

## Aula 6 - Resposta no Domínio Tempo de Circuitos RC e RL

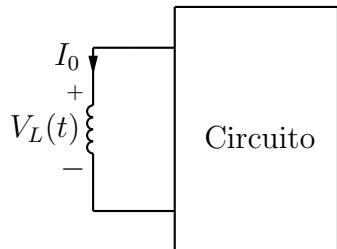
### Sumário

- Procedimentos práticos para solução de circuitos RL;
- Resposta de circuitos RC e RL série a onda quadrada;
- Resistência interna das fontes de tensão e aterramento.

### Procedimentos Práticos para Solução de Circuitos RL

Os procedimentos apresentados a seguir, são úteis ao se analisar circuitos onde os indutores já se apresentam carregados e ocorre alguma redistribuição de fluxos após uma chave ser fechada ou uma fonte ter o seu valor alterado, por exemplo.

Deve-se substituir as condições iniciais por fontes equivalentes. A Fig. 1 exibe um indutor já carregado ligado a um circuito e o cálculo de  $I_L(t)$  para este caso.



$$I_L(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t V_L(t) dt$$

$$I_L(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^0 V_L(t) dt + \frac{1}{L} \int_0^t V_L(t) dt$$

$$I_L(t) = I_0 U_{-1} + \frac{1}{L} \int_0^t V_L(t) dt.$$

Figura 1: Circuito com indutor carregado.

O circuito equivalente com as condições iniciais e finais de tensão sobre o indutor é visto na Fig. 2.

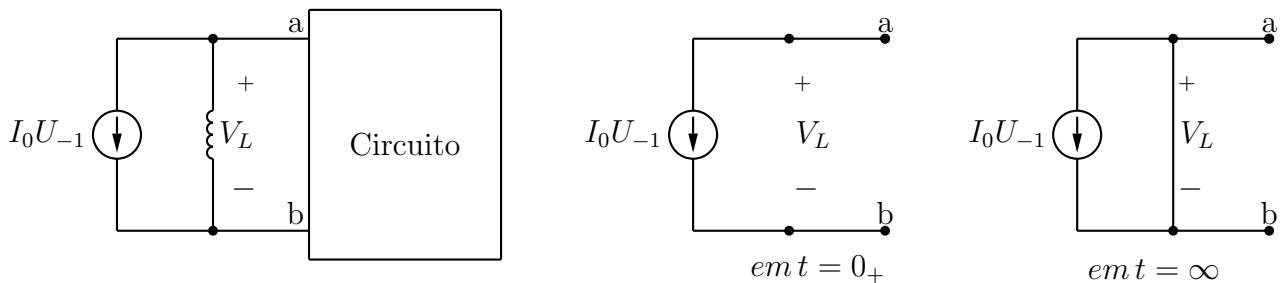


Figura 2: Circuito equivalente da Fig. 1

**Exemplo 1:** considerando o circuito visto na Fig. 3.

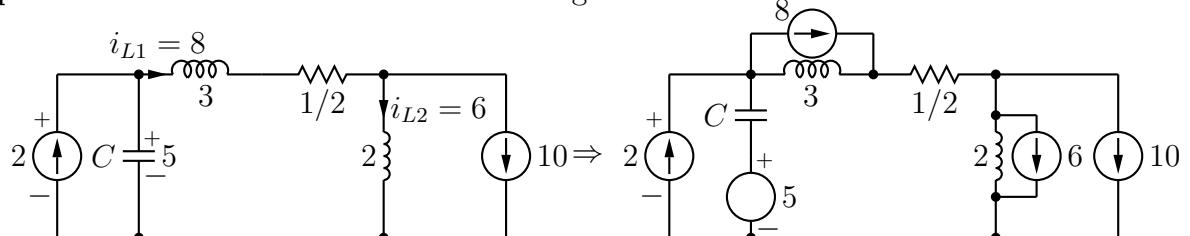
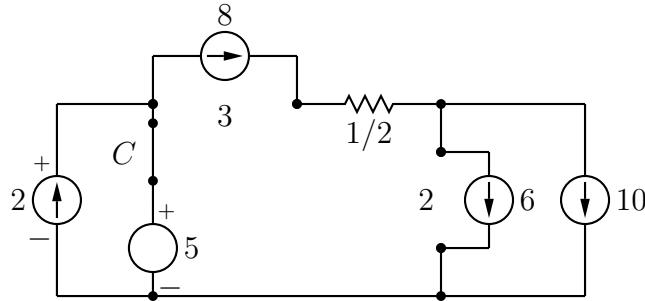


Figura 3: Exemplo de distribuição de cargas entre indutores.

