

Aula 9 - Análise de Circuitos Via Espaço de Estados (I)

Sumário

- Espaço de estados;
- Autovetores e autovalores;
- Solução de circuitos via espaço de estados;
- Matrizes e vetores no Matlab;
- Métodos de integração numérica;
- Método de Euler e aspectos numéricos.

Espaço de Estados

Circuitos lineares podem ser descritos por equações diferenciais lineares. Para um circuito com diversos indutores e capacitores, usualmente tem-se uma equação diferencial de orden n. Através de substituições de variáveis, essa equação diferencial pode ser escrita como um conjunto de n equações diferenciais de primeira ordem. Pode-se então, a seguir, escrever esse conjunto de equações na forma matricial, obtendo-se uma descrição para o circuito na forma das expressões (1a) e (1b):

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u} \quad (1a)$$

$$\mathbf{y} = C\mathbf{x} + D\mathbf{u}. \quad (1b)$$

onde:

- \mathbf{x} é o vetor de estados;
- \mathbf{y} é um vetor representando a saída (variáveis de interesse) do circuito;
- \mathbf{u} é um vetor representando as entradas (fontes) aplicadas ao circuito;
- A, B, C e D são matrizes formadas pelos parâmetros do circuito.

Nota: a expressão (1a) determina a evolução temporal do sistema e a expressão (1b) é apenas um mapeamento do estado e da entrada para as variáveis de saída. Essas expressões podem ser utilizadas para obter-se a resposta do sistema através de iterações em um computador, utilizando algum método de integração para isso, como será visto a seguir.

Explicitando os termos de (1a) e (1b), têm-se ¹:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \quad (2)$$

¹Considerando somente uma variável de entrada.

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

onde: n é o número de variáveis de estado e m o número de variáveis de saída.

Autovalores e Autovetores

Dado uma matriz A de dimensão $n \times n$, a definição dos autovalores é a seguinte: $\lambda \in \mathbb{C}$ (onde \mathbb{C} é o conjunto dos números complexos) é um autovalor de A se existir um vetor \mathbf{h} tal que:

$$A\mathbf{h} = \lambda\mathbf{h}, \quad (4)$$

onde: \mathbf{h} é um vetor qualquer ($\mathbf{h} \neq 0$) e λ um conjunto de autovalores. Neste caso, diz-se que \mathbf{h} é um autovetor de A associado ao autovalor λ .

Desenvolvendo a Eq. (4):

$$\begin{aligned} A\mathbf{h} - \lambda\mathbf{h} &= 0 \\ A\mathbf{h} - \lambda I\mathbf{h} &= 0 \\ (A - \lambda I)\mathbf{h} &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

onde: I é a matriz identidade.

Supondo:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad (6)$$

o sistema de equações lineares tem solução se o determinante de $(A - \lambda I)$ for nulo, isto é:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= 0 \\ \det \left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right) &= 0 \\ \det \left(\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{bmatrix} \right) &= 0 \\ \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} &= 0 \\ (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - (a_{21})(a_{12}) &= 0 \\ \lambda^2 + \lambda(-a_{11} - a_{22}) + (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) &= P(\lambda) = 0 \rightarrow \lambda_1 \text{ e } \lambda_2. \end{aligned} \quad (7)$$

O polinômio, $P(\lambda)$, visto na Eq. (7) é conhecido como polinômio característico. Desse polinômio, obtém-se os autovalores λ_1 e λ_2 .

Exemplo 1. Considerando A:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \\ \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 3 - \lambda & -1 & 1 \\ -1 & 5 - \lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \\ (3 - \lambda) \begin{vmatrix} 5 - \lambda & -1 \\ -1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} + (1) \begin{vmatrix} -1 & 5 - \lambda \\ 1 & -1 \end{vmatrix} &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned}
(3 - \lambda)(15 - 8\lambda + \lambda^2 - 1) + 1(\lambda - 3 + 1) + 1(1 - 5 + \lambda) &= 0 \\
-\lambda^3 + 11\lambda^2 - 36\lambda + 36 &= 0 \\
\lambda^3 - 11\lambda^2 + 36\lambda - 36 &= 0 \\
\downarrow \\
\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 6 \text{ (autovalores).}
\end{aligned} \tag{9}$$

Determinação dos Autovetores

Dada uma matriz $A[n \times n]$, temos n autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$. Para cada autovalor tem-se um autovetor associado:

$$\begin{aligned}
(A - \lambda_1 I)h_1 &= \rightarrow \text{obtém - se } h_1 \\
(A - \lambda_2 I)h_2 &= \rightarrow \text{obtém - se } h_2 \\
&\vdots = \vdots \\
(A - \lambda_n I)h_n &= \rightarrow \text{obtém - se } h_n.
\end{aligned} \tag{10}$$

Exemplo 2. Sendo A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \tag{11}$$

Os autovalores de A são:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= i, \\
\lambda_2 &= -i.
\end{aligned} \tag{12}$$

