\partial t}. \tag{1}$$

Integrando a expressão anterior, obtém-se a corrente I_L:

$$I_L = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} V_L(t)\,\partial t = \frac{1}{L}\int_{0}^{t} V_L(t)\,\partial t + I_L(0). \tag{2}$$

Em um instante infinitesimal de tempo, entre 0_- e 0_+ por exemplo, tem-se:

$$I_L(t) = \frac{1}{L}\int_{t=0_-}^{t=0_+} V_L(t)\,\partial t = 0. \tag{3}$$

Ou seja, não é possível modificar a corrente no indutor de modo instantâneo, a não ser que $V_L = \infty$.

Capacitor

Um capacitor é um dispositivo elétrico formado por duas placas condutoras de metal separadas por um material isolante chamado dielétrico. O comportamento dos capacitores se baseia em fenômenos associados a campos elétricos, armazenando a carga elétrica no dielétrico.

A capacitância é a capacidade de armazenamento de carga elétrica, simbolizada pela letra C [2], medida em farads (F).

O símbolo do capacitor é visto na Fig. 8.

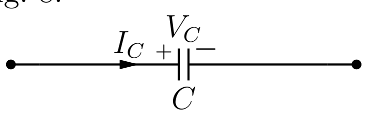


Figura 8: Símbolo do capacitor.

A corrente do capacitor é proporcional à taxa de variação da tensão entre os terminais do capacitor. Matematicamente, a relação é a seguinte:

$$I_C = C\,\frac{\partial V_C}{\partial t}. \tag{4}$$

Integrando a expressão anterior, obtém-se a tensão V_C:

$$V_C = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} I_C(t)\,\partial t = \frac{1}{C}\int_{0}^{t} I_C(t)\,\partial t + V_C(0). \tag{5}$$

[2] C = quantidade de carga/tensão = Coulomb/Volt = farad.

Em um instante de infinitesimal de tempo, entre 0_- e 0_+ por exemplo, tem-se:

$$V_C(t) = \frac{1}{C} \int_{t=0_-}^{t=0_+} I_C(t)\, \partial t = 0. \tag{6}$$

Ou seja, não é possível modificar a tensão no capacitor de modo instantâneo, a não ser que $I_C = \infty$.

Condições Iniciais e Finais de Tensão e Corrente em Capacitores e Indutores

Algumas considerações importantes, vistas a seguir, podem ser feitas a respeito do comportamento inicial e final das tensões e correntes nos capacitores e indutores.

• Indutor para $t = 0$: a corrente que atravessa um indutor não pode variar instantaneamente; assim, o indutor comporta-se como um circuito aberto, como visto na Fig. 9.

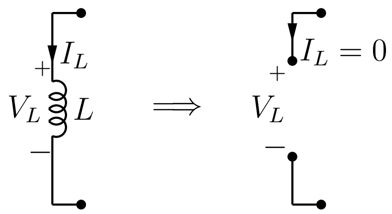


Figura 9: Comportamento do indutor para $t = 0$.

• Indutor para $t = \infty$: quando a corrente que atravessa um indutor é constante, a tensão é nula; isto é, o indutor se comporta como um curto-circuito, conforme visto na Fig. 10.

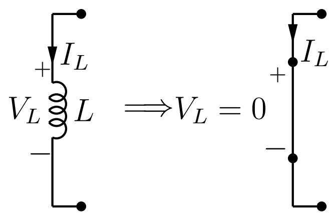


Figura 10: Comportamento do indutor para $t = \infty$.

• Capacitor para $t = 0$: a tensão entre os terminais de um capacitor não pode variar instantaneamente; ou seja, o capacitor comporta-se como um curto-circuito, como visto na Fig. 11.

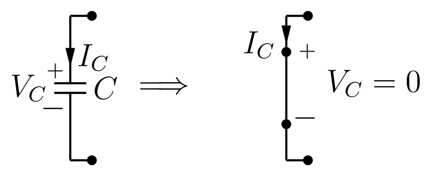


Figura 11: Comportamento do capacitor para $t = 0$.