Obs.: As correntes nos indutores reais são as correntes nos conjuntos (indutor descarregado + fonte).

Para  $t = 0_+$ , deve-se substituir os capacitores descarregados por curto-circuitos e fazer indutores descarregados iguais a um circuito aberto (comportamento instantâneo), verificando a necessidade de redistribuição de fluxos. A Fig. 4 exibe a substituição dos capacitores e indutores pelos seus equivalentes para  $t = 0_+$  no circuito do Exemplo 1.



8 em série com 6+10 !  
Necessário redistribuir fluxos.

Figura 4: Continuação do Exemplo 1.

Distribue-se todas as correntes (simultaneamente ou por superposição) pelas indutâncias descarregadas nas indutâncias inicialmente carregadas. As correntes se dispõem proporcionais aos inversos das indutâncias (quando em paralelo). A Fig. 5 exibe o circuito equivalente da Fig 4.

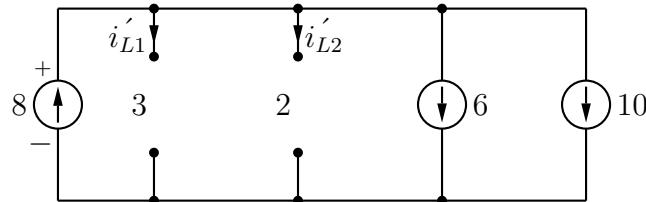


Figura 5: Circuito equivalente da Fig. 4.

Obtém-se as correntes  $i'_{L1}$  e  $i'_{L2}$ , distribuídas entre os indutores, do seguinte modo:

$$\begin{aligned} i'_{L1} &= \frac{1/3}{1/3 + 1/2} (8 - 6 - 10) = -3,2 \\ i'_{L2} &= \frac{1/2}{1/2 + 1/3} (8 - 6 - 10) = -4,8. \end{aligned} \quad (1)$$

Calcule-se então, as correntes finais sobre os indutores:

$$\begin{aligned} i_{L1} &= 8 - i'_{L1} = 11,2 \\ i_{L2} &= 6 - i'_{L2} = 10,8. \end{aligned} \quad (2)$$

Obs.: deve-se observar que as correntes obtidas pela proporcionalidade não são as correntes nos indutores reais e também os sentidos escolhidos para as correntes  $i_{L1}$ ,  $i'_{L1}$ ,  $i_{L2}$  e  $i'_{L2}$ . Procedimento análogo se faz para  $t = \infty$ , mesmo que não haja necessidade de distribuir fluxos para  $t = 0_+$ , Fig. 6.

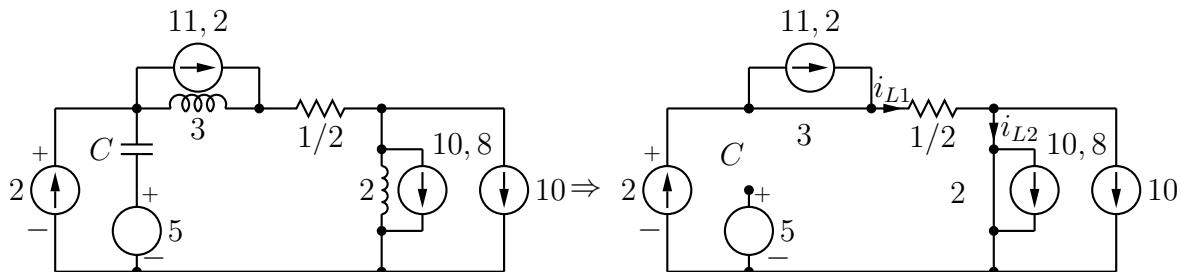


Figura 6: Circuito equivalente da Fig. 4 para  $t = \infty$ .

