Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Escola de Engenharia
Departamento de Engenharia Elétrica
ENG04479 Robótica A

Controle de Manipuladores

Prof. Walter Fetter Lages

24 de novembro de 2005

1 Introdução

1. Controle de juntas
   (a) Controle independente por junta
   (b) Torque calculado
   (c) Controle de tempo mínimo
   (d) Controle por estrutura variável
   (e) Controle não-linear desacoplado
2. *Resolved motion control*
   (a) *Resolved motion rate control*
   (b) *Resolved motion acceleration control*
   (c) *Resolved motion force control*
3. Controle adaptativo
   (a) Modelo-referência
   (b) *Self-tuning*
   (c) *Adaptive perturbation control*
   (d) *Resolved motion adaptive control*
4. Controladores *soft*
   (a) Redes neurais

(b) Lógica *fuzzy*

(c) Neuro-fuzzy

A figura 1 mostra um diagrama de blocos genérico de um sistema de controle de robôs manipuladores.

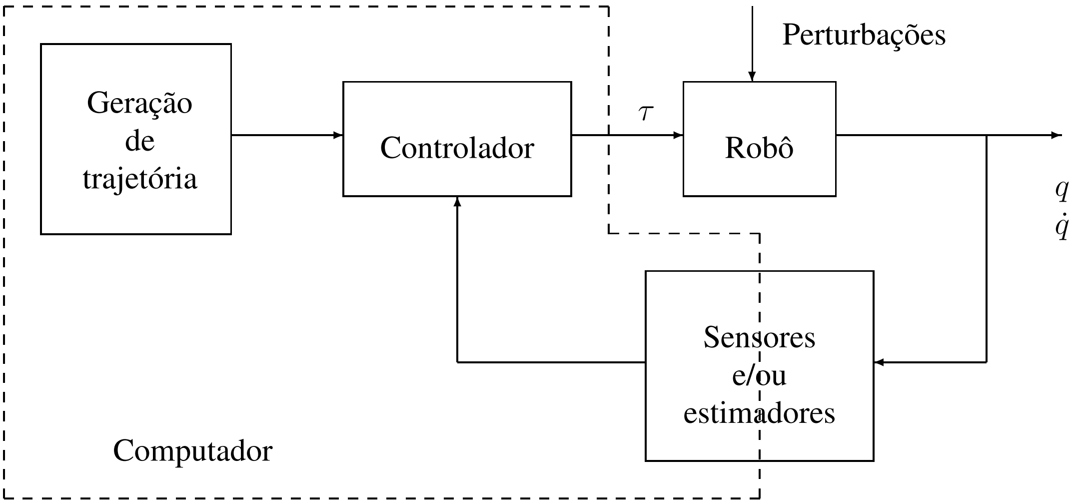

Figura 1: Diagrama de blocos genérico de um sistema de controle de robô manipulador.

2 Controle Independente por Junta

O controle independente por junta consiste em considerar cada junta independente das demais para efeitos de controle. Ou seja, projeta-se um controlador para cada junta, ignorando os efeitos de acoplamento entre as juntas. A figura 2 mostra um diagrama de blocos de um controle independente por junta.

Para analisar o controle independente por junta é conveniente ter um modelo do sistema de uma junta.

2.1 Função de Transferência de uma Junta

A figura 3 mostra um esboço do sub-sistema mecânico de uma junta.

Supondo que não haja escorregamento no sistema de transmissão, pode-se escrever

$$d_m = d_l \tag{1}$$

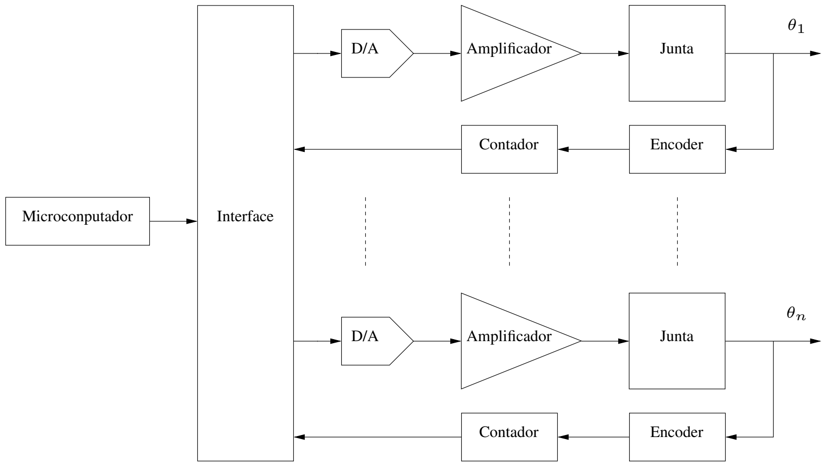

Figura 2: Diagrama de blocos genérico de um controle independente por junta.

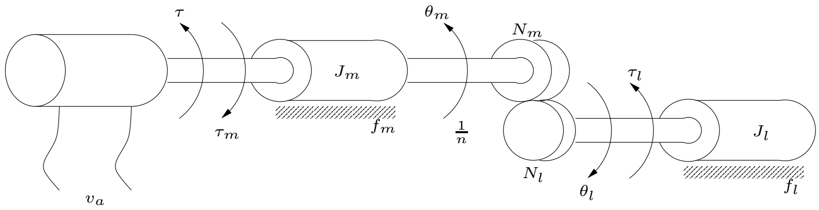

Figura 3: Esboço da mecânica de uma junta.

onde d_m e d_l são os deslocamentos lineares das engrenagens do lado do motor e do lado da carga, respectivamente.

Substituindo o raio (r) e o deslocamento angular (θ) de cada engrenagem em (1) obtém-se

$$r_m\theta_m = r_l\theta_l$$

e como o número de dentes de cada engrenagem é proporcional ao seu raio, tem-se

$$N_m\theta_m = N_l\theta_l$$

ou

$$\frac{N_m}{N_l} = \frac{\theta_l}{\theta_m} = n < 1, \text{ tipicamente}$$

logo, pode-se escrever também

$$\theta_l = n\theta_m \tag{2}$$

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_l &= n\dot{\theta}_m \qquad (3)\\ \ddot{\theta}_l &= n\ddot{\theta}_m \qquad (4)\end{aligned}$$

O torque produzido pelo atuador (τ) deve vencer as perdas do lado do motor (por atrito com os mancais e inércia do rotor), representados por τ_m e o torque de reação da carga, τ_l. Ou seja,

$$\tau = \tau_m + \tau_l^* \qquad (5)$$

onde τ_l^* é τ_l refletido para o eixo do motor.

As perdas do lado do motor são dadas por

$$\tau_m = J_m\ddot{\theta}_m + f_m\dot{\theta}_m \qquad (6)$$

onde J_m é o momento de inércia do rotor e f_m é o atrito viscoso com os mancais.

O torque de reação da carga é dado por

$$\tau_l = J_l\ddot{\theta}_l + f_l\dot{\theta}_l \qquad (7)$$

onde J_l é o momento de inércia da junta e f_l é o atrito viscoso da junta.

À (7) poderia ser acrescentado ainda mais um termo, representando a elasticidade do sistema de transmissão, resultando

$$\tau_l = J_l\ddot{\theta}_l + f_l\dot{\theta}_l + K_l(\theta_l - n\theta_m) \qquad (8)$$

onde K_l é a constante de mola.

No entanto, tipicamente o sistema de transmissão é suficiente rígido para que este termo adicional possa ser desprezado.

