Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Escola de Engenharia de Porto Alegre
Departamento de Engenharia Elétrica
ANÁLISE DE CIRCUITOS II - ENG04031

Aula 7 - Resposta no Domínio Tempo de Circuitos RLC Série

Sumário

- Solução de circuitos de 2ª ordem;
- Operador Diferencial;
- Resposta de circuitos RLC série a onda quadrada.

Solução de Circuitos de 2ª Ordem

Nesta aula, a análise de circuitos com indutores e capacitores se limitará aos circuitos RLC ligados em paralelo e, em especial, ligados em série como visto na Fig. 1.

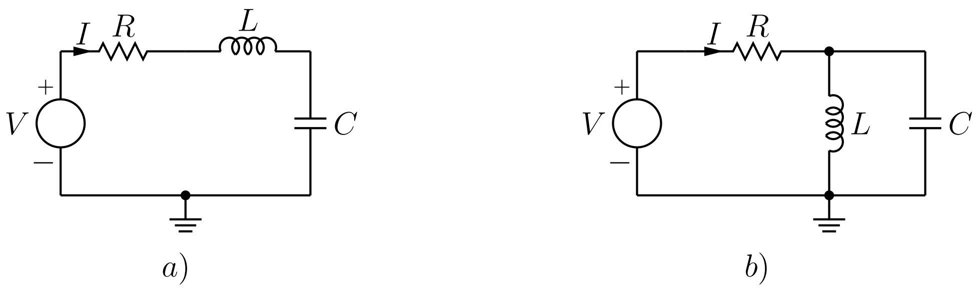


Figura 1: Circuitos RLC: a) série e b) paralelo.

Para determinar a resposta dos circuitos RLC é necessário encontrar a equação diferencial para a tensão ou corrente. Essa equação diferencial apresenta um termo envolvendo a segunda derivada; ou seja, é uma equação ordinária linear de segunda ordem com coeficientes constantes. Por essa razão, os circuitos RLC também são conhecidos como circuitos de segunda ordem.

É apresentado a seguir, um roteiro para se obter a solução de circuitos de segunda ordem.

1. Tentar associar elementos até obter um circuito RLC série ou RLC paralelo. Aplicar a lei de Ohm e as leis de Kirchhoff até encontrar uma equação diferencial do tipo:

$$\frac{\partial^2 f(t)}{\partial t^2} + 2\alpha\frac{\partial f(t)}{\partial t} + {\omega_0}^2 f(t) = g(t). \tag{1}$$

A Eq. (1) é conhecida como equação característica dos circuitos RLC em série e em paralelo, α é a frequência de Neper, ω_0 a frequência angular de ressonância, $g(t)$ representa algum tipo de sinal aplicado ao circuito e $f(t)$ a variável de tensão ou corrente em questão.

Caso não seja possível associar os elementos até obter um circuito RLC série ou paralelo, desenvolver até obter uma equação diferencial de segunda ordem, como visto na Eq. (1).

Obs.: o circuito LC é um caso particular.

2. Determinar a frequência de Neper (α) e a frequência angular de ressonância (ω_0) para cada caso:

- RLC Série: $\alpha = R/2L$;
- RLC Paralelo: $\alpha = 1/2RC$;
- RLC Série ou Paralelo: $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$.

Todas essas frequências têm a dimensão de frequência angular, cuja unidade é o radiano por segundo (rad/s). A solução da Eq. (1), equação característica, é a seguinte:

$$f(t) = f_N(t) + f_F(t), \tag{2}$$

onde: $f_N(t)$ é a resposta natural e $f_F(t)$ a resposta forçada.

A resposta natural (impulsiva, transitória), $f_N(t)$, são as correntes e tensões que existem quando a energia armazenada é liberada em um circuito que não contém fontes independentes. Já a resposta forçada (permanente), $f_F(t)$, são as correntes e tensões que resultam de mudanças abruptas das fontes de tensão e correntes ligadas ao circuito.

3. Determinar a resposta natural. Dependendo dos valores de α e ω_0, existem três possibilidades:

- $\alpha > \omega \rightarrow$ o circuito apresenta um comportamento hiper-amortecido (sobreamortecido):

$$\begin{aligned} f_N(t) &= A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}; \\ p_{1,2} &= -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega^2}; \end{aligned} \tag{3}$$

  onde: p_1 e p_2 são as raízes da equação característica e A_1 e A_2 são constantes. Nos circuitos sobreamortecidos, a resposta tende ao valor de regime permanente mais devagar, sem passar por oscilações.