## Resposta de Circuitos RC a Onda Quadrada

As análises de circuitos RC e RL até agora se limitaram a ondas do tipo salto. Agora, será abordado uma forma de onda pulsada e a resposta de circuitos RC e RL a este tipo de sinal. As ondas pulsadas são muito usadas na indústria. Instrumentos de medida, equipamentos de comunicações, computadores e sistemas de radar empregam sinais pulsados para controlar operações, transmitir dados e exibir informações.

A resposta de um circuito à aplicação de uma tensão ou corrente cuja forma de onda é vista na Fig. 7, é conhecida como resposta a uma onda quadrada. O sinal visto na Fig. 7 é composto de pulsos ideais, com cantos bem definidos e plano no topo.

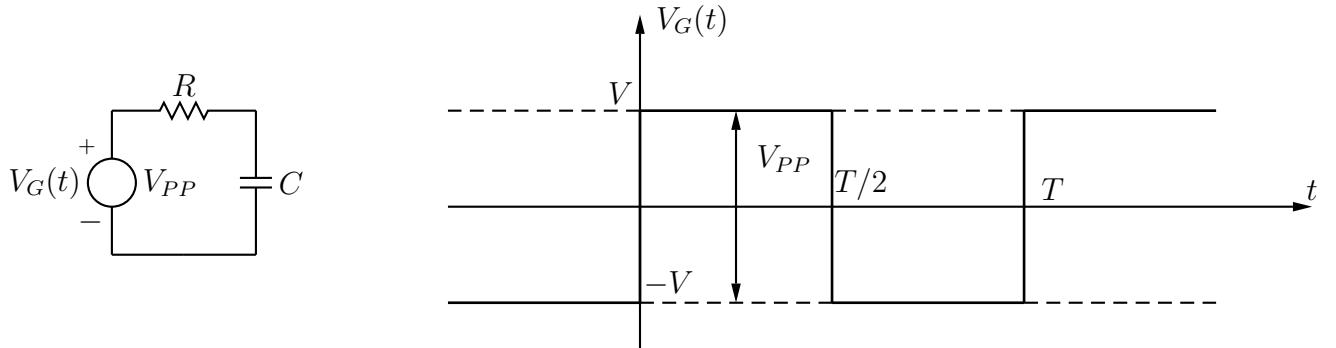
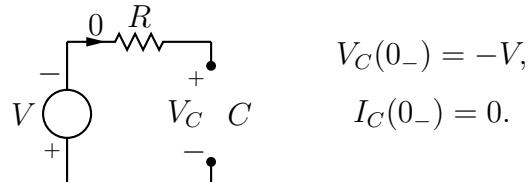


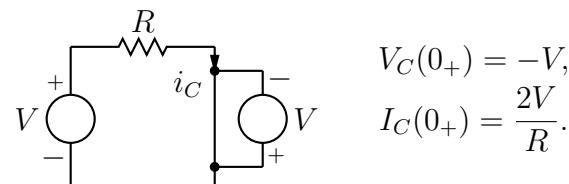
Figura 7: Circuito RC série e onda quadrada.

A resposta de um circuito RC série a uma onda quadrada de amplitude \$V\_{PP}\$, tensão de pico-a-pico, será descrita a seguir. Inicialmente, deve-se obter as condições iniciais de tensão e corrente dos componentes do circuito:

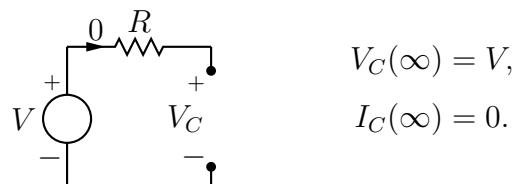
- para \$t \leq 0\_-\$ (\$t \rightarrow -\infty\$):



- para \$t = 0\_+\$:



- para \$t \geq 0\$ (\$t \rightarrow +\infty\$):



Pode-se obter agora, a expressão de  $V_C(t)$ , para  $0 < t < T/2$ , a partir da equação diferencial do circuito obtida através da lei de Kirchhoff:

$$\begin{aligned} \frac{I_R}{R} &= I_C \\ \frac{V - V_C}{R \frac{\partial t}{\partial t}} &= C \frac{\partial V_C}{\partial t} \\ \frac{1}{CR} &= \frac{\partial V_C}{V - V_C} = \frac{-\partial V_C}{V_C - V}. \end{aligned} \quad (3)$$