O princípio da conservação da energia permite escrever

$$\tau_l^*\theta_m = \tau_l\theta_l$$

ou

$$\tau_l^* = \frac{\tau_l\theta_l}{\theta_m} = n\tau_l$$

e portanto, de (3), (4) e (7):

$$\tau_l^* = n^2\left(J_l\ddot{\theta}_m + f_l\dot{\theta}_m\right) \qquad (9)$$

Assim, de (5) e (6), o torque será

$$\begin{aligned}\tau &= \left(J_m + n^2J_l\right)\ddot{\theta}_m + \left(f_m + n^2f_l\right)\dot{\theta}_m\\ &= J_e\ddot{\theta}_m + f_e\dot{\theta}_m \qquad (10)\end{aligned}$$

onde

$J_e = J_m + n^2 J_l$ é a inércia equivalente e

$f_e = f_m + n^2 f_l$ é o atrito viscoso equivalente.

O torque (10) é produzido pelo atuador cujo diagrama elétrico é mostrado na figura 4.

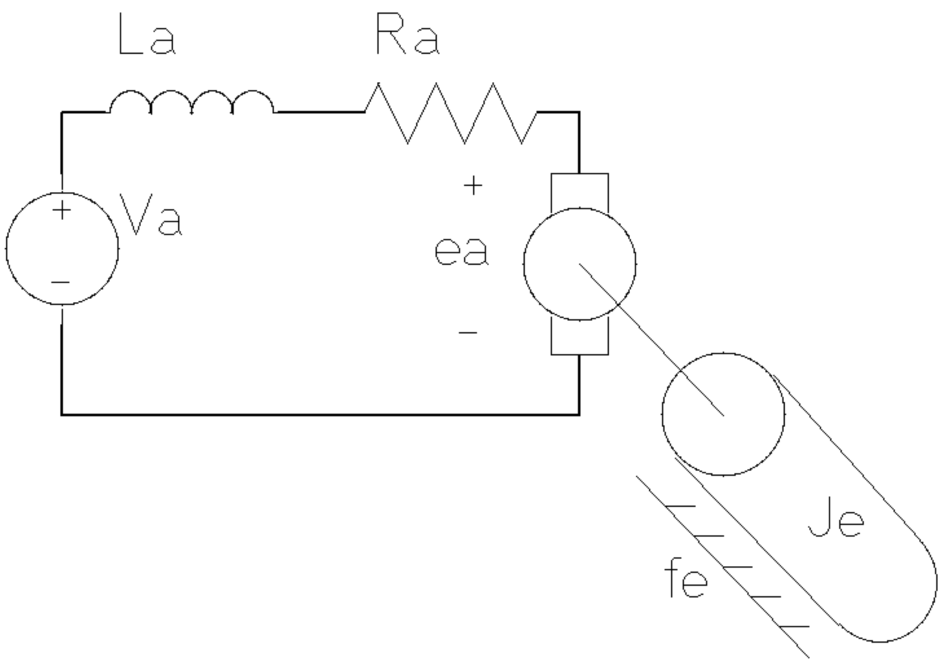

Figura 4: Diagrama elétrico do atuador de uma junta.

Tipicamente em manipuladores robóticos utilizam-se motores com imã permanente. Portanto, o torque produzido pelo atuador é

$$\tau = K_T i_a \tag{11}$$

onde

K_T é a constante de torque e

i_a é a corrente de armadura.

A corrente de armadura está relacionada com a tensão aplicada por

$$v_a = R_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt} + e_a \tag{12}$$

sendo

R_a a resistência de armadura;

L_a a indutância de armadura e

e_a a força contra-eletro-motriz dada por

$$e_a = K_a \dot{\theta}_m \tag{13}$$

onde K_a é a constante de armadura do motor.

Substituindo (13) em (12)

$$v_a = R_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt} + K_a \dot{\theta}_m \tag{14}$$

Tomando-se a transformada de Laplace de (14) com condições iniciais nulas e resolvendo-se para $I_a(s)$ resulta

$$I_a(s) = \frac{v_a(s) - sK_a\Theta_m(s)}{R_a + sL_a} \tag{15}$$

e portanto, de (11)

$$T(s) = K_T I_a(s) = K_T \left(\frac{V_a(s) - sK_a\Theta_m(s)}{R_a + sL_a} \right) \tag{16}$$

Por outro lado, a transformada de Laplace de (10) é

$$T(s) = s^2 J_e \Theta_m(s) + s f_e \Theta_m(s) \tag{17}$$

Igualando-se (16) e (17) e resolvendo para $\frac{\Theta_m(s)}{V_a(s)}$ tem-se

$$\frac{\Theta_m(s)}{V_a(s)} = \frac{K_T}{s\left[s^2 J_e L_a + s(J_e R_a + L_a f_e) + R_a f_e + K_T K_a\right]}$$

Normalmente, a constante de tempo elétrica é muito menor do que a constante de tempo mecânica. Assim, pode-se desprezar L a , obtendo-se

$$\frac{\Theta_m(s)}{V_a(s)} = \frac{K_T}{s(sJ_e R_a + R_a f_e + K_T K_a)} = \frac{K}{s(T_m s + 1)} \tag{18}$$

com

$$K = \frac{K_T}{R_a f_e + K_T K_a} = \text{ constante de ganho}$$

$$T_m = \frac{R_a J_e}{R_a f_e + K_T K_a} = \text{ constante de tempo}$$

De (18) e (2) tem-se

$$\frac{\Theta_l(s)}{V_a(s)} = \frac{nK_T}{s(sJ_eR_a + R_af_e + K_TK_a)} \tag{19}$$

A figura 5 mostra um diagrama de blocos da junta.

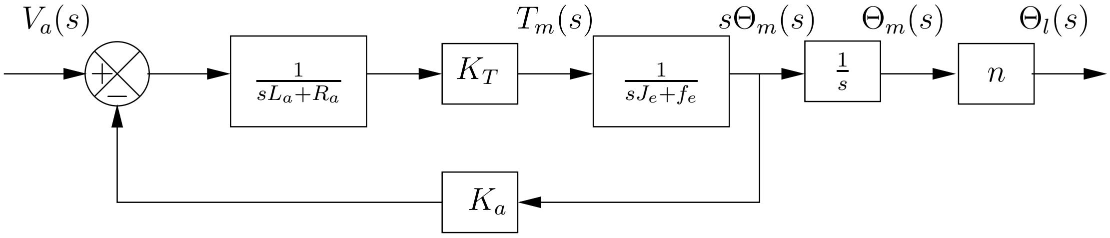

Figura 5: Diagrama de blocos da junta.

2.2 Controle de Posição de uma Única Junta

Supondo um controlador PD tem-se

$$v_a = \frac{K_p\left(\theta_l^d - \theta_l\right) + K_d\left(\dot{\theta}_l^d - \dot{\theta}_l\right)}{n}$$

$$v_a = \frac{K_pe + K_d\dot{e}}{n}$$

ou

$$V_a(s) = \frac{K_p + sK_d}{n}E(s)$$

A figura 6 mostra o diagrama de blocos do controlador PD.

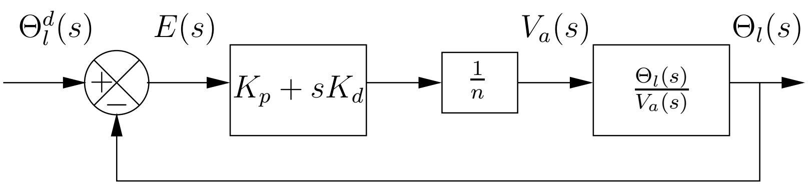

Figura 6: Diagrama de blocos do controlador PD.

$$\frac{\Theta_l(s)}{E(s)} = G(s) = \frac{K_T(K_p + sK_d)}{s(sR_aJ_e + R_af_e + K_TK_a)}$$

$$\frac{\Theta_l(s)}{\Theta_l^d(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{sK_TK_d + K_TK_p}{s^2R_aJ_e + s(R_af_e + K_TK_a + K_TK_d) + K_TK_p}$$

$$\frac{\Theta_l(s)}{\Theta_l^d(s)} = \frac{N(s)}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

com

$$N(s) = \frac{sK_TK_d}{R_aJ_e} + \omega_n^2$$

$$\omega_n^2 = \frac{K_TK_p}{R_aJ_e}$$

$$\xi = \frac{1}{2\omega_n}\frac{(R_af_e + K_TK_a + K_TK_d)}{R_aJ_e}$$

e obviamente escolhendo-se K_p e K_d pode-se determinar livremente ω_n e ξ.

