Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Escola de Engenharia de Porto Alegre
Departamento de Engenharia Elétrica
ANÁLISE DE CIRCUITOS II - ENG04031

Aula 10 - Espaço de Estados (II) e Circuitos sob Excitação Senoidal (I)

Introdução

- Espaço de estados (II);
- Geração de tensão alternada;
- Fonte senoidal;
- Números complexos;
- Fasores;
- Elementos no domínio da frequência;
- Métodos de solução de circuitos no domínio da frequência.

Espaço de Estados ($D \neq 0$)

No laboratório anterior, foi abordado somente a descrição de circuitos via espaço de estados considerando o vetor $D = 0$. Nesta aula, será apresentado um exemplo de descrição de circuitos via espaço de estados com $D \neq 0$.

Exemplo 1. Considerando o circuito visto na Fig. 1:

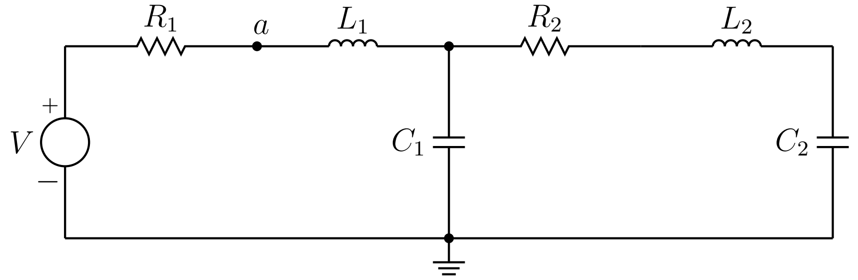


Figura 1: Circuito RLC do Exemplo 1.

cujas variáveis de saída são V_a e I_{L_2} $\left(\dfrac{\partial I_{L_2}}{\partial t} = \dot{I_{L_2}}\right)$, obtêm-se:

$$\dot{I_{L_1}} = \frac{V}{L_1} - \frac{R_1 I_{L_1}}{L_1} - \frac{V_{C_1}}{L_1}, \tag{1a}$$

$$\dot{I_{L_2}} = \frac{V_{C_1}}{L_2} - \frac{V_{C_2}}{L_2} - \frac{R_2 I_{L_2}}{L_2}, \tag{1b}$$

ainda:

$$\dot{V_{C_1}} = \frac{I_{L_1} - I_{L_2}}{C_1}, \tag{2a}$$

$$\dot{V_{C_2}} = \frac{I_{L_2}}{C_2}. \tag{2b}$$

Assim, $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}$ fica:

$$\begin{bmatrix} \dot{V_{C_1}} \\ \dot{V_{C_2}} \\ \dot{I_{L_1}} \\ \dot{I_{L_2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/C_1 & -1/C_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1/C_2 \\ -1/L_1 & 0 & -R_1/L_1 & 0 \\ 1/L_2 & -1/L_2 & 0 & -R_2/L_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_{C_1} \\ V_{C_2} \\ I_{L_1} \\ I_{L_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/L_1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V \end{bmatrix} \tag{3}$$

e $\dot{\mathbf{y}} = C\mathbf{x} + D\mathbf{u}$, lembrando que $V_a = V - R_1 I_{L_1}$, é:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -R_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_{C_1} \\ V_{C_2} \\ I_{L_1} \\ I_{L_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V \end{bmatrix} \tag{4}$$

Pode-se observar que neste caso $D \neq 0$.

Geração de Tensão Alternada

Até agora, a análise dos circuitos estava limitada às discussões sobre circuitos com fontes de tensão ou corrente contínua; agora, serão abordados circuitos alimentados por fontes de tensão ou corrente que variam com o tempo (alternadas).

Uma tensão alternada é aquela cujo módulo e direção variam continuamente em intervalos regulares de tempo. A forma mais comum de onda de uma tensão alternada é a senoidal ilustrada na Fig. 2.

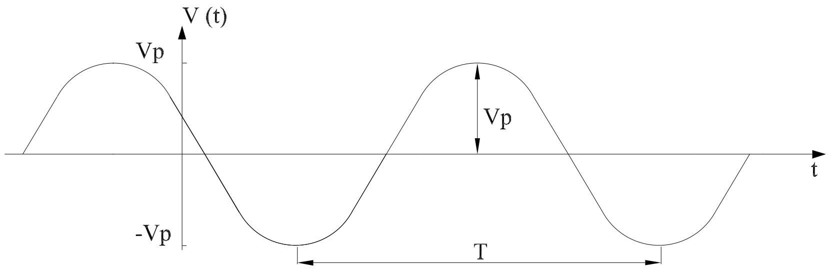


Figura 2: Forma de onda de tensão alternada.