Integrando a expressão anterior, obtém-se a expressão de  $V_C(t)$ :

$$\begin{aligned} - \int_0^t \frac{\partial \tau}{RC} &= \int_{V_C(0)}^{V_C(t)} \frac{\partial V_C}{V_C - V} \\ \left. \frac{-t}{RC} \right|_0^t &= \ln \left. \left| V_C - V \right| \right|_{V_C(0)}^{V_C(t)} \\ \left. \frac{-t}{RC} \right|_0^t &= \ln \left| \frac{V_C(t) - V}{V_C(0) - V} \right| \\ e^{\left( \frac{-t}{RC} \right)} &= \frac{V_C(t) - V}{V_C(0) - V} \\ V_C(t) &= V + [V_C(0) - V] e^{\left( \frac{-t}{RC} \right)} \\ V_C(t) &= V \left( 1 - 2e^{\left( \frac{-t}{RC} \right)} \right). \end{aligned} \quad (4)$$

Determina-se então, a expressão de  $I_C(t)$  para  $0 < t < T/2$ :

$$\begin{aligned} I_C(t) &= C \frac{\partial V_C(t)}{\partial t} \\ I_C(t) &= C \frac{\partial}{\partial t} \left( V - 2V e^{\left( \frac{-t}{RC} \right)} \right) \\ I_C(t) &= C \left( 0 - 2V \left( \frac{-1}{RC} \right) e^{\left( \frac{-t}{RC} \right)} \right) \\ I_C(t) &= \frac{2V}{R} e^{\left( \frac{-t}{RC} \right)}. \end{aligned} \quad (5)$$

As expressões completas de  $V_C(t)$  e de  $I_C(t)$  para  $\forall t$  são as seguintes:

$$V_C(t) = \begin{cases} V \left( 1 - 2e^{\left( \frac{-t}{RC} \right)} \right) & : \quad KT \leq t < (2K+1)T/2 \\ -V \left( 1 - 2e^{\left( \frac{-t}{RC} \right)} \right) & : \quad (2K+1)T/2 \leq t^* \leq (K+1)T, \end{cases} \quad (6)$$

e

$$I_C(t) = \begin{cases} \frac{2V}{R} e^{\left( \frac{-t}{RC} \right)} & : \quad KT \leq t < (2K+1)T/2 \\ \frac{-2V}{R} e^{\left( \frac{-t}{RC} \right)} & : \quad (2K+1)T/2 \leq t^* \leq (K+1)T, \end{cases} \quad (7)$$

com  $K = 0, 1, 2, \dots, n$  p/  $\forall t$  e  $t^* = t - \frac{(2K+1)T}{2}$ .

**Exemplo 2.** Considerando  $R = 100$ ,  $V = 1$  e  $C = 1\mu$  ( $T \cong 10RC$ ), as expressões  $V_C(t)$  e de  $I_C(t)$ , em resposta a uma onda quadrada, ficam:

$$V_C(t) = \begin{cases} 1 - 2e^{(-10kt)} & : KT \leq t < (2K+1)T/2 \\ -1 + 2e^{(-10kt)} & : (2K+1)T/2 \leq t^* \leq (K+1)T, \end{cases} \quad (8)$$

$$I_C(t) = \begin{cases} 0,02e^{(-10kt)} & : KT \leq t < (2K+1)T/2 \\ -0,02e^{(-10kt)} & : (2K+1)T/2 \leq t^* \leq (K+1)T, \end{cases} \quad (9)$$

com  $K = 0, 1, 2, \dots, n$  p/  $\forall t \in t^* = t - \frac{(2K+1)T}{2}$ .

A Fig. 8 exibe a resposta de  $V_C(t)$  e de  $I_C(t)$  a uma onda quadrada. Estes gráficos foram gerados com o auxílio do Micro-Cap.