A figura 7 mostra a posição dos pólos de um sistema de segunda ordem no plano complexo e a sua relação com o coeficiente de amortecimento (ξ) e a frequência natural não amortecida (ω_n).

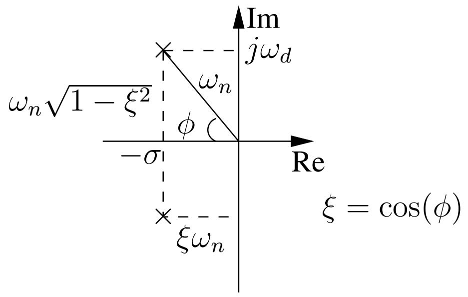

Figura 7: Posição dos pólos no plano complexo.

Na figura 8 tem-se a resposta temporal de um sistema de segunda ordem com $\omega_n = 30$rad/s e $\xi = 0.3$.

2.3 Desempenho

Em geral, deseja-se que o robô tenha uma resposta criticamente amortecida. Para tanto

$$K_p = \frac{\omega_n^2 J_e R_a}{K_T} > 0$$

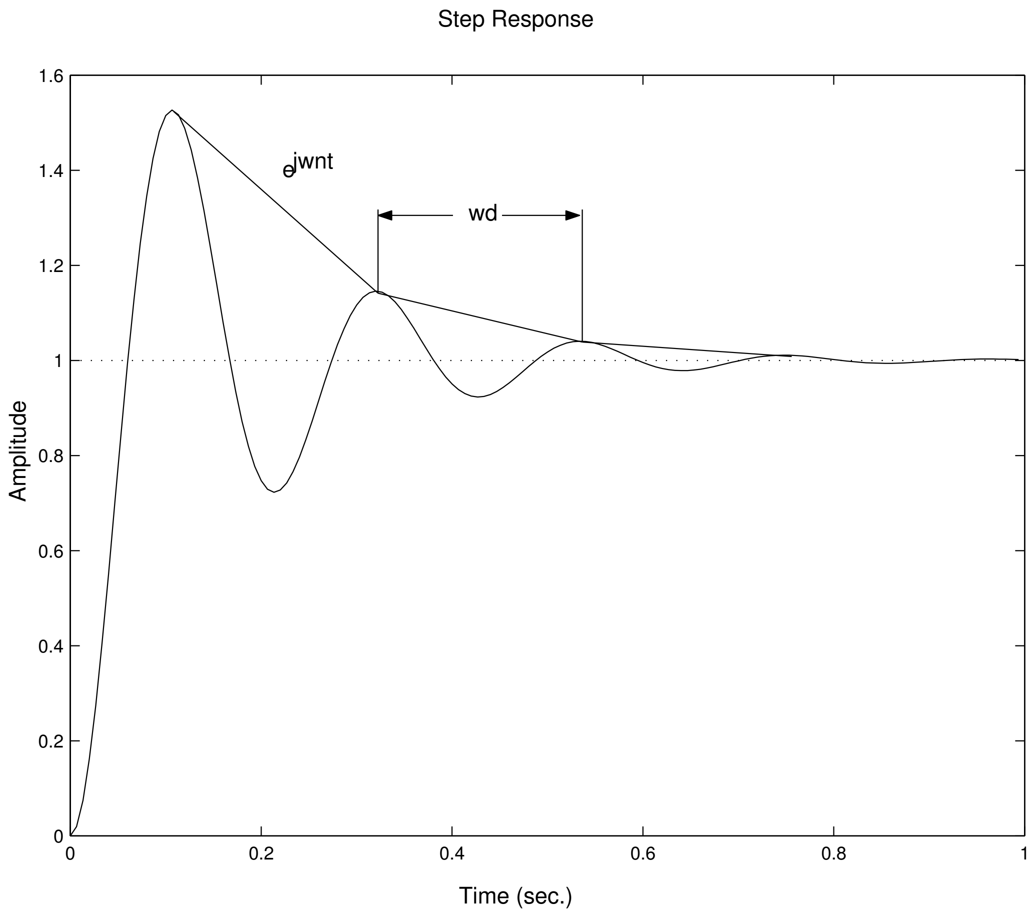

Figura 8: Resposta típica de um sistema de segunda ordem.

$$\xi = \frac{R_a f_e + K_T K_a + K_T K_d}{2\sqrt{K_T K_p J_e R_a}} \geq 1$$
$$= 1 \Longrightarrow \text{criticamente amortecido}$$

$$K_d = \frac{2\sqrt{K_T K_p J_e R_a} - R_a f_e - K_T K_a}{K_T}$$

$$\omega_n \leq \frac{1}{2}\omega_r$$

onde ω_r é a frequência de ressonância estrutural

$$J_e \ddot{\theta}_m + f_e \dot{\theta}_m + K_s \theta_m = 0$$

$$s^2\Theta_m(s) + \frac{f_e}{J_e}s\Theta_m(s) + \frac{K_s}{J_e}\Theta_m(s) = 0$$

$$\omega_r = \sqrt{\frac{K_s}{J_e}}$$

$$0 < Kp \leq \frac{\omega_r^2 J_e R_a}{4K_T}$$

$$K_d \geq \frac{R_a\omega_r - R_a f_e - K_T K_a}{K_T}$$

3 Torque Calculado

$$\tau = M_n(q)\left[\ddot{q}^d + K_d\left(\dot{q}^d - \dot{q}\right) + K_p\left(q^d - q\right)\right] + V_n(q,\dot{q}) + G_n(q) \qquad (20)$$

$$\begin{aligned} M(q)\ddot{q} + V(q,\dot{q}) + G(q) &= M_n(q)\left[\ddot{q}^d + K_d\left(\dot{q}^d - \dot{q}\right) + K_p\left(q^d - q\right)\right] \\ &+ V_n(q,\dot{q}) + G_n(q) \end{aligned}$$

Supondo que $M(q) = M_n(q)$, $V(q,\dot{q}) = V_n(q,\dot{q})$ e $G(q) = G_n(q)$:

$$M(q)\left[\ddot{e} + K_d\dot{e} + K_p e\right] = 0$$

$$\ddot{e} + K_d\dot{e} + K_p e = 0$$

Portanto, pode-se determinar K_d e K_p de forma que $e(t) \longrightarrow 0$ assintoticamente.

A expressão (20) pode ser calculada por Newton-Euler fazendo-se

$$\ddot{q}_i = \ddot{q}_i^d + \sum_{j=1}^{n} K_d^{ij}\left(\dot{q}_j^d - \dot{q}_j\right) + \sum_{j=1}^{n} K_p^{ij}\left(q_j^d - q_j\right)$$

A figura 9 mostra um diagrama de blocos do controle por torque calculado. Note que é um esquema de linearização por realimentação onde a qualidade da linearização depende do casamento entre os parâmetros do modelo e os parâmetros reais.