Já, os autovetores de A:

$$h_1 = \begin{bmatrix} h_{11} \\ h_{12} \end{bmatrix} \tag{13a}$$

$$h_2 = \begin{bmatrix} h_{21} \\ h_{22} \end{bmatrix} \tag{13b}$$

Determinando, primeiro, o autovetor h_1 associado ao autovalor λ_1 :

$$\begin{aligned}
(A - \lambda_1 I)h_1 &= 0 \\
\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} - i \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} h_{11} \\ h_{12} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 1-i & -1 \\ 2 & -1-i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{11} \\ h_{12} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{14}$$

Resolvendo o sistema, obtém-se:

$$h_{12} = (1 - i)h_{11}. \tag{15}$$

Arbitrando $h_{11} = 1$:

$$h_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1-i \end{bmatrix} \tag{16}$$

Determinando o autovetor h_2 associado ao autovalor λ_2 :

$$\begin{aligned}
(A - \lambda_2 I)h_2 &= 0 \\
\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} h_{21} \\ h_{22} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{bmatrix} 1+i & -1 \\ 2 & -1+i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{21} \\ h_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

Resolvendo o sistema, obtém-se:

$$\begin{aligned} h_{22} &= \frac{2}{(1-i)} h_{21} \frac{1+i}{1-i} \\ h_{22} &= (1+i) h_{21}. \end{aligned} \quad (19)$$

Arbitrando $h_{21} = 1$, adquire-se:

$$h_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ i+1 \end{bmatrix} \quad (20)$$

Solução de Circuitos Via Espaço de Estados

São apresentados a seguir, uma série de procedimentos úteis que devem ser realizados para obter-se a solução de circuitos através de espaço de estados:

- Levantar as equações diferenciais do circuito.
- Montar o sistema de equações visto na Eq. (21a) e (21b)²:

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u} \quad (21a)$$

$$\mathbf{y} = C\mathbf{x} + D\mathbf{u} \quad (21b)$$

- Calcular os autovalores e autovetores:

$$\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}, \quad h_1 = \begin{bmatrix} h_{11} \\ h_{12} \\ \vdots \\ h_{1n} \end{bmatrix}, \quad h_2 = \begin{bmatrix} h_{21} \\ h_{22} \\ \vdots \\ h_{2n} \end{bmatrix}, \dots, \quad h_n = \begin{bmatrix} h_{n1} \\ h_{n2} \\ \vdots \\ h_{nn} \end{bmatrix} \quad (22)$$

- Determinar a $R_T = R_N + R_F$, onde: R_T , R_N e R_F são, respectivamente, a resposta total, natural e forçada, onde:

$$R_F = \begin{bmatrix} R_{F1} \\ R_{F2} \\ \vdots \\ R_{Fn} \end{bmatrix} \quad (23)$$

Substitui-se R_F na matriz de estados, Eq. (21a), + condições iniciais, assim:

$$\dot{\mathbf{R}}_F = A\mathbf{R}_F + B\mathbf{u}. \quad (24)$$

Por exemplo, supondo $R_F \Leftrightarrow K$ (constante), $\rightarrow \dot{R}_F = 0$, obtém-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= A\mathbf{R}_F + B\mathbf{u} \\ A\mathbf{R}_F &= -B\mathbf{u} \\ A^{-1}A\mathbf{R}_F &= -A^{-1}B\mathbf{u} \\ R_F &= -A^{-1}B\mathbf{u}. \end{aligned} \quad (25)$$

²O sistema possui solução se a inversa de $A = A^{-1}$ existir. A é inversível se o $\det(A) \neq 0$. Caso contrário, o sistema não possui uma solução única (infinitas soluções).

Ainda, a resposta natural é:

$$\mathbf{R}_N = \sum_{k=1}^n C_k e^{\lambda_k t} h_k. \quad (26)$$

Substituir os autovalores, autovetores e a R_F na Eq. (26) e obter as constantes C_1, C_2, \dots, C_n .

$$C_n e^{\lambda_n 0} h_n + C_{n-1} e^{\lambda_{n-1} 0} h_{n-1} + \dots + R_F = 0. \quad (27)$$

- Escrever a resposta total.

$$R_T(t) = C_n e^{\lambda_n t} h_n + C_{n-1} e^{\lambda_{n-1} t} h_{n-1} + \dots + C_1 e^{\lambda_1 t} h_1 + R_F. \quad (28)$$

No caso dos autovalores, autovetores ou constantes $(C_n, C_{n-1}, \dots, C_1)$ serem números complexos, deve-se fazer uso de algumas relações matemáticas e/ou identidades trigonométricas (identidade de Euler, $e^{j\phi} = \cos(\phi) + j\sin(\phi)$, ou $e^{(a\pm jb)} = e^a e^{\pm jb}$, por exemplo) para obter-se uma resposta que envolva apenas termos reais, como visto a seguir.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = (C_{1R} + jC_{1I}) e^{(\lambda_{1R} + j\lambda_{1I})} \begin{bmatrix} h_{11R} + j h_{11I} \\ h_{12R} + j h_{12I} \end{bmatrix} + (C_{2R} + jC_{2I}) e^{(\lambda_{2R} + j\lambda_{2I})} \begin{bmatrix} h_{21R} + j h_{21I} \\ h_{22R} + j h_{22I} \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 \cos(K_2 t) e^{K_3 t} + K_4 \sin(K_5 t) e^{K_6 t} \\ K_7 \cos(K_8 t) e^{K_9 t} + K_{10} \sin(K_{11} t) e^{K_{12} t} \end{bmatrix} \quad (29)$$

onde: K_1, K_2, \dots, K_{12} são termos reais e constantes.