• Capacitor para $t = \infty$: quando a tensão é constante, a corrente em um capacitor é nula; isto é, o capacitor se comporta como um circuito aberto, conforme visto na Fig. 12.

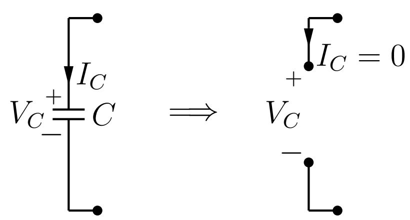


Figura 12: Comportamento do capacitor para $t = \infty$.

Resposta de Circuitos RC Série a um Degrau

A resposta de um circuito à aplicação abrupta de uma tensão ou corrente é conhecida como resposta a um degrau. A resposta de um circuito, Fig. 13, a um degrau de amplitude V será descrita a seguir.

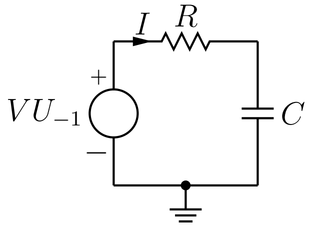
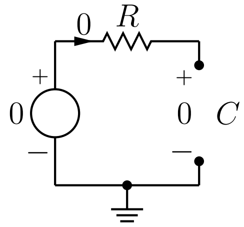


Figura 13: Circuito RC série.

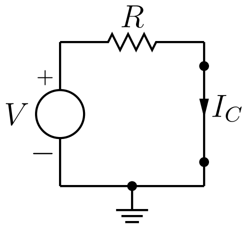
Inicialmente, deve-se obter as condições iniciais de tensão e corrente dos componentes do circuito.

- para $t \leq 0_- \; (t \rightarrow -\infty)$:



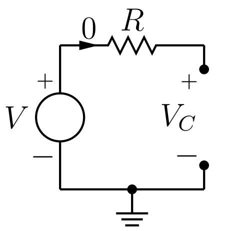
$$V_C(0_-) = 0,$$
$$I_C(0_-) = 0.$$

- para $t = 0_+$:



$$V_C(0_+) = 0,$$
$$I_C(0_+) = \frac{V}{R}.$$

- para $t \geq 0 \, (t \rightarrow +\infty)$



$$V_C(\infty) = V,$$
$$I_C(\infty) = 0.$$

Pode-se obter agora a equação diferencial do circuito a partir da lei de Kirchhoff:

$$\begin{aligned} I_R &= I_C \\ \frac{V - V_C}{R} &= C\,\frac{\partial V_C}{\partial t} \\ \frac{\partial t}{C\,R} &= \frac{\partial V_C}{V - V_C} = \frac{-\partial V_C}{V_C - V}. \end{aligned} \tag{7}$$

Integrando a expressão anterior, obtém-se a expressão de $V_C(t)$:

$$\begin{aligned} \int_{t=0_-}^{t} \frac{\partial \tau}{R\,C} &= \int_{V_C(0)}^{V_C(t)} \frac{-\partial V_C}{V_C - V} \\ \frac{-\tau}{R\,C}\bigg|_0^t &= ln\bigg|V_C - V\bigg|_{V_C(0)}^{V_C(t)} \end{aligned} \tag{8}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{-t}{R\,C} &= ln\left|\frac{V_C(t)-V}{V_C(0)-V}\right| \\
e^{\left(\dfrac{-t}{R\,C}\right)} &= \frac{V_C(t)-V}{V_C(0)-V} \\
V_C(t) &= V + \Big[V_C(0)-V\Big] e^{\left(\dfrac{-t}{R\,C}\right)} \\
V_C(t) &= V\left(1-e^{\left(\dfrac{-t}{R\,C}\right)}\right).
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Determina-se então, a expressão de $I_C(t)$ para $\forall\ t$:

$$
\begin{aligned}
&I_C(t) = C\,\frac{\partial V_C(t)}{\partial t} \\
&I_C(t) = C\,\partial\left(V - V e^{\left(\dfrac{-t}{R\,C}\right)}\right)/\partial t \\
&I_C(t) = C\left(0 - V\,(-1/R\,C)\,e^{\left(\dfrac{-t}{R\,C}\right)}\right) \\
&I_C(t) = \frac{V}{R}\,e^{\left(\dfrac{-t}{R\,C}\right)}.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Exemplo 1: supondo um circuito RC série, como visto na Fig. 13, com $R = 100$, $V = 1$ e $C = 1\mu$, as expressões para $V_C(t)$ e $I_C(t)$ ficam:

$$
\begin{aligned}
V_C(t) &= 1 - e^{(-10k\,t)}, \\
I_C(t) &= 0,01\,e^{(-10k\,t)}.
\end{aligned}
\tag{11}
$$