- $\alpha = \omega \rightarrow$ o circuito apresenta um comportamento criticamente amortecido:

$$f_N(t) = (A_1 + A_2 t)\, e^{-\alpha t}. \tag{4}$$

  Trata-se da situação em que o estado final (regime permanente) é atingido o mais rapidamente possível sem que o sistema oscile.

- $\alpha < \omega \rightarrow$ o circuito apresenta um comportamento hipo-amortecido (subamortecido).

$$\begin{aligned} f_N(t) &= \Big[A_1 \cos(\omega_d\, t) + A_2 \sin(\omega_d\, t)\Big] e^{-\alpha t}; \\ \omega_d &= \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}. \end{aligned} \tag{5}$$

  O parâmetro ω_d é denominado frequência angular amortecida. Nos circuitos subamortecidos, a resposta oscila em torno do valor de regime permanente. Os termos hiper, hipo ou criticamente amortecido descrevem o efeito do elemento dissipativo, resistor, sobre a resposta. Já o valor da frequência de Neper, α, reflete o efeito do resistor.

4. Determinar a resposta forçada.

- Caso a excitação seja constante para $t \geq 0_+$, a solução particular pode ser obtida no próprio circuito fazendo $t = \infty \rightarrow f_F(t) = f_F(\infty)$.

- Caso a excitação não seja constante:

  a) é necessário escrever a equação diferencial.

  b) usar a seguinte tabela de funções candidatas:

$g(t)$	$f_F(t)$
$K\,t$	$C_1 t + C_0$
$K\,t^n$	$C_n t^n + \ldots + C_1 t + C_0$
$K\,e^{-at}$	$C_0 e^{-at}$

  onde: $g(t)$ é a função (sinal) que forçará uma resposta do sistema, $f_F(t)$ o modelo de resposta forçada e K, C_0, C_1, …, C_n são constantes.

  c) Substituir $f_F(t)$ na equação diferencial e com isto determinar as constantes C_0, C_1, …, C_n da solução particular.

- Muitas vezes, quando a excitação é uma rampa, ela pode ser transformada (em conjunto com um L ou C) de modo a obter uma excitação constante, como visto na Fig. 2 e Fig. 3.

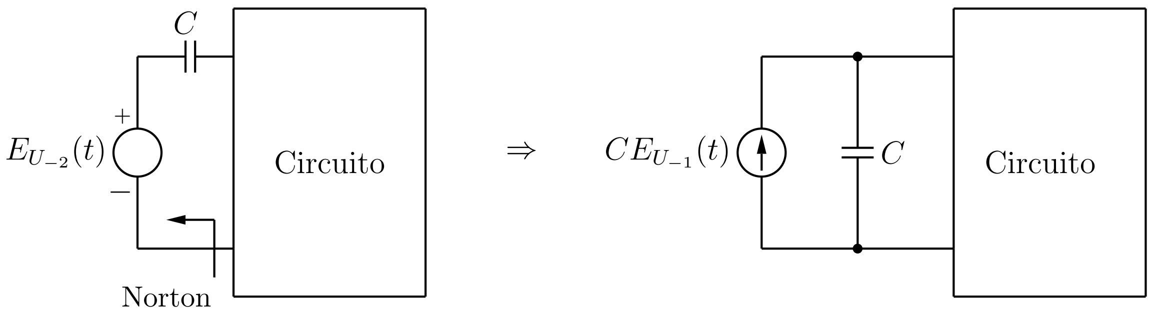


Figura 2: Circuito com rampa e capacitor.

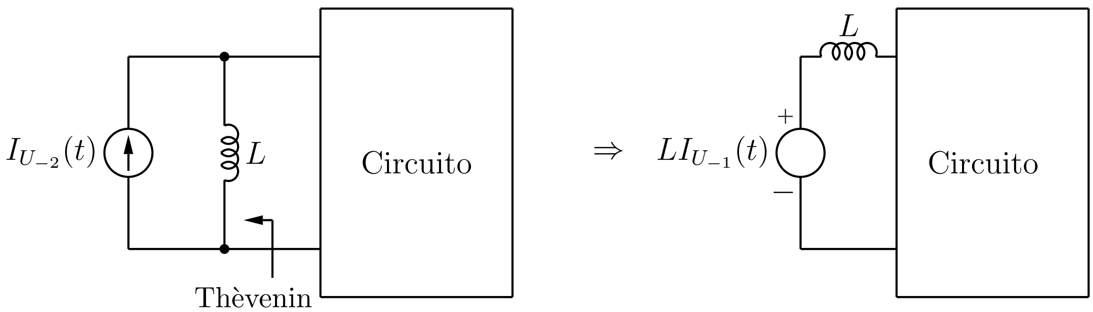


Figura 3: Circuito com rampa e indutor.