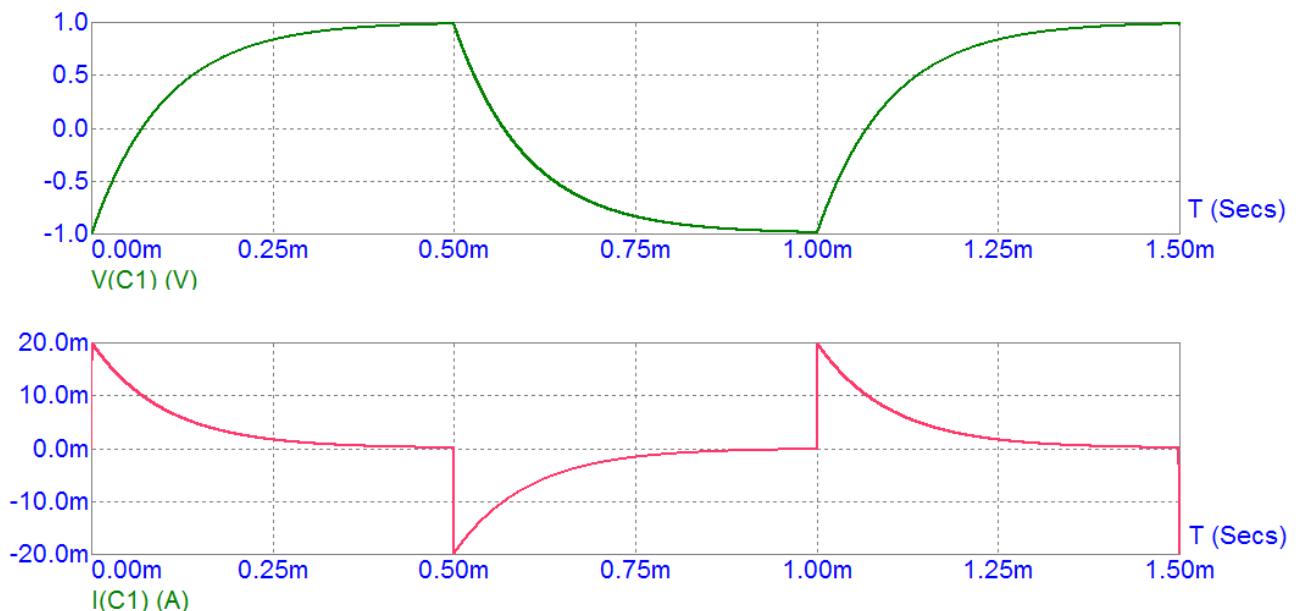


Figura 8: Gráficos de  $V_C(t)$  e  $I_C(t)$ .

Quando  $T/2 > 5\tau$ , ou seja, quando  $T > 10\tau$ , o capacitor se carrega totalmente antes de  $t = T/2$ . Observe que  $I_C(t)$  não passa de uma série de picos muito estreitos.

## Resposta de Circuitos RL a Onda Quadrada

A resposta de um circuito RL série, como visto na Fig. 9, a uma onda quadrada de amplitude  $V_{PP}$  será analisada a seguir.