A Fig. 14 exibe a resposta de $V_C(t)$ e de $I_C(t)$ ao degrau unitário. Estes gráficos foram gerados com o auxílio do Matlab.

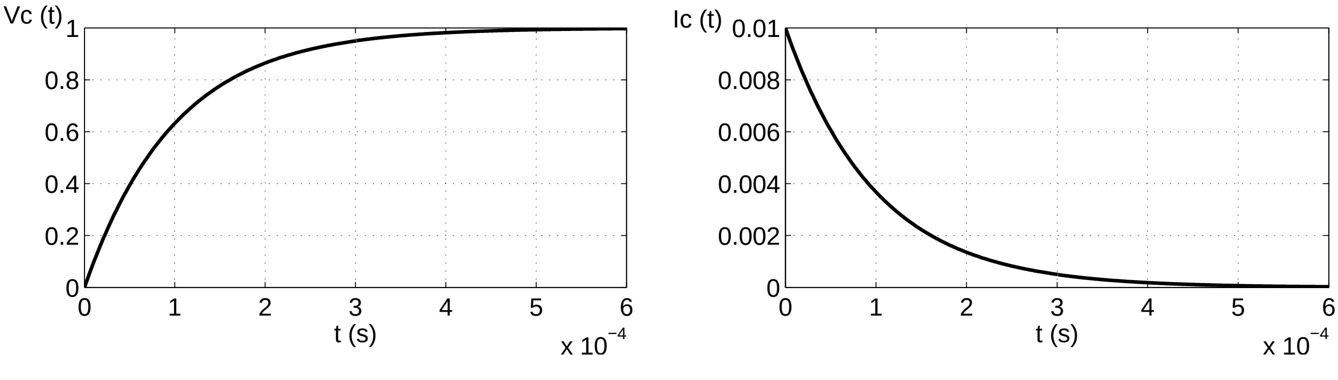


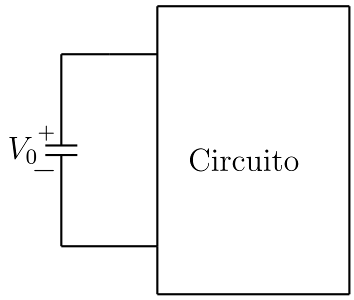
Figura 14: Gráficos de $V_C(t)$ e $I_C(t)$ para o Exemplo 1.

Observando a Fig. 14, vê-se que quando o tempo transcorrido é maior do que cinco (5) constantes de tempo, $t > 5\tau$ ($\tau = R\,C = 1 \times 10^{-4}$), o valor de V_C ou I_C atinge mais de 99% (99.3) do valor de regime permanente.

Procedimentos Práticos para Solução de Circuitos RC

Os procedimentos apresentados a seguir são úteis ao se trabalhar com circuitos onde os capacitores já se apresentam carregados e ocorre alguma redistribuição de cargas após uma chave ser fechada ou uma fonte modificar o seu valor, por exemplo.

Deve-se substituir as condições iniciais por fontes equivalentes. A Fig. 15 exibe um capacitor já carregado ligado a um circuito e o cálculo de $V_C(t)$ nesse caso.



$$V_C(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{t} i_C(t)\,\partial t$$
$$V_C(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{0} i_C(t)\,\partial t + \frac{1}{C} \int_{0}^{t} i_C(t)\,\partial t$$
$$V_C(t) = V_0\, U_{-1} + \frac{1}{C} \int_{0}^{t} i_C(t)\,\partial t.$$

Figura 15: Circuito com capacitor carregado.