Uma tensão alternada pode ser produzida por um gerador, chamado de alternador. Os geradores (alternadores) baseiam-se no princípio da indução eletromagnética: fazendo girar por meio de energia mecânica um condutor metálico (espira) entre os dois pólos de um ímã, gera-se energia elétrica na espira. Obs.: uma rotação da espira é chamada de ciclo. O número de ciclos por segundo é conhecido como frequência, representada por f, dada em hertz [1] (Hz). Um ciclo por segundo é igual a um hertz. Já, o intervalo de tempo para que um ciclo se complete é chamado de período, T, expresso em segundos (s). A frequência é o recíproco do período:

$$f = \frac{1}{T}. \tag{5}$$

Fonte Senoidal

Um fonte de tensão/corrente [2] senoidal (independente ou não) produz um sinal como visto na Fig. 2.

[1] Henrique Rodolfo Hertz, físico alemão (1857-1894).

[2] Será utilizado a fonte de tensão, porém as observações também se aplicam a fontes de corrente.

Pode-se expressar a função senoidal através da função seno ou co-seno. Será adotado a função co-seno como referência. Assim, o valor instantâneo da tensão senoidal é dado pela seguinte equação:

$$V = V_p \, cos(\omega t + \phi), \tag{6}$$

onde:

- V é o valor instantâneo da tensão, V;
- V_p é o valor máximo (pico) da tensão, $V_p = \mid V \mid$, V;
- ϕ é o ângulo de fase, graus;
- ω é a frequência angular, rad/s.

A frequência angular, ω, é proporcional à frequência f:

$$\omega = 2\pi f. \tag{7}$$

O ângulo de fase, ϕ, determina o valor da função em $t = 0$; deste modo, está relacionado ao ponto da onda periódica no qual inicia-se a medir o tempo. Já o ângulo de fase entre duas formas de onda de mesma frequência é a diferença angular em um dado instante.

Visto que ωt e ϕ são somados para formar o argumento da função senoidal, é necessário que sejam expressos nas mesmas unidades, graus ou radianos. Obs.: núm. de graus = (180^0 núm. radianos)/π.

Outra característica importante de uma função senoidal é o seu valor médio quadrático ou RMS [3]. O valor RMS de uma função periódica, f, é definido como a raiz quadrada do valor médio da função ao quadrado:

$$f_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} [f(t)]^2 \; \partial t}. \tag{8}$$

Deste modo, considerando a tensão senoidal definida na Eq. (6), o valor RMS é:

$$V_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} V_p^2 \cos^2(\omega t + \phi) \, \partial t}. \tag{9}$$

Desenvolvendo a Eq. (9), obtém-se:

$$V_{RMS} = \frac{V_p}{\sqrt{2}}. \tag{10}$$

O valor RMS de uma onda senoidal alternada corresponde à mesma quantidade de corrente ou tensão contínua capaz de produzir a mesma potência de aquecimento. Por este motivo, o valor de RMS também é conhecido como valor eficaz.

Números complexos

Os números complexos surgiram da necessidade da extração da raiz quadrada de números negativos, facilitando com isso a solução de muitas questões matemáticas. Atualmente, os números complexos são amplamente usados em análise de circuitos.
Há duas formas de representar um número complexo: a forma retangular ou cartesiana e a forma polar ou trigonométrica.

[3] Do inglês *Root Mean Square*.

Na forma retangular, um número complexo, $\boldsymbol{n}$, é escrito em termos de suas componentes real e imaginária:

$$\boldsymbol{n} = \Re\{n\} + \Im\{n\} = a + jb, \tag{11}$$

onde: a é a componente real, b é a componente imaginária e $j = \sqrt{-1}$ [4].

Na forma polar, um número complexo é escrito em termos de um módulo e um ângulo de fase:

$$\boldsymbol{n} = c\, e^{j\phi} = |\, c \,| \angle\phi, \tag{12}$$

onde: c é o módulo de $\boldsymbol{n}$, ϕ é o ângulo de fase, e é a base dos logaritmos naturais.