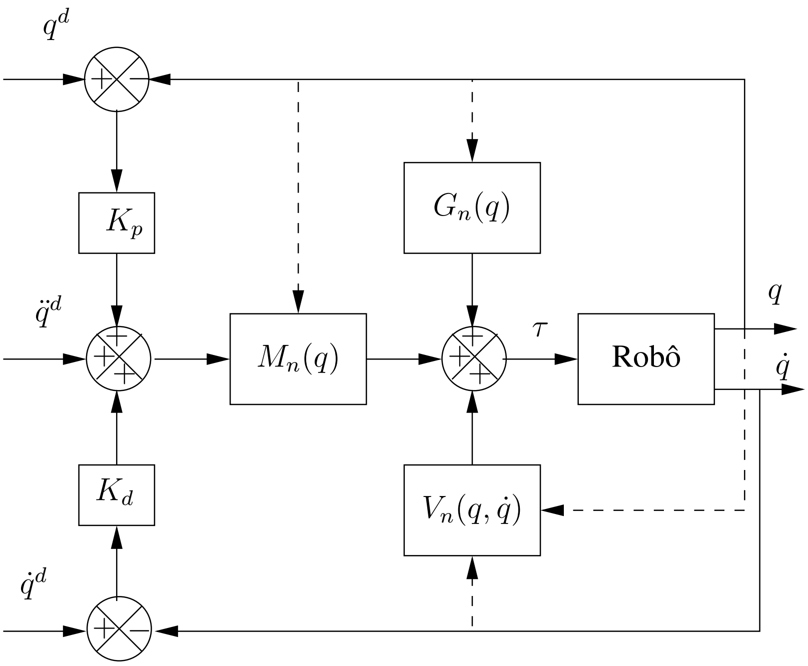

Figura 9: Diagrama de blocos do controle por torque calculado.

4 *Resolved Motion Control*

- Controle no espaço cartesiano
- *Resolved motion* $\Longrightarrow$ o movimento de todas as juntas é combinado e "resolvido"em movimentos da garra controláveis separadamente nas coordenadas cartesianas
- Trajetória especificada (referência) no espaço das cartesiano
- Atuação no espaço das juntas

$$
\begin{aligned}
{}^{base}R_{garra} &= \begin{bmatrix} C_\gamma & -S_\gamma & 0 \\ S_\gamma & C_\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_\beta & 0 & S_\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -S_\beta & 0 & C_\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C_\alpha & -S_\alpha \\ 0 & S_\alpha & C_\alpha \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} C_\gamma C_\beta & -S_\gamma C_\alpha + C_\gamma S_\beta S_\alpha & S_\gamma S_\alpha + C\gamma S_\beta C_\alpha \\ S_\gamma C_\beta & C_\gamma C_\alpha + S_\gamma S_\beta S_\alpha & -C_\gamma S_\alpha + S_\gamma S_\beta C_\alpha \\ -S_\beta & C_\beta S_\alpha & C_\beta C_\alpha \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$\begin{bmatrix} \dot{P}_x \\ \dot{P}_y \\ \dot{P}_z \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V \\ \Omega \end{bmatrix} = J(q)\dot{q}$$

Se o jacobiano for inversível (caso típico em robôs com 6 graus de liberdade), pode-se escrever

$$\dot{q} = J^{-1}(q) \begin{bmatrix} V \\ \Omega \end{bmatrix} \tag{21}$$

portanto, as acelerações serão

$$\begin{bmatrix} \dot{V} \\ \dot{\Omega} \end{bmatrix} = \dot{J}(q, \dot{q})\dot{q} + J(q)\ddot{q} \tag{22}$$

Substituindo-se (21) em (22) tem-se

$$\begin{bmatrix} \dot{V} \\ \dot{\Omega} \end{bmatrix} = \dot{J}(q, \dot{q})J^{-1}(q) \begin{bmatrix} V \\ \Omega \end{bmatrix} + J(q)\ddot{q}$$

de onde pode-se obter uma forma de calcular as velocidades e acelerações das juntas em função das velocidades e acelerações cartesianas.

$$\ddot{q} = J^{-1}(q) \begin{bmatrix} \dot{V} \\ \dot{\Omega} \end{bmatrix} - J^{-1}(q)\dot{J}(q, \dot{q})J^{-1}(q) \begin{bmatrix} V \\ \Omega \end{bmatrix} \tag{23}$$

4.1 *Resolved Motion Rate Control*

As juntas movem-se de modo a manter um movimento de regime da garra.

$$x = f(q)$$

$$x = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} V \\ \Omega \end{bmatrix} = J(q)\dot{q}$$

$$\dot{q} = J^{-1}(q)\dot{x}$$

A figura 10 mostra um diagrama de blocos do *resolved motion rate control*.

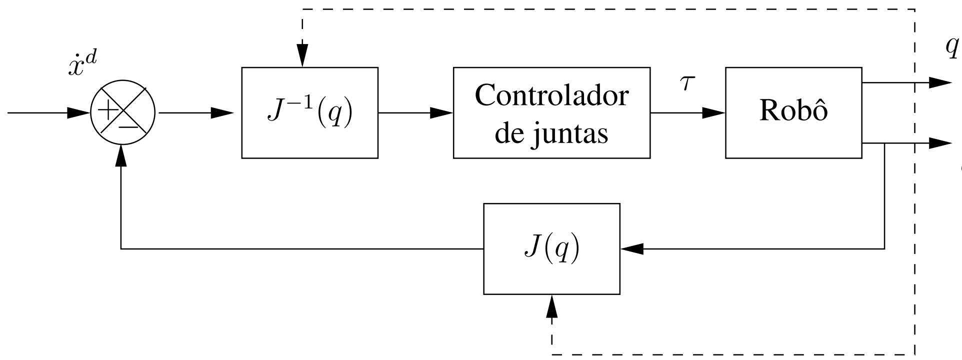

Figura 10: Diagrama de blocos do *resolved motion rate control*.

Pode-se também desejar manter constate as velocidades no sistema da garra e não no sistema da base. Neste caso

$$\dot{x} = {}^0R_g\dot{g} \Longrightarrow \dot{q} = J^{-1}(q){}^0R_g\dot{g}$$

4.2 *Resolved Motion Acceleration Control*

$$H = \begin{bmatrix} n & s & a & p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H^d = \begin{bmatrix} n^d & s^d & a^d & p^d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$e_p = p^d - p$$

$$e_o = \frac{1}{2}\left[n \times n^d + s \times s^d + a \times a^d\right]$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} V \\ \Omega \end{bmatrix} = J(q)\dot{q}$$

$$\ddot{x} = J(q)\ddot{q} + \dot{J}(q,\dot{q})\dot{q} \tag{24}$$

Definindo-se

$$e = \begin{bmatrix} e_p \\ e_o \end{bmatrix}$$

e se for possível fazer

$$\ddot{x} = \ddot{x}^d + K_d \left(\dot{x}^d - x \right) + K_p e \quad (25)$$

tem-se

$$\ddot{e} + K_d \dot{e} + K_p e = 0$$

que pode ter a sua dinâmica arbitrariamente determinada ajustando-se os valores K_p e K_d. Resta, portanto, garantir que (25) seja satisfeita. De (24) e (25) pode-se garantir isto fazendo-se

$$\begin{aligned} \ddot{q} &= J^{-1}(q) \left[\ddot{x}^d + K_d \left(\dot{x}^d - \dot{x} \right) + K_p e - \dot{J}(q, \dot{q})\dot{q} \right] \\ &= -K_d \dot{q} + J^{-1}(q) \left[\ddot{x}^d + K_d \dot{x}^d + K_p e - \dot{J}(q, \dot{q})\dot{q} \right] \end{aligned} \quad (26)$$

Pode-se, então, utilizar, por exemplo, o formalismo de Newton-Euler para calcular os torques que precisam ser aplicados nas juntas para forçar a aceleração computada por (26). A figura 11 mostra um diagrama de blocos do *resolved motion acceleration control*.