O circuito equivalente com as condições iniciais e finais de tensão sobre o capacitor é visto na Fig. 16.

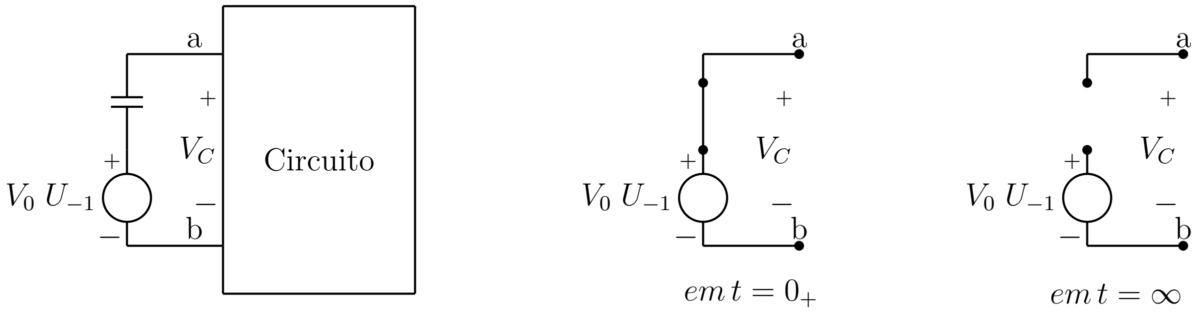


Figura 16: Circuito equivalente da Fig. 15.

Obs.: as tensões nos capacitores são as tensões nos conjuntos (capacitor descarregado + fonte).

Exemplo 2: considerando o cicuito visto na Fig. 17, que apresenta dois capacitores já carregados, uma chave é fechada, em $t = 0$, colocando um fonte de 40V em paralelo com o circuito RC.

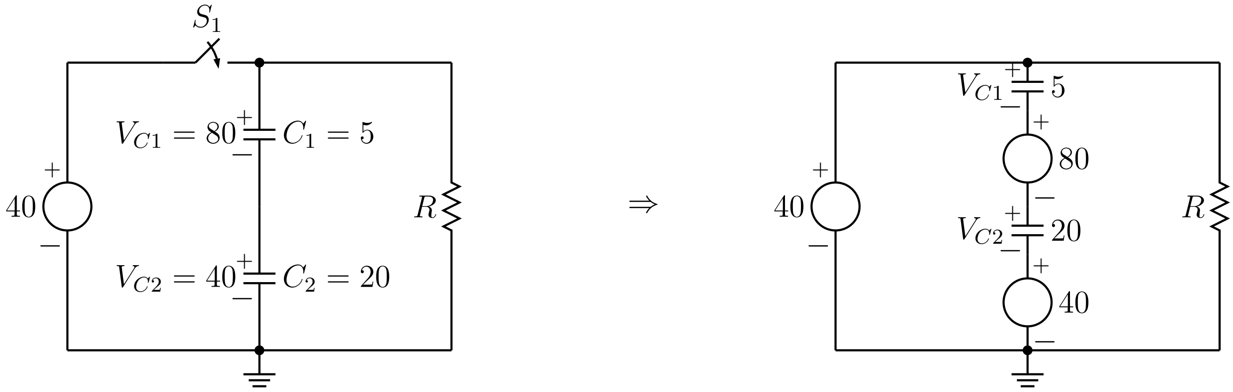
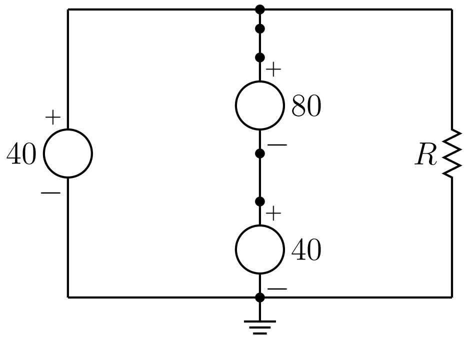


Figura 17: Exemplo de distribuição de cargas entre capacitores.

Para $t = 0_+$, deve-se substituir os capacitores descarregados por curto-circuitos, verificando a necessidade de distribuição de cargas. A Fig. 18 exibe a substituição dos capacitores pelos seus equivalentes para $t = 0_+$ no circuito do Exemplo 2.