A identidade de Euler, Eq. (13), relaciona a forma polar à forma retangular de um número complexo:

$$e^{\pm j\phi} = \cos(\phi) \pm j sen(\phi). \tag{13}$$

Assim, para obter um número complexo na forma retangular a partir da sua forma polar, basta escrever:

$$\begin{aligned} ce^{j\phi} &= c\Big(\cos(\phi) + j sen(\phi)\Big) \\ ce^{j\phi} &= c\cos(\phi) + j c sen(\phi) \\ ce^{j\phi} &= a + jb \\ |\, c \,| \angle\phi &= a + jb. \end{aligned} \tag{14}$$

Já para obter um número complexo na forma polar a partir da sua forma retangular, deve-se escrever:

$$\begin{aligned} a + jb &= \left(\sqrt{a^2 + b^2}\right) \angle\phi \\ a + jb &= |\, c \,| \angle\phi, \end{aligned} \tag{15}$$

onde:

$$\phi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right). \tag{16}$$

A representação gráfica de um número complexo é realizada em um plano matemático onde o eixo vertical representa a componente imaginária e o eixo horizontal sua componente real. A Fig. 3 exibe a representação de dois números complexos: $\boldsymbol{n}_1 = a_1 + j\, b_1 = |\, c_1 \,| \angle\phi_1$ e $\boldsymbol{n}_2 = -a_2 - j\, b_2 = |\, c_2 \,| \angle\phi_2$.

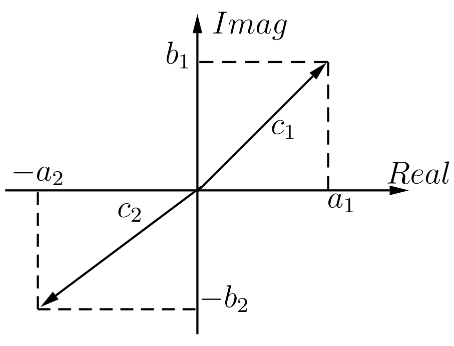


Figura 3: Exemplos de números complexos.

O complexo conjugado de um número complexo $\boldsymbol{n}$, indicado pelo asterisco $\boldsymbol{n}^*$, é obtido conservando a parte real do número original e trocando o sinal da parte imaginária, por exemplo: $a + j\, b \rightarrow a - j\, b$.

[4]Na matemática, a notação mais comum é $i = \sqrt{-1}$. Contudo, os engenheiros eletricistas usualmente utilizam a letra j para representar $\sqrt{-1}$ visto que a letra i refere-se geralmente a corrente elétrica.

Ao se trabalhar com números e grandezas complexas, as identidades matemáticas a seguir podem ser bem úteis:

$$\begin{aligned}
\pm j^2 &= \mp 1, && (17a)\\
(-j)(j) &= 1, && (17b)\\
j &= \frac{1}{-j}, && (17c)\\
e^{\pm j\pi/2} &= \pm j, && (17d)\\
e^{\pm j\pi} &= -1, && (17e)\\
\cos(\phi) &= \frac{e^{j\phi}+e^{-j\phi}}{2}, && (17f)\\
sen(\phi) &= \frac{e^{j\phi}-e^{-j\phi}}{2j}, && (17g)\\
e^{-j\phi} &= cos(\phi) - j. && (17h)
\end{aligned}$$

Considerando $\boldsymbol{n} = a + jb = |\, c \,| \angle\phi$, têm-se ainda:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}^* &= a^2 + b^2 = c^2, && (18a)\\
\boldsymbol{n} + \boldsymbol{n}^* &= 2a, && (18b)\\
\boldsymbol{n} - \boldsymbol{n}^* &= j2b, && (18c)\\
\mathbf{n}/\mathbf{n}^* &= 1\angle 2\phi. && (18d)
\end{aligned}$$

Fasores

O fasor é um número complexo usado para representar a amplitude e a fase de uma função senoidal; ou seja, trata-se de uma entidade com módulo e sentido que varia ao longo do tempo. O comprimento da seta que representa o fasor num diagrama, semelhante ao visto na Fig. 3, indica o módulo da tensão alternada. Já o ângulo que a seta forma com o eixo horizontal, indica o ângulo de fase.

O conceito de fasor se baseia na identidade de Euler, que relaciona a função exponencial à função trigonométrica, conforme visto na Eq. (13) [5].

Foi adotado, anteriormente, a função co-seno como referência; assim, ao se trabalhar com fasores, o eixo de referência também será o eixo dos co-senos (eixo horizontal) e será considerado o sentido anti-horário como positivo.