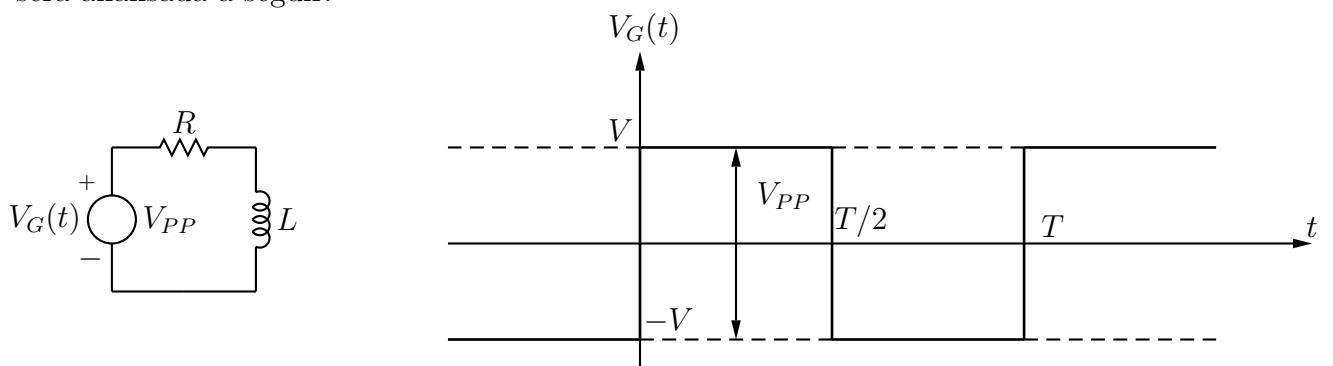


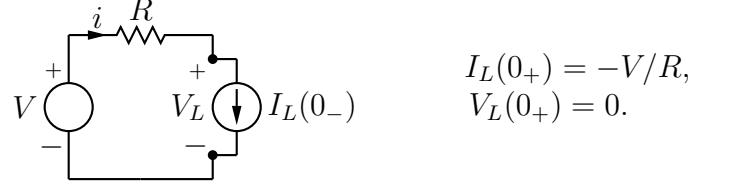
Figura 9: Circuito RL série e onda quadrada.

As condições iniciais de tensão e corrente dos componentes são obtidas a seguir.

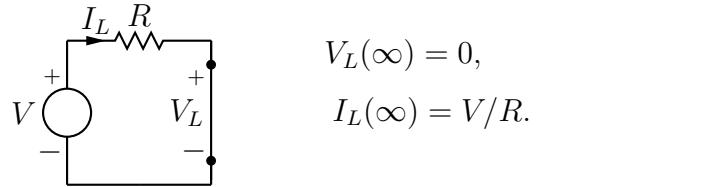
- para  $t \leq 0_-$  ( $t \rightarrow -\infty$ ):



- para  $t = 0_+$ :



- para  $t > 0_+$  ( $t \rightarrow \infty$ ):



Redezenhando o circuito, como visto na Fig. 10, pode-se obter a expressão de  $I_L(t)$  para  $0 < t < T/2$  a partir da equação diferencial do circuito:

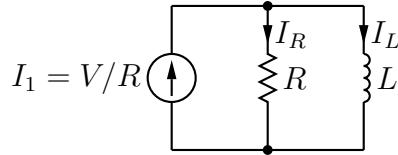


Figura 10: Circuito RL série modificado.

$$\begin{aligned}
 \frac{V_L}{I_L} &= \frac{V_R}{I_R} \\
 \frac{L \partial I_L}{\partial t} &= (I_1 - I_L)R \\
 \frac{R}{L} \partial t &= \frac{\partial I_L}{I_L - I_1} \\
 - \int_0^t \frac{R}{L} \partial \tau &= \int_{I_L(0)}^{I_L(t)} \frac{\partial I_L}{I_L - I_1} \\
 -t \frac{R}{L} &= \ln \left| \frac{I_L(t) - I_1}{I_L(0) - I_1} \right| \\
 e^{\left( \frac{-Rt}{L} \right)} &= \frac{|I_L(t) - I_1|}{|I_L(0) - I_1|} \\
 I_L(t) &= I_1 + (I_L(0) - I_1) e^{\left( \frac{-Rt}{L} \right)} \\
 I_L(t) &= \frac{V}{R} + \left( -\frac{V}{R} - \frac{V}{R} \right) e^{\left( \frac{-Rt}{L} \right)} \\
 I_L(t) &= \frac{V}{R} \left( 1 - 2e^{\left( \frac{-Rt}{L} \right)} \right).
 \end{aligned} \tag{10}$$

Determina-se agora, a expressão de  $V_L(t)$  para  $0 < t < T/2$ :

$$\begin{aligned}
 V_L(t) &= L \frac{\partial I_L}{\partial t} \\
 V_L(t) &= L \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{V}{R} - \frac{2V}{R} e^{\left(\frac{-Rt}{L}\right)} \right] \\
 V_L(t) &= L \left[ 0 - \frac{2V}{R} \left(\frac{-R}{L}\right) e^{\left(\frac{-Rt}{L}\right)} \right] \\
 V_L(t) &= 2Ve^{\left(\frac{-Rt}{L}\right)}. \tag{11}
 \end{aligned}$$

As expressões completas de  $V_L(t)$  e de  $I_L(t)$  para  $\forall t$  são dadas a seguir.