4.3 *Resolved Motion Force Control*

- Determina os torques necessários para realizar um movimento cartesiano
- não utiliza o modelo dinâmico e compensa variações de configuração e gravidade
- Necessita de um sensor de força na garra
- O controle de posição determina os torques necessários na garra para que uma certa trajetória seja rastreada
- O controle de força convergente determina os torques nas juntas para que os torques na garra sejam os desejados

$$\tau = J^T(q)F$$

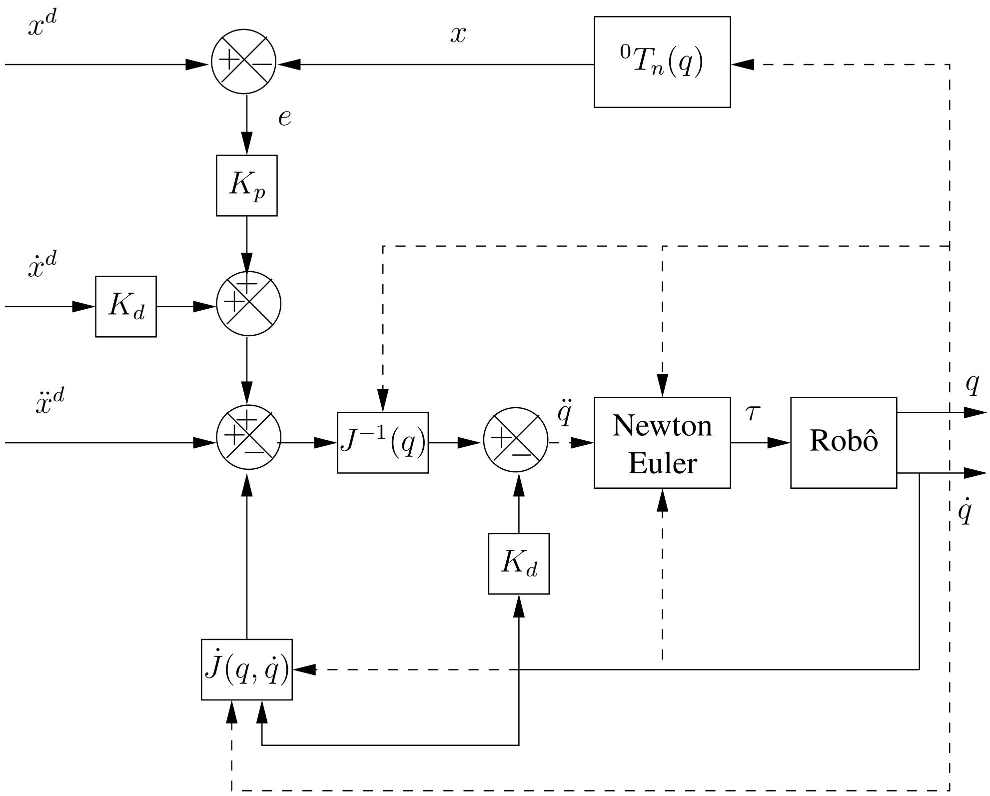

Figura 11: Diagrama de blocos do *resolved motion acceleration control*.

$$F = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \end{bmatrix}$$

De forma semelhante a seção 4.2, se for possível fazer com que

$$\ddot{x} = \ddot{x}^d + K_d \left(\dot{x}^d - \dot{x} \right) + K_p e \tag{27}$$

tem-se

$$\ddot{e} + K_d \dot{e} + K_p e = 0$$

que, da mesma forma, pode ter a sua dinâmica arbitrariamente determinada ajustando-se os valores K_p e K_d. No entanto, aqui, satisfaz-se (27) garantido que a força na garra seja dada por

$$F^d = M\ddot{x} \tag{28}$$

Por sua vez, (28) é garantida fazendo-se com que o torque aplicado nas juntas seja dado por

$$\tau = J^T(q)F^d = J^T(q)M\ddot{x} \tag{29}$$

onde M é a matriz de inércia da carga, dada por

$$M = \begin{bmatrix} mI_{3\times 3} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

sendo $I_{3\times 3}$ a matriz identidade 3×3 e I o tensor de inércia da carga.

As expressões (27) e (29) descrevem o laço de de posição do *resolved motion force control*, como mostrado na figura 12.

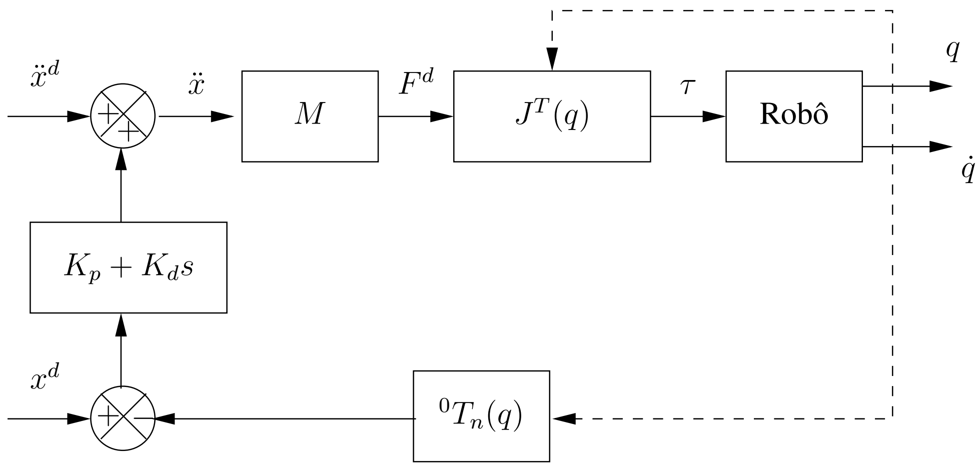

Figura 12: Diagrama de blocos do laço de posição do *resolved motion force control*.

A lei de controle descrita por (27) e (29) funciona bem se M for desprezível em comparação com a inércia do manipulador em sí. No caso geral, parte do torque (29) é gasta com o próprio manipulador. Para compensar isto, é utilizado o controle de força convergente. Este método consiste em fazer-se aproximações da forma

$$\Delta F(k) = F^d(k) - F_o(k)$$

$$F_a(k+1) = F_a(k) + \gamma_k \Delta F(k)$$

$$\gamma_k = \frac{1}{k+1} \quad , \quad k = 0, 1, 2, ...N$$

com $F_a(0) = F_o$. Tipicamente $N = 2$ é suficiente.

A figura 13 mostra um diagrama de blocos completo do *resolved motion force control*, incluindo o controle de posição e o controle de força convergente.

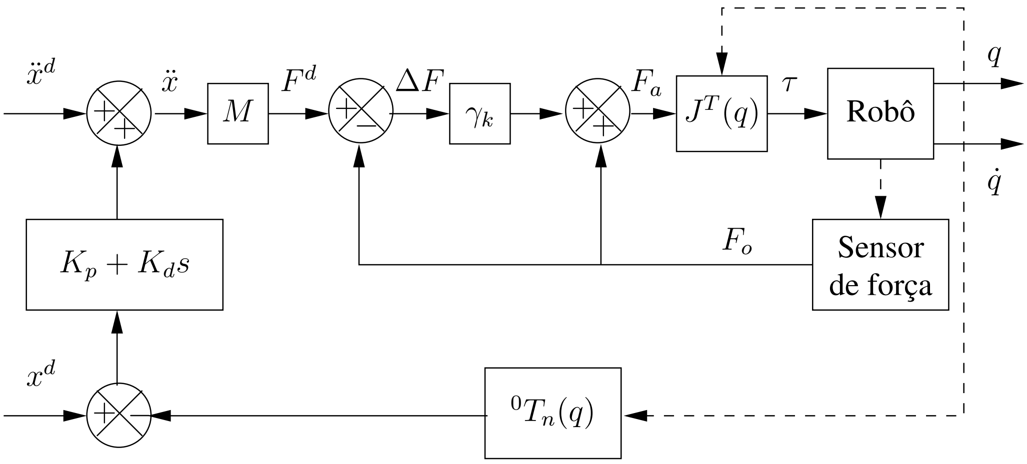

Figura 13: Diagrama de blocos completo do *resolved motion force control*.