Elementos Passivos no Domínio da Frequência

Serão apresentados a seguir a relação entre a tensão e a corrente na forma fasorial para o resistor, capacitor e indutor.

Conforme a lei de Ohm, se $\boldsymbol{I} = I_p \cos(\omega t + \phi_I)$, a tensão entre os terminais do resistor é a seguinte:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{V}_R &= R\,\boldsymbol{I}\\
\boldsymbol{V}_R &= R\,I_p\,[\cos(\omega t + \phi_I)]\\
\boldsymbol{V}_R &= R\,|\,I\,|\,\angle\phi_I\\
\boldsymbol{V}_R &= |\,V_R\,|\,\angle\phi_{V_R},
\end{aligned} \qquad (19)$$

onde: I_p é amplitude da corrente em ampères, ϕ_I o ângulo de fase da corrente $\boldsymbol{I}$, V_p é amplitude da tensão em volts e ϕ_{V_R} o ângulo de fase da tensão $\boldsymbol{V}_R$.

[5] Supondo $V = V_p \cos(\omega t + \phi) \rightarrow \boldsymbol{V} = |\,V\,|\,\angle\,\phi$, onde V é um fasor qualquer.

Vê-se que na Eq. (19), o resistor não introduziu nenhuma diferença de fase entre a tensão e a corrente.

De modo semelhante, usando as indentidades trigonométricas, pode-se obter a tensão entre os terminais do indutor:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{V}_L &= j\,X_L\,\boldsymbol{I} = j\,\omega\,L\,\boldsymbol{I} \\
\boldsymbol{V}_L &= (\omega\,L\,\angle 90^0)\;|\,I\,|\,\angle\phi_I \\
\boldsymbol{V}_L &= \omega\,L\,I_p\angle(\phi_I + 90^0) \\
\boldsymbol{V}_L &= |\,V_L\,|\,\angle\phi_{V_L},
\end{aligned} \tag{20}$$

onde: ϕ_{V_L} o ângulo de fase da tensão $\boldsymbol{V}_L$. Pode-se observar na Eq. (20), que o indutor introduz uma diferença de fase de 90^0 entre a tensão e a corrente. Na realidade, a tensão está adiantada de 90^0 em relação à corrente.

Já a tensão entre os terminais do capacitor é dada por:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{V}_C &= -j\,X_C\,\boldsymbol{I} = \frac{1}{j\,\omega\,C}\,\boldsymbol{I} \\
\boldsymbol{V}_C &= \frac{1}{\omega C}\,\angle - 90^0\;|\,I\,|\,\angle\phi_I \\
\boldsymbol{V}_C &= \frac{I_p}{\omega\,C}\,\angle(\phi_I - 90^0) \\
\boldsymbol{V}_C &= |\,V_C\,|\,\angle\phi_{V_C},
\end{aligned} \tag{21}$$

onde: ϕ_{V_C} o ângulo de fase da tensão $\boldsymbol{V}_C$. De acordo com a Eq. (21), A tensão e a corrente em um capacitor estão defasadas de 90^0. Na verdade, a tensão está atrasada de 90^0 em relação à corrente.

Comparando as Eqs. (19), (20) e (21), observa-se que todas apresentam a seguinte forma:

$$\boldsymbol{V} = Z\,\boldsymbol{I}. \tag{22}$$

O termo Z representa a impedância do elemento, medida em ohms. A impedância é uma grandeza equivalente à resistência, indutância ou capacitância no domínio do tempo. A parte real da impedância é definida como resistência, R, e sua parte imaginária como reatância, X:

$$Z = \Re\{Z\} + \Im\{Z\} = R \pm jX\ (\Omega). \tag{23}$$

Deste modo, a impedância de um resistor, definida como Z_R, é simplesmente a resistência R. A impedância de um capacitor, Z_C, é somente a reatância $X_C = -1/\omega C$. Já, a de um indutor, Z_L, é a reatância $X_L = \omega L$:

$$Z_R = \Re\{Z_R\} + \Im\{Z_R\} = R, \tag{24a}$$

$$Z_C = \Re\{Z_C\} + \Im\{Z_C\} = \frac{1}{j\omega C} = -jX_C, \tag{24b}$$

$$Z_L = \Re\{Z_L\} + \Im\{Z_L\} = j\omega L = jX_L. \tag{24c}$$

A reatância capacitiva X_C é a oposição ao fluxo de corrente alternada devido a presença da capacitância no circuito. A partir da Eq. (7) [6], obtém-se a equação que permite calcular a reatância capacitiva:

$$X_C = \frac{1}{2\pi f C}. \tag{25}$$

A impedância no domínio X_L é a oposição à corrente alternada devido à indutância do circuito. A fórmula para a reatância indutiva é:

$$X_L = 2\pi f L. \tag{26}$$

[6]Definindo C e L, os valores reativos dependem unicamente da frequência do sinal.

