

Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Escola de Engenharia
Departamento de Sistemas Elétricos de Automação e Energia
ENG04479-Robótica-A

Modelo Cinemático Inverso

Prof. Walter Fetter Lages

29 de abril de 2015

1 Problema Cinemático Inverso

O problema cinemático inverso consiste em obter-se os valores das variáveis de junta do manipulador a partir da posição e orientação (desejada) do efetuador final. Ou seja, deseja-se computar $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ a partir de um ${}^0T_n^d$ especificada.

Igualando-se a matriz ${}^0T_n^d$ e a matriz 0T_n computada pelo modelo cinemático direto pode-se obter 16 equações envolvendo as variáveis de junta. Destas equações, 4 são triviais. Outras 9 são referentes à parte de rotação da matriz de transformação homogênea e portanto apenas 3 destas equações são independentes. A parte de translação da matriz de transformação homogênea fornece outras 3 equações independentes. Tem-se portanto um sistema com 6 equações e n incógnitas correspondentes às variáveis de junta.

Assim, se o manipulador tiver 6 graus de liberdade, tem-se, a princípio, um sistema de equações que pode ser solucionado para obter-se os valores das variáveis de junta para qualquer posição e orientação especificada para o efetuador final.

2 Considerações

1. Existência de Soluções
2. Multiplicidade de Soluções
3. Método de Solução
 - (a) Soluções em Forma Fechada
 - i. Método Algébrico
 - ii. Método Geométrico