5 Controle de Perturbação Adaptativo

Técnicas avançadas de controle de manipuladores, como Torque Calculado e outras necessitam do uso do modelo dinâmico do robô. Embora a estrutura do modelo seja bem conhecida, os parâmetros não o são, pois variam em função da carga do manipulador, envelhecimento, temperatura, condições de lubrificação, etc. Utilizando-se controle adaptativo procura-se compensar as variações nestes parâmetros.

Tipicamente, estratégias de controle adaptativo consistem na combinação de um método de controle com um método de identificação de parâmetros [2]. No entanto, como o manipulador é um sistema não linear dinamicamente complexo, a tentativa de obter-se um modelo através de identificação direta provavelmente não teria sucesso. Mas, considerando-se que o modelo nominal aproxima relativamente bem a dinâmica real do manipulador, pode-se tentar obter um modelo para o erro entre o modelo e a planta real e utilizar esta informação na malha de controle. Desta forma, o controlador passa a ter a capacidade de acomodar diferenças entre o modelo nominal e a dinâmica real do manipulador.

5.1 Modelo de perturbação

Embora um manipulador seja um sistema não linear, é possível obter-se um modelo linearizado em torno de um ponto de operação utilizando-se uma compensação do tipo *feedforward*.

Supondo que o torque aplicado ao robô real seja τ e que o estado do sistema seja x e que o modelo nominal tem como entrada τ^d e estado x^d, pode-se imaginar um sistema, denominado sistema de perturbação, cuja entrada é $\delta\tau = \tau - \tau^d$ e cujo estado é $\delta x = x - x^d$, como mostrado na figura 14.

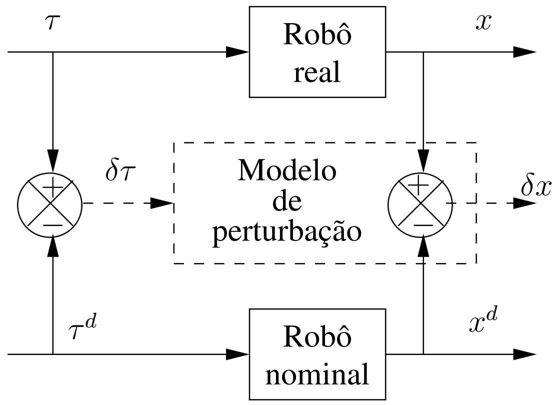

Figura 14: Modelo de perturbação.

Supondo que a dinâmica da planta seja dada por

$$\dot{x} = f(x, \tau) \tag{30}$$

os torques nominais podem ser calculados, por exemplo, por Newton-Euler e satisfazem

$$\dot{x}^d = f(x^d, \tau^d) \tag{31}$$

Expandindo (30) em série de Taylor em torno de (x^d, τ^d) chega-se à

$$\dot{x} = f(x^d, \tau^d) + \left.\frac{\partial f(x,\tau)}{\partial x}\right|_{\substack{x = x^d \\ \tau = \tau^d}} (x - x^d) + \left.\frac{\partial f(x,\tau)}{\partial \tau}\right|_{\substack{x = x^d \\ \tau = \tau^d}} (\tau - \tau^d) + O(2) \tag{32}$$

Subtraindo (31) de (32) e desprezando-se os termos de ordem superior, chega-se à

$$\begin{aligned} \delta\dot{x} &= \left.\frac{\partial f(x,\tau)}{\partial x}\right|_{\substack{x=x^d\\ \tau=\tau^d}} \delta x + \left.\frac{\partial f(x,\tau)}{\partial \tau}\right|_{\substack{x=x^d\\ \tau=\tau^d}} \delta\tau \\ &= A(t)\delta x + B(t)\delta\tau \end{aligned} \tag{33}$$

Com esta formulação, o problema de controle do manipulador é reduzido ao problema de determinar $\delta\tau$ que leva δx para zero em todos os instantes ao longo da trajetória do manipulador. A lei de controle é então formada por dois componentes: um componente em *feedforward*, que calcula os torque nominais τ^d (através das equações de Newton-Euler) e um componente em *feedback*, que calcula os torques de perturbação $\delta\tau$ que procuram compensar os pequenos desvios em relação à trajetória nominal, como mostrado na figura 15.

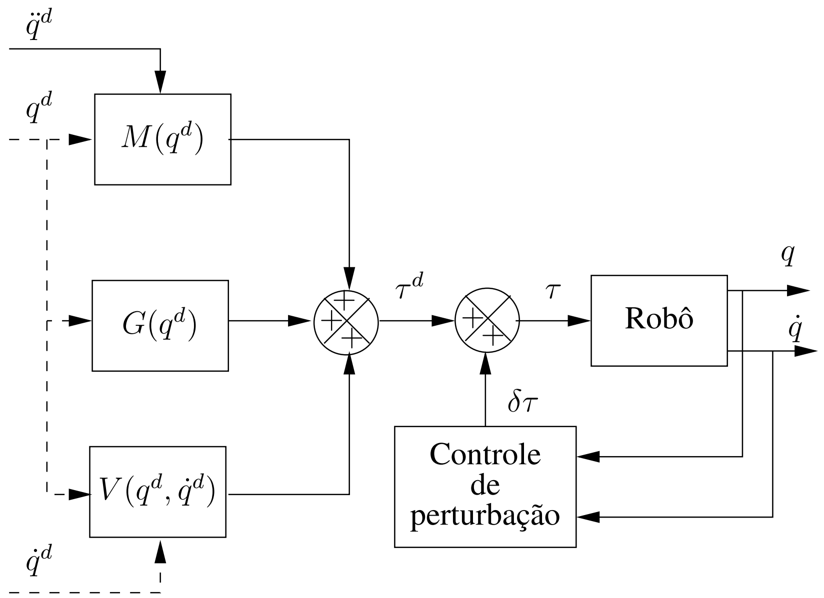

Figura 15: Controle de perturbação.

Os parâmetros $A(t)$ e $B(t)$ dependem da posição e velocidade instantâneas do manipulador e portanto variam lentamente com o tempo. Devido à complexidade dinâmica dos manipuladores em geral, é bastante difícil a sua determinação analítica. Além disto, dependem dos mesmo parâmetros que o modelo dinâmico e que portanto são desconhecidos (ao menos parcialmente). Assim, torna-se conveniente que $A(t)$ e $B(t)$ sejam identificados em tempo real.

5.2 Identificação Paramétrica

Para implementação em computadores digitais, é conveniente que (33) seja discretizada, de forma a obter-se um modelo linear discreto, apropriado para identificação paramétrica. Assim, discretizando-se (33) com um período de amostragem T, obtém-se

$$x(k+1) = F(k)x(k) + G(k)u(k) \tag{34}$$

onde $F(k) \cong A(kT)$, $G(k) \cong B(kT)$, $x(k) \cong \delta x(kT)$, $u(k) \cong \delta\tau(kT)$.

Para fim de estimação, é conveniente "empilhar"$F(k)$ e $G(k)$ e $x(k)$ e $u(k)$:

$$\theta_i(k) = \begin{bmatrix} f_{i1}(k) \\ f_{i2}(k) \\ \vdots \\ f_{in}(k) \\ g_{i1}(k) \\ g_{i2}(k) \\ \vdots \\ g_{im}(k) \end{bmatrix}$$

$$\phi(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \\ u_1(k) \\ u_2(k) \\ \vdots \\ u_m(k) \end{bmatrix}$$

Pode-se, portanto, escrever (34) como

$$x_i(k+1) = \phi^T(k)\theta_i(k)$$

ou

$$x_i(k+1) = \Theta^T(k)\phi(k)$$

onde $\Theta(k) = \begin{bmatrix} \theta_1(k) & \theta_2(k) & \cdots & \theta_n(k) \end{bmatrix}$ é a matriz de parâmetros desconhecidos e $\phi(k)$ é o vetor de regressão linear.