Matrizes e Vetores no Matlab

Definindo l o número de linhas e c o número de colunas, escreve-se a matriz $M[l \times c]$ no Matlab da seguinte forma:

$$M(l, c) = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & \dots & M_{1c} \\ M_{21} & M_{22} & \dots & M_{2c} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ M_{l1} & M_{l2} & \dots & M_{lc} \end{bmatrix} \quad (30)$$

Um vetor linha é definido do seguinte modo:

$$V(1, c) = \begin{bmatrix} V_1 & V_2 & \dots & V_c \end{bmatrix} \quad (31)$$

Um vetor coluna:

$$V(l, 1) = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_l \end{bmatrix} \quad (32)$$

São apresentados a seguir, alguns exemplos de como acessar os elementos das matrizes e vetores no Matlab:

$$V(1, 1) = V_{11} \quad (33a)$$

$$V(2, 3) = V_{23} \quad (33b)$$

$$V(:, 1) = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_L \end{bmatrix} \quad (33c)$$

$$V(1, :) = \begin{bmatrix} V_1 & V_2 & \dots & V_C \end{bmatrix} \quad (33d)$$

Métodos de Integração Numérica

Algumas equações diferenciais possuem solução analítica e muitas outras não. Embora não exista, sabe-se que os movimentos descritos por elas existem e seria desejável descrevê-las pelo menos numericamente. Para isso, há uma série de métodos numéricos, tais como o método de Euler.

Método de Euler

O método de Euler é um método de primeira ordem, pois leva em consideração para os cálculos apenas o termo linear da expansão em série de Taylor (truncada) da solução da equação diferencial.

O sistema visto em (1a) e (1b), composto de n equações diferenciais pode ser resolvido através de técnicas de integração numérica, como por exemplo o citado método de Euler.

Discretizando-se a expressão (1a) com um passo de integração T , obtém-se:

$$\frac{\mathbf{x}((k+1)T) - \mathbf{x}(kT)}{T} = A\mathbf{x}(kT) + B\mathbf{u}(kT), \quad (34)$$

ou ainda:

$$\mathbf{x}((k+1)T) = \mathbf{x}(kT) + (A\mathbf{x}(kT) + B\mathbf{u}(kT))T. \quad (35)$$

Por conveniência de notação, é usual omitir-se o T que está presente em todas as funções, transformando-as em funções do índice k ($k = 0, 1, \dots, n$; $n = t_s/T$; t_s é o tempo de simulação), resultando em:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{x}(k) + (A\mathbf{x}(k) + B\mathbf{u}(k))T. \quad (36)$$

Note que as condições iniciais são representadas pelo valor inicial de $\mathbf{x}(k)$.

Pode-se elaborar então uma rotina em alguma linguagem de programação, por exemplo, utilizando a Eq. (36) e obter a evolução das variáveis do vetor \mathbf{x} .

O método de Euler não é de utilização muito frequente. Os erros introduzidos pela aproximação podem crescer, nos diversos passos, de uma maneira inaceitável. Entretanto, existem outros métodos de integração numérica de equações diferenciais de utilização corrente como o método de Jacobi e o de Gauss-Seidel que apresentam um melhor desempenho.

Aspectos Numéricos

Vários aspectos de caráter numérico se colocam no desenvolvimento de uma rotina de simulação. Esses aspectos dizem respeito principalmente ao condicionamento numérico dos procedimentos matemáticos utilizados e aos critérios de convergência adotados. Neste âmbito destaca-se, entre outras questões menores, o passo de integração.

Passo de Integração

A escolha de uma passo de integração constante deve refletir um compromisso entre o tempo de processamento e a precisão.

O passo de integração deve ser pequeno o suficiente para que a integração forneça bons resultados. Entretanto, a escolha de um passo de integração constante e pequeno pode levar a gastos desnecessários de tempo de processamento e de armazenamento de dados.

Este compromisso muitas vezes não é atingível, visto que uma mesma simulação pode conter várias condições de operação do sistema a ser simulado, sendo que cada uma destas situações exigirá um passo de integração específico. Quando utiliza-se o passo de integração **variável** soluciona-se esta escolha. Deste modo, a rotina determina automaticamente a cada instante de tempo o passo de integração ótimo segundo algum critério.

A partir de um critério adequado, consegue-se uma economia substancial de tempo de processamento sem perda de precisão do resultado obtendo o passo de integração a cada instante de tempo.