5. Obter $f(0_+)$, $f(\acute{0}_+)$, $f_F(0_+)$ e $f_F(\acute{0}_+)$ usando métodos de análise de circuitos. Determinar então, as constantes A_1 e A_2 da solução complementar, resolvendo o sistema de equações visto na Eq. (6), Eq. (7) e Eq. (8) para cada caso.

$$\bullet\, \alpha > \omega_0 \rightarrow \begin{cases} f(0_+) = A_1 + A_2 + f_F(0_+); \\ f(\acute{0}_+) = p_1 A_1 + p_2 A_2 + f_F(\acute{0}_+). \end{cases} \tag{6}$$

$$\bullet\, \alpha = \omega_0 \rightarrow \begin{cases} f(0_+) = A_1 + f_F(0_+); \\ f(\acute{0}_+) = -\alpha A_1 + A_2 + f_F(\acute{0}_+). \end{cases} \tag{7}$$

$$\bullet\, \alpha < \omega_0 \rightarrow \begin{cases} f(0_+) = A_1 + f_F(0_+); \\ f(\acute{0}_+) = -\alpha A_1 + \omega_d A_2 + f_F(\acute{0}_+). \end{cases} \tag{8}$$

6. Escrever a resposta completa. A Eq. (8) exibe a resposta completa para cada situação.

$$\begin{aligned}
&\bullet\, \alpha > \omega_0 \rightarrow f(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + f_F(t);\\
&\bullet\, \alpha = \omega_0 \rightarrow f(t) = \Big(A_1 + A_2\, t\Big) e^{-\alpha t} + f_F(t);\\
&\bullet\, \alpha < \omega_0 \rightarrow f(t) = \Big[A_1 \cos(w_d\, t) + A_2 \sin(w_d\, t)\Big] e^{-\alpha t} + f_F(t).
\end{aligned} \tag{9}$$

Obs.: caso $f_F(t) = Ke^{bt} \Rightarrow b \neq p_1$, $b \neq p_2$ e $b \neq -\alpha$.

Operador Diferencial

O operador Diferencial, D, é usado na solução de equações diferenciais.

$$\begin{aligned}
Dg(t) &= \frac{\partial g(t)}{\partial t} = \frac{1}{\partial t}\int_0^t f(t)\partial t = f(t);\\
D^{-1} f(t) &= \int_0^t f(t)\partial t = g(t).
\end{aligned} \tag{10}$$

Propriedades:

$$D^{-1} f(t) = \frac{f(t)}{D}; \tag{11a}$$

$$DD^{-1} f(t) = f(t); \tag{11b}$$

$$D^2 f(t) = \frac{\partial^2 f(t)}{\partial t^2}; \tag{11c}$$

$$D[f_1(t) + f_2(t)] = Df_1(t) + Df_2(t). \tag{11d}$$

Aplicando o operador D em circuitos com capacitores:

$$I_C = C\frac{\partial V_C}{\partial t} = CDV_C; \tag{12a}$$

$$V_C = \frac{1}{C}\int I_C \partial t = \frac{I_C}{CD}. \tag{12b}$$

Aplicando o operador D em circuitos com indutores:

$$V_L = L\frac{\partial I_L}{\partial t} = LDI_L; \tag{13a}$$

$$I_L = \frac{1}{L}\int V_L \partial t = \frac{V_L}{LD}. \tag{13b}$$

Exemplo 1. O circuito visto na Fig. 4, estava em regime permanente para $t = 0_-$. Determine a equação característica de $i_3(t)$, utilizando o operador D. Dado: $V(t) = 8\, t^2\, U_{-1} + 20$.

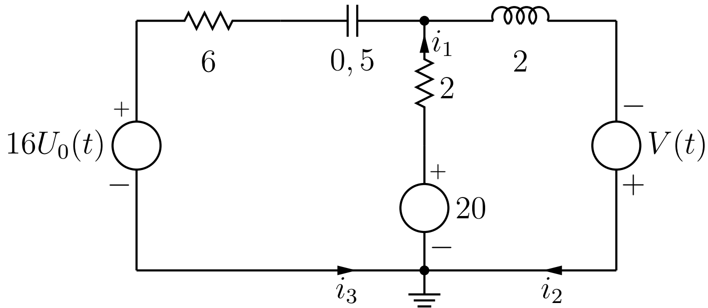


Figura 4: Circuito do Exemplo 1.