$$V_L(t) = \begin{cases} 2Ve^{\left(\frac{-Rt}{L}\right)} & : KT \leq t < (2K+1)T/2 \\ -2Ve^{\left(\frac{-Rt}{L}\right)} & : (2K+1)T/2 \leq t^* \leq (K+1)T, \end{cases} \tag{12}$$

e

$$I_L(t) = \begin{cases} \frac{V}{R} \left( 1 - 2e^{\left(\frac{-Rt}{L}\right)} \right) & : KT \leq t < (2K+1)T/2 \\ -\frac{V}{R} \left( 1 - 2e^{\left(\frac{-Rt}{L}\right)} \right) & : (2K+1)T/2 \leq t^* \leq (K+1)T, \end{cases} \tag{13}$$

com  $K = 0, 1, 2, \dots, n$  p/  $\forall t$  e  $t^* = t - \frac{(2K+1)T}{2}$ .

**Exemplo 3.** Considerando  $R = 100$ ,  $V = 1$  e  $L = 1m$  ( $T \cong 10R/L$ ), a Fig. 11 exibe a resposta,  $V_L(t)$  e  $I_L(t)$ , do circuito RL série para  $\forall t$  a uma onda quadrada. Estes gráficos foram gerados com o auxílio do Micro-Cap.

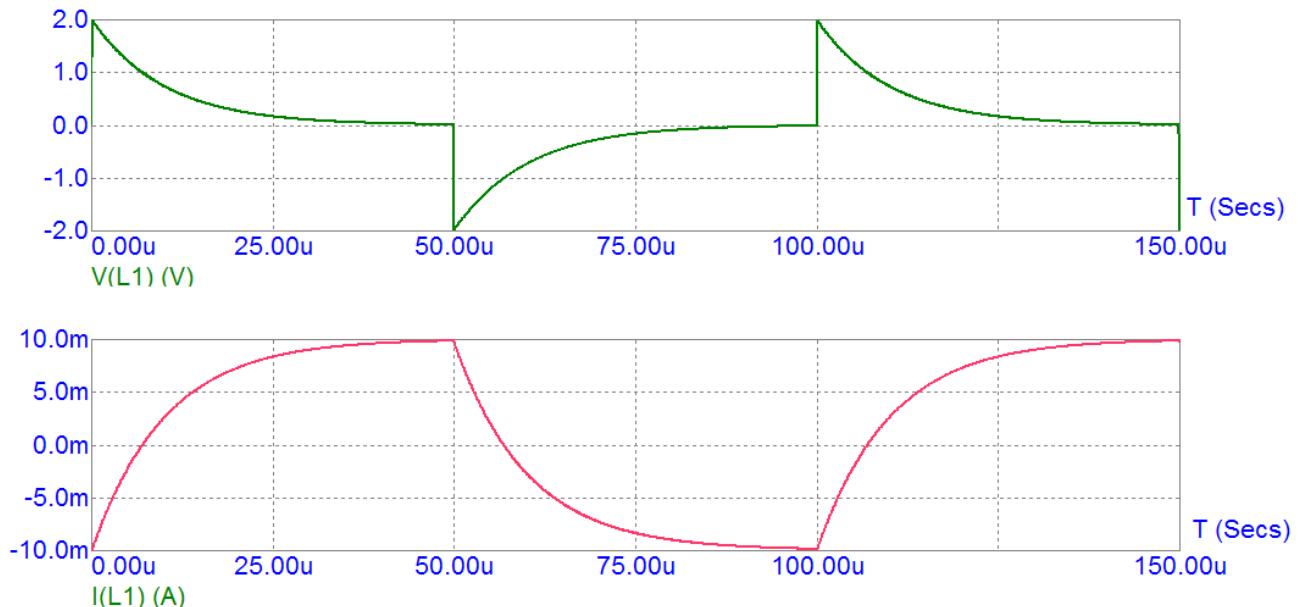


Figura 11: Gráficos de  $V_L(t)$  e  $I_L(t)$ .

## Resistência Interna das Fontes de Tensão

Toda fonte de tensão, seja ela um gerador, uma bateria ou uma fonte de alimentação para experiências de laboratório possui uma resistência interna. O circuito equivalente da fonte de tensão é então parecido com o visto na Fig 12.