- iii. Solução de Pieper
- (b) Soluções em Forma Aberta
 - i. Métodos Numéricos

3 Método Algébrico

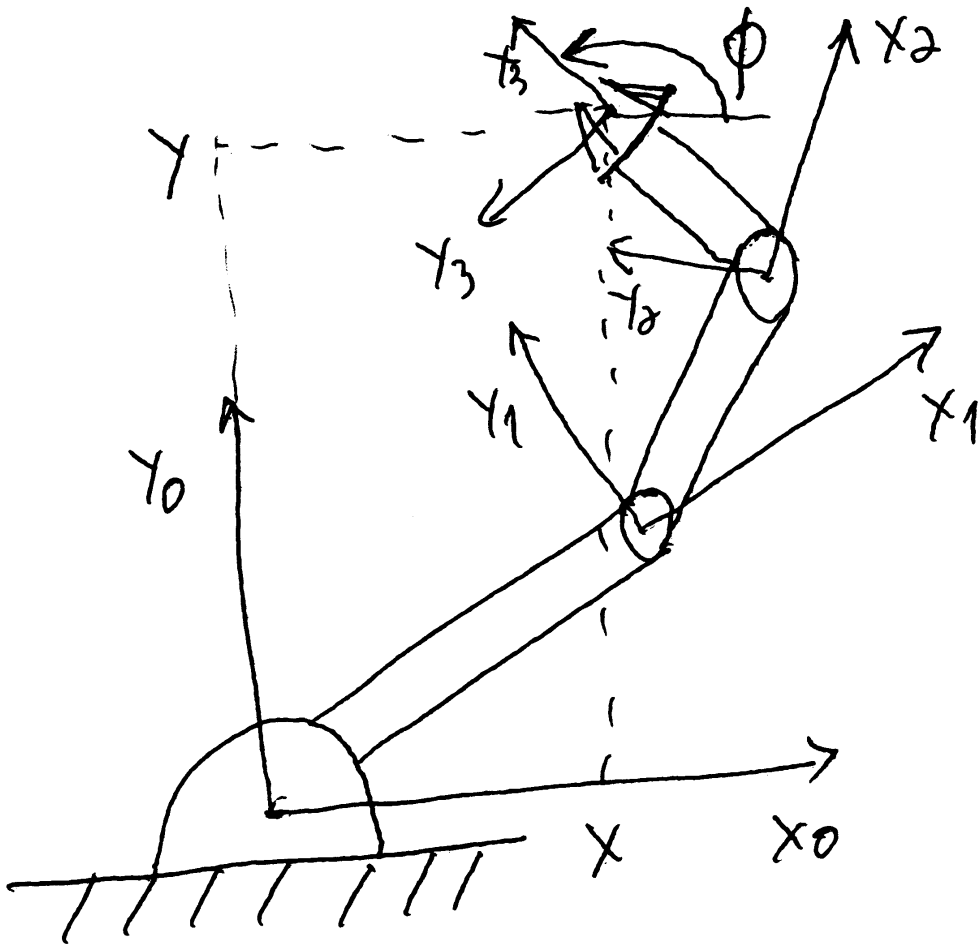


Figura 1: Modelo cinemático inverso pelo método algébrico.

$${}^0T_3 = \begin{bmatrix} C_{123} & -S_{123} & 0 & l_1C_1 + l_2C_{12} + l_3C_{123} \\ S_{123} & C_{123} & 0 & l_1S_1 + l_2S_{12} + l_3S_{123} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0T_3^d = \begin{bmatrix} C_\phi & -S_\phi & 0 & x \\ S_\phi & C_\phi & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Fazendo-se ${}^0T_3^d = {}^0T_3$ pode-se obter as equações

$$C_\phi = C_{123} \quad (1)$$

$$S_\phi = S_{123} \quad (2)$$

$$x = l_1C_1 + l_2C_{12} + l_3C_{123} \quad (3)$$

$$y = l_1S_1 + l_2S_{12} + l_3S_{123} \quad (4)$$

Substituindo-se as expressões (1) e (2) em (3) e (4) e rearranjando-se de forma que os termos conhecidos estejam de um lado da igualdade e os termos dependentes das incógnitas estejam do outro, tem-se

$$x - l_3C_\phi = l_1C_1 + l_2C_{12} \quad (5)$$

$$y - l_3S_\phi = l_1S_1 + l_2S_{12} \quad (6)$$

Elevando-se ao quadrado e somando-se as expressões (5) e (6) resulta

$$\begin{aligned} (x - l_3C_\phi)^2 + (y - l_3S_\phi)^2 &= l_1^2C_1^2 + 2l_1C_1l_2C_{12} + l_2^2C_{12}^2 + l_1^2S_1^2 + 2l_1S_1l_2S_{12} + l_2^2S_{12}^2 \\ &= l_1^2 + l_2^2 + 2l_1l_2(C_1C_{12} + S_1S_{12}) \\ &= l_1^2 + l_2^2 + 2l_1l_2\cos(\theta_1 - (\theta_1 + \theta_2)) \\ &= l_1^2 + l_2^2 + 2l_1l_2C_2 \end{aligned}$$

e portanto

$$C_2 = \frac{(x - l_3C_\phi)^2 + (y - l_3S_\phi)^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1l_2} \quad (7)$$

Obviamente deve-se ter $-1 \leq C_2 \leq 1$. No entanto, o valor calculado através da expressão (7) pode eventualmente estar fora desta faixa. Isto significa que o ponto (x, y, ϕ) está fora do espaço de trabalho do manipulador.

Para obter-se o valor do ângulo θ_2 deve-se evitar o uso da função $\text{acos}(\cdot)$, pois desta forma perde-se a informação de quadrante do ângulo. O correto é calcular o valor de θ_2 através da função $\text{atan2}(\cdot, \cdot)$ ¹ Para tanto necessita-se obter o valor de S_2 , através de

¹Esta função retorna o valor do ângulo no quadrante correto, entre $-\pi$ e $+\pi$.