O inverso da impedância é conhecido como admitância, representado pela letra Y:

$$Y = \frac{1}{Z}. \tag{27}$$

A parte real da admitância é conhecida como condutância, representada pela letra G, e a parte imaginária, B, como susceptância:

$$\mathbf{Y} = \Re\{Y\} + \Im\{Y\} = G + jB\,(S). \tag{28}$$

Ainda:

$$\begin{aligned} Y &= \frac{1}{\mathbf{Z}} = \frac{1}{R + jX}, && \text{(29a)}\\ G &\neq \frac{1}{R}, && \text{(29b)}\\ B &\neq \frac{1}{X}. && \text{(29c)} \end{aligned}$$

Observando, novamente, as Eqs. (19), (20) e (21), nota-se que a impedância do resistor, Z_R, é um operador que modifica somente a escala de corrente. Já as impedâncias do capacitor e indutor, modificam a fase e a escala de corrente.

O comportamento dos resistores, capacitores e indutores, descrito acima, é extensivo às associações. Assim, a relação de fases entre a corrente que flui por um determinado circuito (composto de resistores, indutores e capacitores) e a tensão dos seus terminais é o ângulo da própria impedância apresentada nestes terminais. A Fig. 4 ajuda a ilustrar esta afirmação, onde: $\boldsymbol{V} = V_p \cos(\omega t + \phi_V)$, $\boldsymbol{I} = I_p \cos(\omega t + \phi_I)$ e $\boldsymbol{Z} = Z\angle\phi$ a impedância equivalente do circuito.

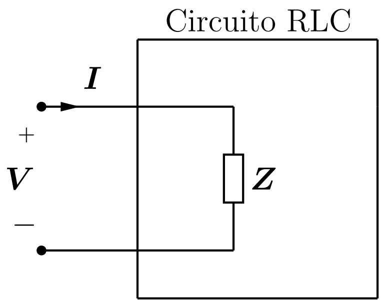


Figura 4: Circuito RLC equivalente.

Supondo a tensão adiantada em relação a corrente, obtém-se:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{V} &= \boldsymbol{ZI}\\ |\,V\,|\,\angle\phi_V &= Z\angle\phi\;|\,I\,|\,\angle\phi_I\\ \frac{|\,V\,|\,\angle\phi_V}{|\,I\,|\,\angle\phi_I} &= Z\angle\phi\\ \left|\frac{V}{I}\right|\angle\phi_V - \phi_I &= Z\angle\phi\\ \downarrow\\ \phi_V - \phi_I &= \phi. \end{aligned} \tag{30}$$

Por exemplo, analisando as Eqs. (19), (20) e (21), que expressam a relação entre a tensão e a corrente em um circuito com somente um resistor, um indutor e um capacitor, respectivamente, e a Eq (30), pode-se facilmente obter:

$$\begin{aligned}
\phi_{V_R} - \phi_I &= 0^0, &(31a)\\
\phi_{V_L} - \phi_I &= 90^0, &(31b)\\
\phi_{V_C} - \phi_I &= -90^0, &(31c)
\end{aligned}$$

que correspondem as defasagens anteriormente citadas.

Nota: As leis de Kirchhoff para tensões e correntes, bem como os métodos das correntes de malha e das tensões de nó, no domínio da frequência, são equivalentes às no domínio tempo.

Métodos de Solução de Circuitos no Domínio da Frequência

São apresentados a seguir três métodos de solução de circuitos no domínio da frequência, utilizados para determinar os módulos e ângulos das tensões e correntes do circuito em questão.

a) Método gráfico.