Solução: aplicando a lei de Kirchhoff das tensões na primeira malha, obtém-se:

$$\begin{aligned}
-6i_3 - \frac{i_3}{0,5D} - 2i_1 + 20 = 0\\
-6Di_3 - 2i_3 - 2Di_1 = 0\\
i_1 = -3i_3 - \frac{i_3}{D}.
\end{aligned} \tag{14}$$

Agora na segunda malha:

$$\begin{aligned} -20 + 2i_1 + 2Di_2 - V(t) &= 0 \\ 2i_1 + 2Di_2 &= 8t^2 + 40 \\ i_2 &= \frac{4t^2}{D} + \frac{40}{D} - \frac{i_1}{D}. \end{aligned} \tag{15}$$

Aplicando a lei de Kirchhoff das correntes, temos:

$$i_3 + i_2 - i_1 = 0. \tag{16}$$

Substituindo, as Eqs. (14) e (15) na Eq. (16), obtém-se a equação característica:

$$\begin{aligned} i_3 + \frac{4t^2}{D} + \frac{40}{D} + \frac{3i_3}{D} + \frac{i_3}{D^2} + 3i_3 + \frac{i_3}{D} &= 0 \\ D^2 i_3 + D4t^2 - D40 + 3Di_3 + i_3 + 3D^2 i_3 + Di_3 &= 0 \\ \left(4D^2 + 4D + 1\right) i_3 &= -8t. \end{aligned} \tag{17}$$

Resposta de Circuitos RLC Série a Onda Quadrada

A resposta de um circuito RLC série a uma onda quadrada de amplitude V_{PP} , como visto na Fig. 5, será descrita a seguir.

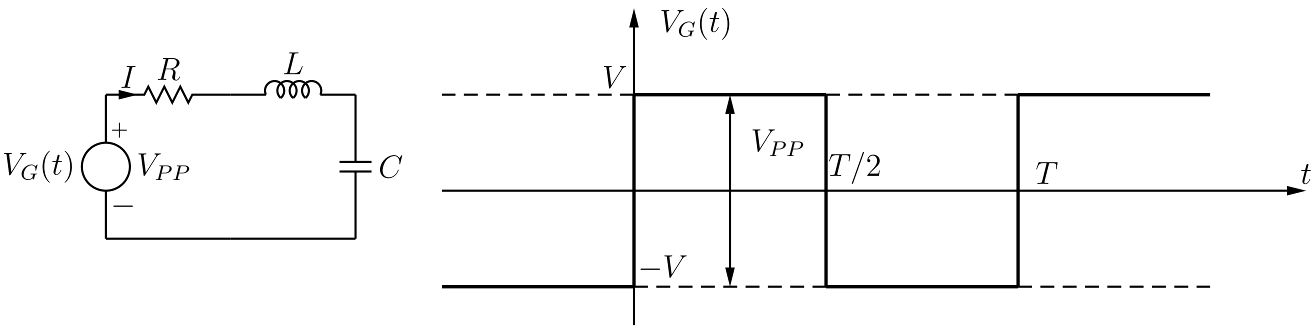
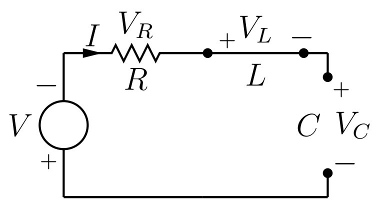


Figura 5: Circuito RLC série e onda quadrada.

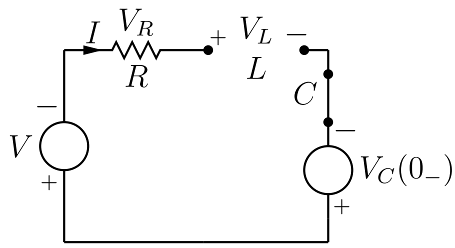
Inicialmente, deve-se obter as condições iniciais e finais de tensão e corrente dos componentes do circuito RLC:

- para $t \leq 0_-$ $(t \rightarrow -\infty)$:



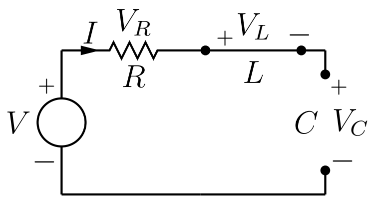
$$\begin{aligned} I(0_-) &= 0, \\ V_R(0_-) &= 0, \\ V_L(0_-) &= 0, \\ V_C(0_-) &= -V. \end{aligned}$$