$$S_2 = \pm \sqrt{1 - C_2^2} \quad (8)$$

Note-se que os dois sinais na expressão (8) indicam a existência de duas possíveis soluções: Uma com o cotovelo do robô para cima e outra com o cotovelo para baixo. Pode-se portanto, calcular o valor de θ_2 pela expressão

$$\theta_2 = \text{atan2}(S_2, C_2) \quad (9)$$

Conhecendo-se θ_2 , pode-se, de (5) e (6), escrever:

$$\begin{aligned} x - l_3 C_\phi &= l_1 C_1 + l_2 C_1 C_2 - l_2 S_1 S_2 \\ y - l_3 S_\phi &= l_1 S_1 + l_2 S_1 C_2 + l_2 C_1 S_2 \end{aligned}$$

de onde é possível obter-se

$$x - l_3 C_\phi = K_1 C_1 - K_2 S_1 \quad (10)$$

$$y - l_3 S_\phi = K_1 S_1 + K_2 C_1 \quad (11)$$

com

$$\begin{aligned} K_1 &= l_1 + l_2 C_2 \\ K_2 &= l_2 S_2 \end{aligned} \quad (12)$$

Através das seguintes mudanças de variáveis

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{K_1^2 + K_2^2} \\ \gamma &= \text{atan2}(K_2, K_1) \end{aligned}$$

tem-se

$$K_1 = r \cos \gamma \quad (13)$$

$$K_2 = r \sin \gamma \quad (14)$$

Aplicando as transformações (13) e (14) nas expressões (10) e (11), tem-se

$$\begin{aligned} x - l_3 C_\phi &= r C_\gamma C_1 - r S_\gamma S_1 \\ y - l_3 S_\phi &= r C_\gamma S_1 + r S_\gamma C_1 \end{aligned}$$

que pode ser escrita de forma mais compacta como

$$\begin{aligned}\frac{x - l_3 C_\phi}{r} &= \cos(\gamma + \theta_1) \\ \frac{y - l_3 S_\phi}{r} &= \sin(\gamma + \theta_1)\end{aligned}$$

de onde pode-se obter

$$\gamma + \theta_1 = \text{atan2}\left(\frac{y - l_3 S_\phi}{r}, \frac{x - l_3 C_\phi}{r}\right) = \text{atan2}(y - l_3 S_\phi, x - l_3 C_\phi)$$

ou

$$\theta_1 = \text{atan2}(y - l_3 S_\phi, x - l_3 C_\phi) - \gamma = \text{atan2}(y - l_3 S_\phi, x - l_3 C_\phi) - \text{atan2}(K_2, K_1)$$

e finalmente

$$\theta_1 = \text{atan2}(y - l_3 S_\phi, x - l_3 C_\phi) - \text{atan2}(l_2 S_2, l_1 + l_2 C_2) \quad (15)$$

Note-se que o sinal de θ_2 afeta S_2 que afeta θ_1 .

Conhecendo-se θ_1 e θ_2 pode-se determinar θ_3 . De (1) e (2) tem-se

$$\text{atan2}(S_\phi, C_\phi) = \text{atan2}(S_{123}, C_{123})$$

ou

$$\text{atan2}(S_\phi, C_\phi) = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3$$

de onde

$$\theta_3 = \text{atan2}(S_\phi, C_\phi) - \theta_1 - \theta_2 \quad (16)$$

4 Método Geométrico

A solução para o problema cinemático inverso através do método geométrico baseia-se na decomposição do manipulador em planos.

Considerando-se a configuração com o cotovelo para cima tem-se, pela Lei dos Cossenos:

$$(x - l_3 C_\phi)^2 + (y - l_3 S_\phi)^2 = l_1^2 + l_2^2 - 2l_1 l_2 \cos(180^\circ + \theta_2)$$