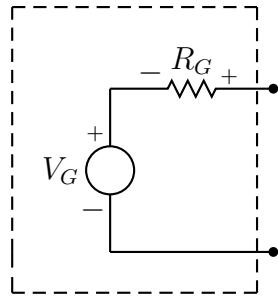


Figura 12: Circuito equivalente de uma fonte de tensão.

Quando uma carga é ligada à fonte, a tensão de saída da fonte diminui devido à queda de tensão na resistência interna.

## Aterramento

A importância da ligação à terra e o modo como ela pode ser usada para tornar os circuitos mais seguros são tópicos de grande importância para os estudantes de engenharia elétrica. Em qualquer ponto no esquema de um circuito onde haja um símbolo de ligação ao solo, o potencial deve ser considerado igual a 0 V.

Existem vários tipos de ligação à terra, dependendo da aplicação particular. O *aterramento por ligação ao solo* consiste em ligar um circuito diretamente ao solo através de um condutor de baixa impedância.

Um segundo tipo de aterrramento é a denominada *terra do chassis*, que pode ser flutuante ou ligada diretamente ao solo. O nome terra do chassis significa que os potenciais de todos os pontos do circuito são medidos em relação ao potencial do chassis. Se este não estiver ligado ao solo (0 V), diz-se que é flutuante e pode-se associar a ele qualquer valor de tensão para ser usado como referência.

O aterramento pode ser particularmente importante nos laboratórios onde são usados vários instrumentos de medida. A fonte de tensão e o osciloscópio da Fig. 13 (a), por exemplo, estão conectados à terra através dos seus terminais negativos.

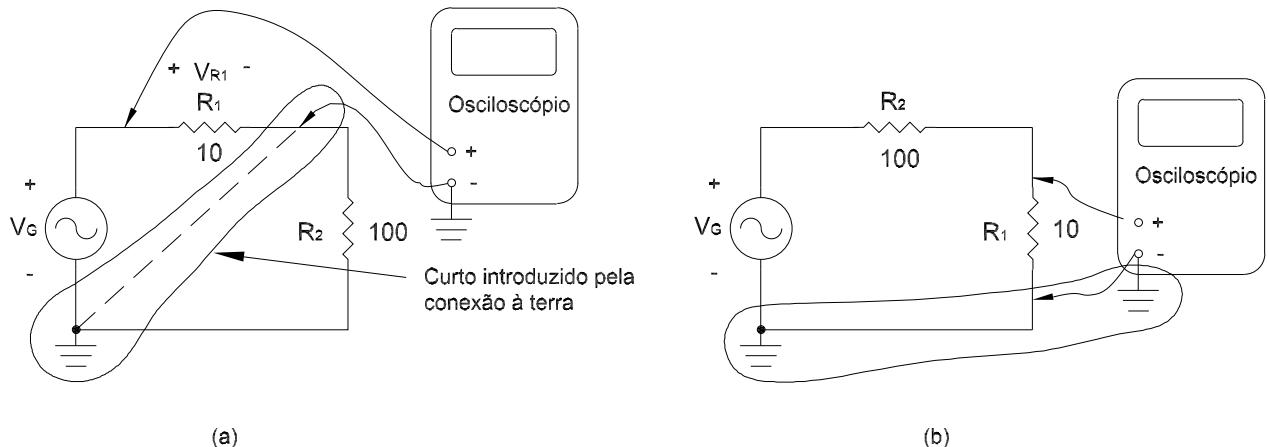


Figura 13: Ilustração do efeito da terra de um osciloscópio sobre a medida da ddp entre os terminais de um resistor.

Se para medir a voltagem  $V_{R1}$  efetuar-se as ligações como ilustrado na Fig. 13 (a), estar-se-á criando uma situação de risco. Os terminais negativos dos dois equipamentos estão ligados entre si através da terra, o que faz com que haja um curto-círcuito em paralelo com o resistor  $R_2$ . Como é o resistor  $R_2$  que limita a corrente do circuito, está poderá atingir valores elevados, capazes de danificar o osciloscópio ou de produzir outros efeitos perigosos. Deve-se, neste caso, recorrer ao aterramento flutuante ou intercambiar os resistores, como na Fig. 13 (b). Na configuração da Fig. 13 (b), as terras estão, ligadas juntas e o circuito não é afetado pela introdução do osciloscópio.