- para $t = 0_+$:



$$\begin{aligned} I(0_+) &= 0, \\ V_R(0_+) &= 0, \\ V_L(0_+) &= V - V_C(0_-) = 2V, \\ \frac{\partial I_L(0_+)}{\partial t} &= \frac{V_L}{L} = \frac{2V}{L}, \\ \frac{\partial V_C(0_+)}{\partial t} &= \frac{I_C}{C} = 0. \end{aligned}$$

- para $t \geq 0\,(t \to +\infty)$:



$$I(+\infty) = 0,$$
$$V_R(+\infty) = 0,$$
$$V_L(+\infty) = 0,$$
$$V_C(+\infty) = V.$$

Determina-se o modelo de resposta forçada; neste caso, constante e igual a V e $-V$, para cada intervalo de tempo igual a T/2. Avalia-se então, o comportamento do circuito: hipo, hiper ou criticamente amortecido através do cálculo de α e ω_0.

Por exemplo, obtendo $I_L(t)$ para um circuito RLC série hiper-amortecido (para $0 < t < T/2$):

$$Geral \begin{cases} I_L(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + I_L(\infty), \\ I_L(0_+) = A_1 + A_2 + I_L(\infty), \\ I_L(\acute{0}_+) = p_1 A_1 + p_2 A_2. \end{cases} \tag{18}$$

Determina-se, então, as constantes A_1 e A_2 da solução complementar, resolvendo o sistema de equações visto na Eq. (19).

$$\begin{cases} 0 = A_1 + A_2 + 0, \\ \dfrac{2V}{L} = p_1 A_1 + p_2 A_2. \end{cases} \tag{19}$$

Assim, a corrente $I_L(t)$ é:

$$I_L(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}. \tag{20}$$

A expressão completa de $I_L(t)$ para $\forall\, t$ é a seguinte:

$$I_L(t) = \begin{cases} A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} & : \quad KT \leq t < (2K+1)T/2, \\ -A_1 e^{p_1 t} - A_2 e^{p_2 t} & : \quad (2K+1)T/2 \leq t^* \leq (K+1)T, \end{cases} \tag{21}$$

com $K = 0,\, 1,\, 2, \ldots,\, n$ para $\forall\, t$ e $t^* = t - \frac{(2K+1)T}{2}$.

Exemplo 2. A Fig. 6 exibe a resposta de $I_L(t)$ de um circuito RLC série a uma onda quadrada considerando $L = 1m$, $C = 1\mu$, $R = 25$, 65 e 150 ($T \cong 30/\omega_0$). Estes gráficos foram gerados com o auxílio do Micro-Cap.

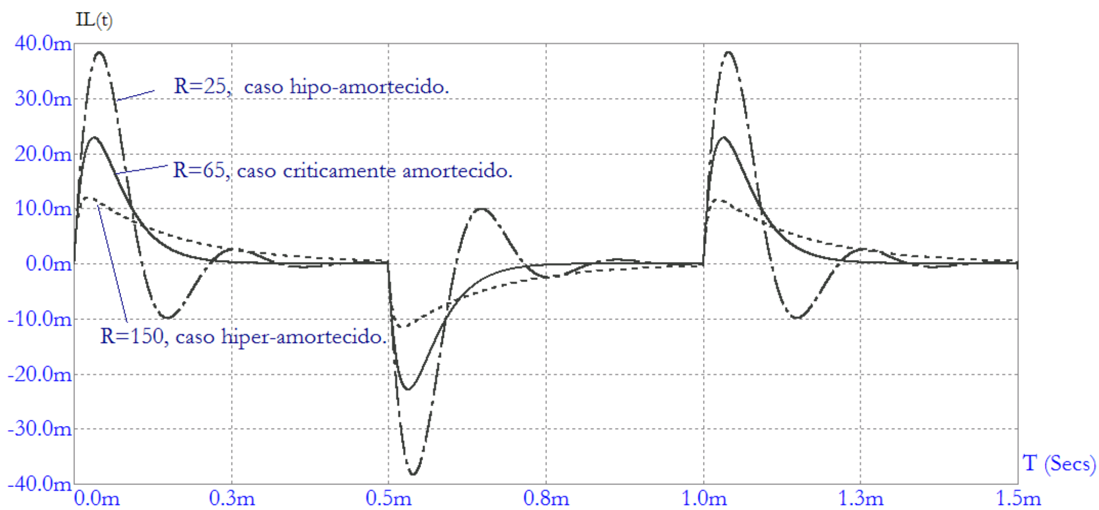


Figura 6: Gráficos de $I_L(t)$.

Observa-se que quanto menor o valor de R, mais oscilatória fica a resposta de $I_L(t)$.