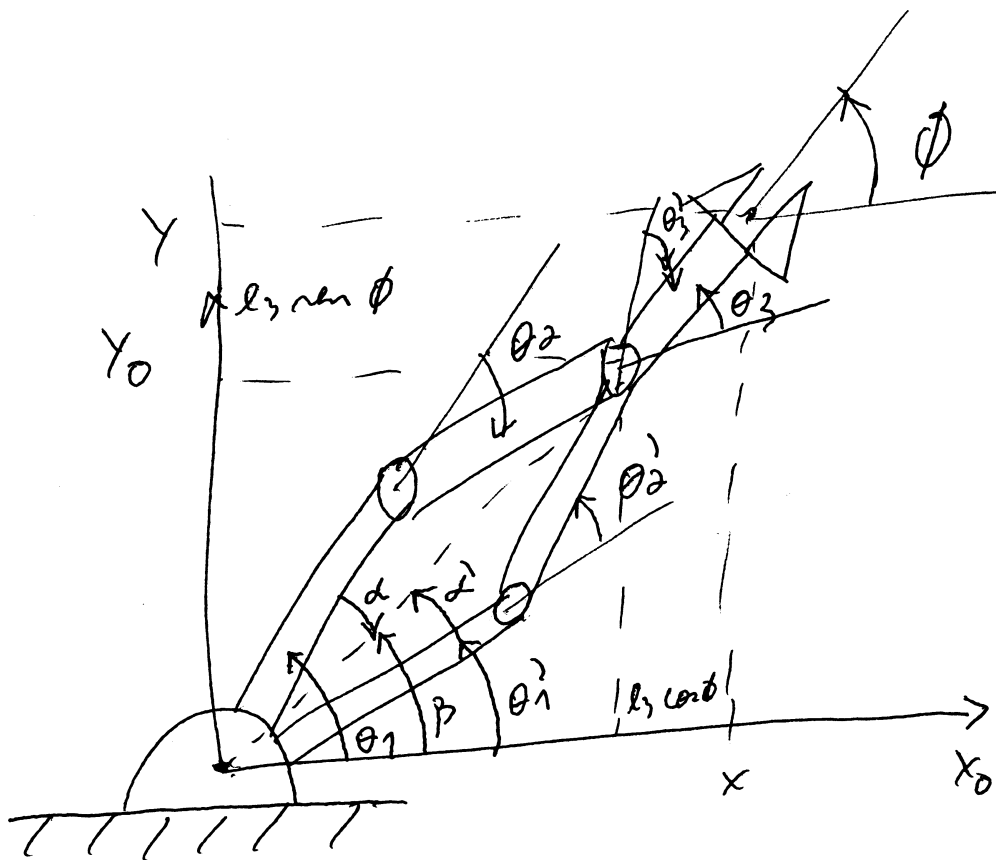


Figura 2: Modelo cinemático inverso pelo método geométrico.

já que nesta situação $\theta_2 < 0$.

E como $\cos(180^\circ + \theta_2) = -\cos \theta_2$, chega-se a

$$C_2 = \frac{(x - l_3 C_\phi)^2 + (y - l_3 S_\phi)^2 - l_1^2 + l_2^2}{2l_1 l_2}$$

Neste caso, o valor de θ_2 pode ser calculado por

$$\theta_2 = \text{acos}(C_2)$$

pois devido à hipótese de que $\theta_2 < 0$, o quadrante do ângulo está bem definido.

Pode-se facilmente perceber que para a configuração com o cotovelo para baixo tem-se

$$\theta_2' = -\theta_2$$

Definindo-se

$$\beta = \text{atan2}(y - l_3 S_\phi, x - l_3 C_\phi)$$

Tem-se que quando o cotovelo está para cima $\theta_1 = \beta + \alpha$, com $\alpha \leq 0$ e quando o cotovelo está para baixo $\theta_1' = \beta - \alpha'$, com $\alpha' \geq 0$. α pode ser obtido utilizando-se a Lei dos Cossenos:

$$l_2^2 = \left(\sqrt{(x - l_3 C_\phi)^2 + (y - l_3 S_\phi)^2} \right)^2 + l_1^2 - 2l_1 \sqrt{(x - l_3 C_\phi)^2 + (y - l_3 S_\phi)^2} \cos \alpha$$

Logo

$$\cos \alpha = \frac{(x - l_3 C_\phi)^2 + (y - l_3 S_\phi)^2 + l_1^2 - l_2^2}{2l_1 \sqrt{(x - l_3 C_\phi)^2 + (y - l_3 S_\phi)^2}}$$

e novamente tem-se que α pode ser calculado por $\alpha = \text{acos}(\cos \alpha)$, já que o quadrante do ângulo é conhecido. Note que $\alpha' = -\alpha$.