Como os parâmetros $\theta_i(k)$ são desconhecidos, deseja-se obter estimativas $\hat{\theta}_i(k)$ que minimizem o critério

$$J_i(k,\theta_i) = \sum_{j=0}^{k-1} \rho^{k-j} e_i^2(j)$$

onde $e_i(j)$ é o erro de estimação dado por

$$e_i(k) = x_i(k+1) - \phi^T(k)\hat{\theta}_i(k)$$

e ρ é o coeficiente de esquecimento utilizado para ponderar a importância dos erros recentes em relação aos erros ocorridos há mais tempo. Usualmente, tem-se $0.9 < \rho \leq 1.0$.

Mais formalmente, tem-se

$$\hat{\theta}_i(k) = \underset{\theta_i}{\text{Arg}} \quad \min J_i(k,\theta_i) \tag{35}$$

que pode ser escrita na forma

$$\hat{\theta}_i(k) = \underset{\theta_i}{\text{Arg}} \quad \min \ (X_i(k) - \Phi(k)\theta_i(k))^T (X_i(k) - \Phi(k)\theta_i(k))$$

com

$$X_i(k) = \begin{bmatrix} x_i(1) \\ x_i(2) \\ \vdots \\ x_i(k+1) \end{bmatrix}$$

e

$$\Phi(k) = \begin{bmatrix} \phi^T(0) \\ \phi^T(1) \\ \vdots \\ \phi^T(k) \end{bmatrix}$$

Assim, (35) pode ser resolvida fazendo-se

$$\frac{\partial J_i(k,\theta_i)}{\partial \theta_i} = 0 = -2\Phi^T(k)X_i(k) + 2\Phi^T(k)\Phi(k)\hat{\theta}_i(k)$$

Logo

$$\hat{\theta}_i(k) = \left(\Phi^T(k)\Phi(k)\right)^{-1} \Phi^T(k)X_i(k)$$

Definindo

$$P(k) = \left(\Phi^T(k)\Phi(k)\right)^{-1} = \left(\sum_{j=0}^{k} \phi(j)\phi^T(j)\right)^{-1}$$

tem-se

$$\hat{\theta}_i(k) = P(k)\sum_{j=0}^{k} \phi(j)x_i(j+1) \tag{36}$$

e

$$\begin{aligned} P^{-1}(k) &= \sum_{j=0}^{k} \phi(j)\phi^T(j) \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} \phi(j)\phi^T(j) + \phi(k)\phi^T(k) \\ &= P^{-1}(k-1) + \phi(k)\phi^T(k) \end{aligned}$$

Utlizando-se o Lema de Inversão de Matrizes com $A = P^{-1}(k-1)$, $B = \phi(k)$, $C = 1$ e $d = \phi^T(k)$, pode-se calcular

$$\begin{aligned} P(k) &= \left(P^{-1}(k-1) + \phi(k)\phi^T(k)\right)^{-1} \\ &= P(k-1) - P(k-1)\phi(k)\left(\phi^T(k)P(k-1)\phi(k) + 1\right)^{-1}\phi^T(k)P(k-1) \end{aligned}$$

ou

$$P(k) = P(k-1) - \frac{P(k-1)\phi(k)\phi^T(k)P(k-1)}{1 + \phi^T(k)P(k-1)\phi(k)}$$

De (36) tem-se

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_i(k) &= P(k)\sum_{j=0}^{k} \phi(j)x_i(j+1) \\ &= P(k)\left(\sum_{j=0}^{k-1} \phi(j)x_i(j+1) + \phi(k)x_i(k+1)\right) \\ &= \left(P(k-1) - \frac{P(k-1)\phi(k)\phi^T(k)P(k-1)}{1 + \phi^T(k)P(k-1)\phi(k)}\right)\left(\sum_{j=0}^{k-1} \phi(j)x_i(j+1) + \phi(k)x_i(k+1)\right) \end{aligned}$$

e expandindo-se o produto resulta

$$
\begin{aligned}
\hat{\theta}_i(k) &= P(k-1)\sum_{j=0}^{k-1}\phi(j)x_i(j+1) + P(k-1)\phi(k)x_i(k+1) \\
&- \frac{P(k-1)\phi(k)\phi^T(k)P(k-1)}{1+\phi^T(k)P(k-1)\phi(k)}\sum_{j=0}^{k-1}\phi(j)x_i(j+1) \\
&- \frac{P(k-1)\phi(k)\phi^T(k)P(k-1)}{1+\phi^T(k)P(k-1)\phi(k)}\phi(k)x_i(k+1)
\end{aligned}
$$

Substituindo-se (36), chega-se a:

$$
\begin{aligned}
\hat{\theta}_i(k) &= \hat{\theta}_i(k-1) + P(k-1)\phi(k)x_i(k+1) \\
&- \frac{P(k-1)\phi(k)\phi^T(k)}{1+\phi^T(k)P(k-1)\phi(k)}\hat{\theta}_i(k-1) \\
&- \frac{P(k-1)\phi(k)\phi^T(k)P(k-1)}{1+\phi^T(k)P(k-1)\phi(k)}\phi(k)x_i(k+1)
\end{aligned}
$$

e agrupando-se os temos em $\phi(k)x_i(k+1)$ tem-se

$$
\begin{aligned}
&\hat{\theta}_i(k) = \hat{\theta}_i(k-1) + \\
&+\frac{P(k-1)+P(k-1)\phi^T(k)P(k-1)\phi(k)-P(k-1)\phi(k)\phi^T(k)P(k-1)}{1+\phi^T(k)P(k-1)\phi(k)}\phi(k)x_i(k+1) \\
&- \frac{P(k-1)\phi(k)\phi^T(k)}{1+\phi^T(k)P(k-1)\phi(k)}\hat{\theta}_i(k-1)
\end{aligned}
$$

ou

$$
\begin{aligned}
\hat{\theta}_i(k) &= \hat{\theta}_i(k-1) + \frac{P(k-1)}{1+\phi^T(k)P(k-1)\phi(k)}\phi(k)x_i(k+1) \\
&- \frac{P(k-1)\phi(k)\phi^T(k)}{1+\phi^T(k)P(k-1)\phi(k)}\hat{\theta}_i(k-1)
\end{aligned}
$$

que pode ser reescrita como

$$
\hat{\theta}_i(k) = \hat{\theta}_i(k-1) + \frac{P(k-1)\phi(k)}{1+\phi^T(k)P(k-1)\phi(k)}\left(x_i(k+1) - \phi^T(k)\hat{\theta}_i(k)\right)
$$

Portanto, a solução para o problema (35) pode ser obtida de forma recursiva através de

$$\hat{\theta}_i(k+1) = \hat{\theta}_i(k) + \frac{P(k)\phi(k)}{\rho + \phi^T(k)P(k)\phi(k)} \left(x_i(k+1) - \phi^T(k)\hat{\theta}_i(k) \right)$$

$$P(k+1) = P(k) - \frac{P(k)\phi(k)\phi^T(k)P(k)}{\rho + \phi^T(k)P(k)\phi(k)}$$

onde $P(k)$ é a matriz de covariância do erro de estimação.

5.3 Lei de Controle

Com a determinação dos parâmetros $F(k)$ e $G(k)$, uma lei de controle ótimo pode ser implementada. Para tanto, pode-se utilizar a seguinte função custo

$$J(k) = \frac{1}{2}x^T(k+1)Qx(k+1) + \frac{1}{2}u^T(k)Ru(k)$$

Esta função custo *one-step ahead* indica que o objetivo do controle ótimo representa um compromisso entre levar instantaneamente os erros de posição e velocidade sobre a trajetória nominal para zero, ao mesmo tempo em que limita a energia de controle.