40//120 → Precisa redistribuir.

Figura 18: Continuação do Exemplo 1.

Deve-se distribuir todas as tensões pelos capacitores descarregados. Calcula-se, inicialmente, a capacitância equivalente C_{eq}:

$$\begin{aligned} \frac{1}{C_{eq}} &= \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \\ \frac{1}{C_{eq}} &= \frac{1}{5} + \frac{1}{20} \\ C_{eq} &= 4. \end{aligned} \tag{12}$$

Aplicando a lei de Kirchhoff das tensões, para uma das malhas do circuito visto na Fig. 18, obtém-se:

$$\begin{aligned} &-40 + V_{Ceq} + 80 + 40 = 0 \\ &V_{Ceq} = 40 - 120. \end{aligned} \tag{13}$$

onde V_{Ceq} é a tensão do capacitor equivalente.

Calcula-se a carga total Q_T:

$$\begin{aligned} Q_T &= C_{eq}\, V_T \\ Q_T &= 4\ (40 - 120) = -320. \end{aligned} \tag{14}$$

Obtêm-se por fim, as tensões $\acute{V}_{C1}$ e $\acute{V}_{C2}$ distribuídas entre os capacitores:

$$\begin{aligned} \acute{V}_{C1} &= \frac{Q_T}{C_1} = \frac{-320}{5} = -64, \\ \acute{V}_{C2} &= \frac{Q_T}{C_2} = \frac{-320}{20} = -16. \end{aligned} \tag{15}$$

Calcule-se então, as tensões finais sobre os capacitores:

$$\begin{aligned} V_{C1} &= V_{C1(0_-)} - \acute{V}_{C1} = 80 - 64 = 16, \\ V_{C2} &= V_{C2(0_-)} - \acute{V}_{C2} = 40 - 16 = 24. \end{aligned} \tag{16}$$

Procedimento análogo deve ser feito para $t = \infty$.

Resposta de Circuitos RL Série a um Degrau

A resposta de um circuito RL série, como visto na Fig. 19, a um degrau de amplitude V será analisada a seguir.

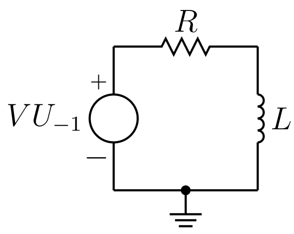
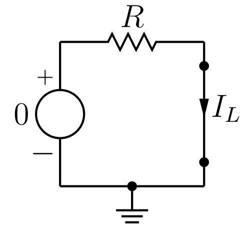


Figura 19: Circuito RL série.

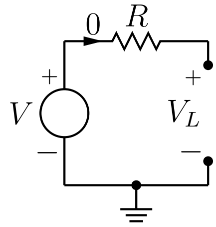
Inicialmente, deve-se obter as condições iniciais de tensão e corrente dos componentes.

- para $t \leq 0_- \ (t \to -\infty)$:



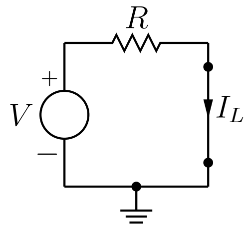
$$V_L(0_-) = 0,$$
$$I_L(0_-) = 0.$$

- para $t = 0_+$:



$$V_L(0_+) = V,$$
$$I_L(0_+) = 0.$$

- para $t \geq 0 \, (t \to +\infty)$:



$$V_L(\infty) = 0,$$
$$I_L(\infty) = \frac{V}{R}.$$

Pode-se obter agora, a equação diferencial do circuito a partir da lei de Kirchhoff:

$$\begin{aligned} V_L &= V_R \\ L\,\frac{\partial I_L}{\partial t} &= (I_1 - I_L)\ R \\ \frac{R}{L}\,\partial t &= \frac{\partial I_L}{I_L - I_1}. \end{aligned} \tag{17}$$