Tem-se também que $\phi = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3$. Portanto

$$\theta_3 = \phi - \theta_1 - \theta_2$$

e

$$\theta_3' = \phi - \theta_1' - \theta_2'$$

5 Solução de Pieper

Para manipuladores com 6 (ou 5 ou 4) graus de liberdade, quanto as 3 (ou 2 ou 1) últimas juntas forem rotacionais e os seus eixos interceptam-se em um único ponto, é possível obter-se uma solução geral para o problema cinemático inverso [4]. Neste caso, é possível desacoplar o problema cinemático inverso em dois problemas mais simples, o problema de posicionamento inverso e o problema de orientação inverso [8].

Supondo-se um manipulador com n graus de liberdade, o problema cinemático inverso é encontrar os valores de $q = [q_1 \dots q_n]^T$ tais que

$${}^0T_n^d = {}^0T_1 \dots {}^{n-1}T_n = {}^0T_n \quad (17)$$

onde ${}^0T_n^d$ é a matriz de transformação homogênea desejada, ou seja, a matriz de transformação homogênea com a posição e orientação do efetuador do robô para a qual se deseja determinar os valores das variáveis de junta.

A expressão (17) pode ser desmembrada em duas equações, uma correspondendo as especificações de posição e outra correspondendo as especificações de orientação:

$${}^0P_n^d = {}^0P_n \quad (18)$$

$${}^0R_n^d = {}^0R_n \quad (19)$$

onde ${}^0P_n^d$ e ${}^0R_n^d$ representam, respectivamente, a posição e a orientação desejadas para o sistema de coordenadas n .

Se os eixos das juntas $n - 2$, $n - 1$ e n se interceptam no ponto Q , as origens dos sistemas de coordenadas $\{n - 1\}$ e $\{n - 2\}$ (atribuídos segundo as convenções de Denavit-Hartenberg) estarão neste ponto. Neste caso, o movimento das juntas $n - 2$, $n - 1$ e n não alterará a posição do ponto Q . Como a origem do sistema $\{n\}$ é apenas uma translação por uma distância d_n ao longo de \hat{Z}_{n-1} a partir de Q e \hat{Z}_{n-1} está alinhado com \hat{Z}_n , tem-se que

$${}^0P_{norg} = {}^0Q + {}^0R_{n-1}d_n{}^{n-1}\hat{Z}_{n-1} = {}^0Q + {}^0R_n d_n {}^n\hat{Z}_n$$

Portanto, para posicionar o efetuador do robô no ponto ${}^0P_n^d$, basta fazer

$${}^0Q = {}^0P_n^d - {}^0R_n^d d_n {}^n\hat{Z}_n$$

Por outro lado,

$${}^0Q = {}^0P_{(n-2)org} = {}^0T_{n-3}{}^{n-3}P_{(n-2)org}$$

que é função apenas de $q_1 \dots q_{n-3}$. Assim, pode-se determinar $q_1 \dots q_{n-3}$ a partir de

$${}^0P_n^d - {}^0R_n^d d_n {}^n\hat{Z}_n = {}^0T_{n-3}{}^{n-3}P_{(n-2)org}$$

A determinação dos valores de $q_1 \dots q_{n-3}$ implica ${}^0R_{n-3}$ estar determinada e como

$${}^0R_n^d = {}^0R_{n-3}{}^{n-3}R_n$$

deve-se fazer

$${}^{n-3}R_n = {}^0R_{n-3}^{-1} {}^0R_n^d$$

ou ainda

$${}^{n-3}R_n = {}^0R_{n-3}^T {}^0R_n^d$$

de onde pode-se determinar os valores de $q_{n-2} \dots q_n$.

6 Método Numérico

Existem diversos métodos numéricos para calcular a cinemática inversa. Vide [2, 3] para um resumo das técnicas. Aqui serão apresentadas apenas as mais simples. Justamente por serem mais simples, estas técnicas são pouco eficientes do ponto de vista computacional e muito susceptíveis a problemas com singularidades.