O controle ótimo é, então determinado por

$$u^*(k) = \underset{u(k)}{\text{Arg}} \quad \min J(k) \tag{37}$$

Substituindo (34) em (37) resulta

$$J(k) = \frac{1}{2}\left[(F(k)x(k) + G(k)u(k))^T Q \,(F(k)x(k) + G(k)u(k)) + u^T(k)Ru(k) \right]$$

Fazendo $\left.\frac{\partial J(k)}{\partial u(k)}\right|_{u(k)=u^*(k)} = 0$ tem-se

$$G^T(k)Q\,(F(k)x(k) + G(k)u^*(k)) + (F(k)x(k) + G(k)u^*(k))\,QG(k) + u^*(k)R = 0$$

ou, considerando que Q e R são simétricas[1]:

$$G^T(k)F(k)x(k) + \left(G^T(k)QG(k) + R\right)u^*(k) = 0$$

e portanto

$$u^*(k) = -\left(G^T(k)QG(k) + R\right)^{-1} G(k)F(k)x(k)$$

A figura 16 mostra um diagrama de blocos completo do controle de perturbação adaptativo.

[1] Se M for simétrica tem-se $Mv = v^T M$

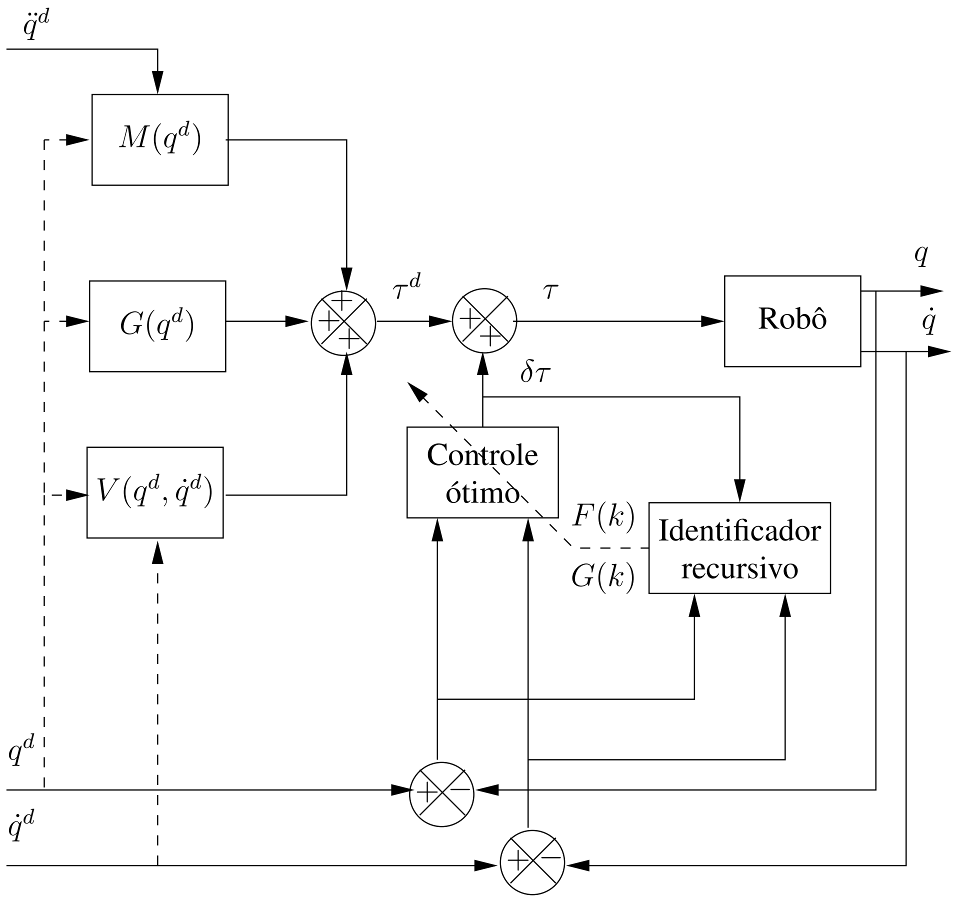

Figura 16: Controle de perturbação adaptativo.

Referências

[1] L. A. Aguirre. *Introdução à Identificação de Sistemas: Técnicas Lineares e Não Lineares Aplicadas a Sistemas Reais*. Editora UFMG, Belo Horizonte, MG, 2000.

[2] G. C. Goodwin and K. S. Sin. *Adaptive Filtering, Prediction and Control*. Prentice-Hall Information and System Sciences Series. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1984.

A Função de Transferência de Malha Fechada

A figura 17 mostra um sistema de controle em malha fechada.

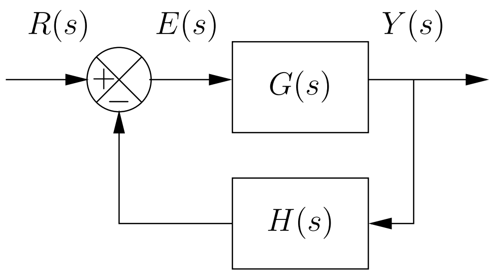

Figura 17: Sistema de controle com realimentação.

$$E(s) = R(s) - H(s)Y(s)$$

$$Y(s) = G(s)E(s) \Longrightarrow E(s) = \frac{Y(s)}{G(s)}$$

$$H(s)Y(s) + \frac{Y(s)}{G(s)} = R(s)$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

B Lema de Inversão de Matrizes

Lema 1 (Lema de Inversão de Matrizes[1]) *Sejam A, B, C e D matrizes tais que A, C e $(A + BCD)$ sejam inversíveis, então*

$$(A + BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B\left(C^{-1} + DA^{-1}B\right)^{-1}DA^{-1} \qquad (38)$$

Prova 1 *Pré-multiplicando-se ambos os lados de (38) por $(A + BCD)$ tem-se:*

$$(A+BCD)(A+BCD)^{-1} = (A+BCD)A^{-1} - (A+BCD)A^{-1}B\left(C^{-1} + DA^{-1}B\right)^{-1}DA^{-1}$$

$$I = I + BCDA^{-1} - \left(I + BCDA^{-1}\right)B\left(C^{-1} + DA^{-1}B\right)^{-1}DA^{-1}$$

$$I = I + BCDA^{-1} - \left(B + BCDA^{-1}B\right)\left(C^{-1} + DA^{-1}B\right)^{-1}DA^{-1}$$

Colocando-se BC em evidência no terceiro termo, tem-se

$$I = I + BCDA^{-1} - BC\left(C^{-1} + DA^{-1}B\right)\left(C^{-1} + DA^{-1}B\right)^{-1} DA^{-1}$$

$$I = I + BCDA^{-1} - BCDA^{-1}$$

e portanto

$$I = I$$

C Exercícios

1. Seja um sistema eletromecânico como da figura 3 com os parâmetros:

$$\begin{aligned}
n &= 0.1 \\
L_a &= 0 \\
R_a &= 0.2\Omega \\
K_a &= 0.06 V/rad/s \\
K_T &= 10 \times 10^{-5} kgm/A \\
J_m &= 1.67 \times 10^{-5} kgm/rad/s^2 \\
f_m &= 0 \\
J_l &= 7.33 \times 10^{-3} kgm/rad/s^2 \\
f_l &= 6.67 \times 10^{-2} kgm/rad/s
\end{aligned}$$

   (a) O obtenha a função de transferência $G_p(s) = \Theta_l(s)/V_a(s)$.

   (b) O obtenha a função de transferência $G_v(s) = \Omega_l(s)/V_a(s)$.

2. Simule a resposta ao degrau do sistema $G_v(s)$

3. Projete um controlador de posição para o sistema.

4. Simule a resposta do sistema em malha fechada para uma referência tipo degrau.