Integrando a expressão anterior, obtém-se a corrente $I_L(t)$:

$$\begin{aligned} \int_0^{-t} \frac{R}{L}\,\partial\tau &= \int_{I_L(0)}^{I_L(t)} \frac{\partial I_L}{I_L - I_1} \\ \frac{-R\,t}{L} &= \ln\left|\frac{I_L(t) - I_1}{I_L(0) - I_1}\right| \\ e^{\left(\frac{-R\,t}{L}\right)} &= \frac{I_L(t) - I_1}{I_L(0) - I_1} \\ I_L(t) &= I_1 + \Big(I_L(0) - I_1\Big)\, e^{\left(\frac{-R\,t}{L}\right)} \\ I_L(t) &= \frac{V}{R} + \Big(0 - \frac{V}{R}\Big)\, e^{\left(\frac{-R\,t}{L}\right)} \\ I_L(t) &= \frac{V}{R}\left(1 - e^{\left(\frac{-R\,t}{L}\right)}\right). \end{aligned} \tag{18}$$

Determina-se agora a expressão de $V_L(t)$ para $\forall\ t$:

$$
\begin{aligned}
V_L(t) &= L\ \frac{\partial I_L(t)}{\partial t} \\
V_L(t) &= L\ \frac{\partial \left(\frac{V}{R} - \frac{V}{R}\ e^{\left(\frac{-R\,t}{L}\right)} \right)}{\partial t} \\
V_L(t) &= L\ \left(0 - \frac{V}{R}\ \left(\frac{-R}{L}\right)\ e^{(-R\,t/L)} \right) \\
V_L(t) &= V\ e^{\left(\frac{-R\,t}{L}\right)}.
\end{aligned}
\tag{19}
$$

Exemplo 3: supondo um circuito RL série, como visto na Fig. 19, com $R = 100$, $V = 1$ e $L = 1m$, as expressões para $I_L(t)$ e $V_L(t)$ ficam:

$$
\begin{aligned}
I_L(t) &= 0,01\ \left(1 - e^{(-100k\,t)}\right), \\
V_L(t) &= 1\ e^{(-100k\,t)}.
\end{aligned}
\tag{20}
$$

A Fig. 20 exibe a resposta de $I_L(t)$ e de $V_L(t)$ ao degrau unitário. Estes gráficos também foram gerados com o auxílio do Matlab.

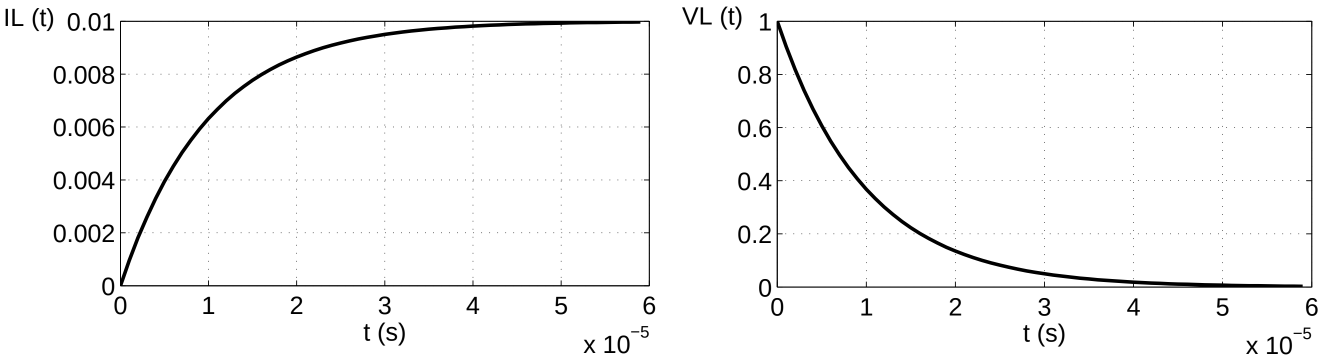


Figura 20: Gráficos de $I_L(t)$ e $V_L(t)$.

Observa-se, novamente, que quando o tempo transcorrido é maior do que cinco (5) constantes de tempo, $t > 5\ \tau$ ($\tau = R/L = 1 \times 10^{-5}$), o valor de V_L ou I_L atinge mais de 99% do valor de regime permanente.