Baseia-se na representação gráfica de um fasor, semelhante àquela realizada para números complexos, conforme a Fig. 3. Desenha-se a posição relativa dos fasores que descrevem o comportamento de um circuito em um plano matemático onde o eixo vertical representa a componente imaginária e o eixo horizontal a componente real dos fasores. A Fig. 5 exibe um exemplo da representação dos fasores de tensão e corrente de um circuito RC [7]:

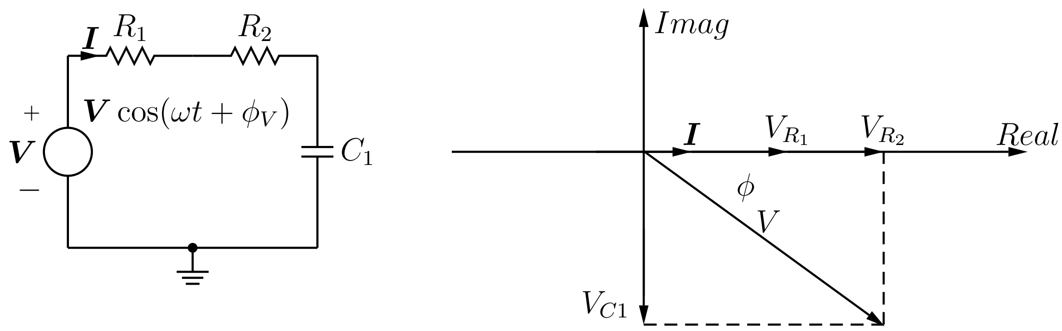


Figura 5: Circuito RC e fasores.

Pode-se calcular o valor de pico, V, do fasor da tensão, $\boldsymbol{V}$, somando os valores de pico dos fasores $\boldsymbol{V}_{R_1}$, $\boldsymbol{V}_{R_2}$ e $\boldsymbol{V}_{C_1}$. Como eles formam um triângulo retângulo:

$$|\,V\,| = \sqrt{(V_{R_1} + V_{R_2})^2 + (V_{C_1})^2}. \tag{32}$$

O ângulo de fase ϕ entre V e a tensão dos resistores é expresso de acordo com a seguinte equação:

$$\begin{aligned}
\tan\phi &= \frac{-V_{C_1}}{V_{R_1} + V_{R_2}}, &(33a)\\
\phi &= \arctan\left(-\frac{V_{C_1}}{V_{R_1} + V_{R_2}}\right). &(33b)
\end{aligned}$$

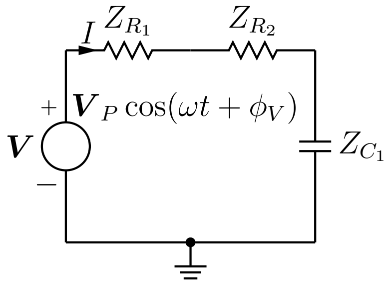
O módulo da impedância do circuito RC é:

$$|\,Z| = \sqrt{(R_1 + R_2)^2 + {X_C}^2}. \tag{34}$$

[7] Adotando a corrente $\boldsymbol{I}$ como referência.

b) Método analítico.

Para resolver um circuito pelo método analítico deve-se, inicialmente, obter as impedâncias de todos elementos. A Fig. 6 exibe o circuito RC da Fig. 5 modificado e suas impedâncias:



$$
\begin{aligned}
Z_{R_1} &= R_1 \\
Z_{R_2} &= R_2 \\
Z_{C_1} &= -jX_{C_1}
\end{aligned}
$$

Figura 6: Circuito RC da Fig. 5 modificado.

Trata-se então, a impedância equivalente do circuito, a corrente e as tensões dos componentes como números complexos:

$$
\begin{aligned}
|\,Z\,|\,\angle\phi &= (R_1 + R_2) - j\,X_{C_1}, && \text{(35a)} \\
\boldsymbol{I} &= \frac{|\,V\,|}{|\,Z\,|}\angle 0, && \text{(35b)} \\
\boldsymbol{V}_{C_1} &= Z_{C_1}\,\boldsymbol{I}, && \text{(35c)} \\
\boldsymbol{V}_{R_1} &= Z_{R_1}\,\boldsymbol{I}, && \text{(35d)} \\
\boldsymbol{V}_{R_2} &= Z_{R_2}\,\boldsymbol{I}. && \text{(35e)}
\end{aligned}
$$

O circuito da Fig. 5 apresenta somente uma fonte com uma frequência definida. Caso o circuito a ser analisado apresente excitações (fontes) com frequências diferentes, deve-se utilizar o princípio da superposição e tratar as fontes de forma independente.

c) Locus.

Baseia-se no cálculo dos fasores para diversos valores de frequência, tais como nula, infinita e outros valores intermediários adequados. Apresenta um formato de uma circuferência ou reta.