6.1 Inversa generalizada

A inversa do jacobiano é tal que, dada uma pequena variação da posição da garra, é possível calcular a variação nas coordenadas de junta[6]:

$$\Delta q = J^{-1}(q)\Delta X$$

Em geral, não existe a inversa do jacobiano, mas sim uma inversa generalizada B , que cumpre alguma das condições de Moore-Penrose:

1. $JBJ = J$
2. $BJB = B$
3. $(JB)^T = JB$
4. $(BJ)^T = BJ$

Se B cumpre todas as quatro condições, é dita pseudo-inversa, e é única: $B = J^\dagger$.

Achar a inversa generalizada é um processo lento e que não lida adequadamente com singularidades.

6.2 Transposta do Jacobiano

Em lugar de utilizar a pseudo-inversa do jacobiano, pode-se utilizar a transposta:

$$\Delta q = J^T(q)\Delta X$$

É muito mais eficiente do ponto de vista computacional e evita problemas com singularidades.

Esta aproximação é motivada por considerações físicas com base no conceito de trabalho virtual.

Para resolver certos problemas de escala, pode-se introduzir um fator de escala h , e iterar até atingir a convergência:

$$\Delta q^{(i+1)} = hJ^T(q)\Delta X^{(i)}$$

7 Modelo Cinemático Inverso do Manipulador Barrett WAM

O modelo Cinemático Inverso do manipulador Barrett WAM apresentado nesta seção segue a abordagem de [7], onde o modelo é desenvolvido utilizando método geométrico, mas procura-se fazer os cálculos através de uma abordagem algébrica e não apenas geométrica.

Utilizando-se a idéia do método de Piper de desacoplar posição e orientação, tem-se que a posição desejada do punho do robô pode ser obtida por:

$${}^{base}P_{5org}^d = {}^{base}P_{garra}^d - {}^{base}R_{garra}^d d_{garra} {}^{garra}\hat{Z}_{garra} \quad (20)$$

A análise das possíveis posições do manipulador é realizada tendo como base o esquema representado na Figura 3. Nesta análise geométrica, considera-se que as partes inferior e superior do manipulador geram um volume de trabalho correspondente a uma casca esférica, sendo que a intersecção destas, pode gerar uma circunferência, um ponto ou um conjunto nulo (neste caso a posição desejada para o punho do robô não é atingível). A parte inferior do manipulador corresponde aos elementos compreendidos da base até a junta 4, e a parte superior do manipulador compreende os elementos da junta 4 até a ferramenta. Todas as possíveis soluções são calculadas considerando-se a posição normalizada do punho do manipulador posicionado verticalmente acima da junta da base.

O pontos O e B representados na Figura 3 estão localizados na origem do sistema 1 e na origem do sistema 5 respectivamente, ainda, o ponto A é a origem do sistema 3, que coincide com a origem do sistema 4.

Se os segmentos L_1 e L_2 pudessem girar livremente em torno dos pontos O e B respectivamente, a ponta de cada segmento geraria uma casca esférica com centros em O e B . Mas uma vez que os segmentos estão conectados no ponto A , a única solução possível é a intersecção das cascas esféricas geradas, sendo que esta intersecção pode resultar em uma circunferência, um ponto (que é equivalente a uma circunferência com raio zero) ou nula, sendo que interpreta-se a intersecção nula como um caso onde não há solução para o problema cinemático inverso.

Ou seja, as possíveis posições do ponto A descrevem um círculo de raio R_C em torno do ponto C que está a uma distância d_C do ponto O .

$$d_C = L_1 \cos(\alpha_1) = d - L_2 \cos(\alpha_2) \quad (21)$$

$$R_C = L_1 \sin(\alpha_1) = L_2 \sin(\alpha_2) \quad (22)$$

Da geometria apresentada na Figura 3, os ângulos γ_1 e γ_2 podem ser calculados como segue:

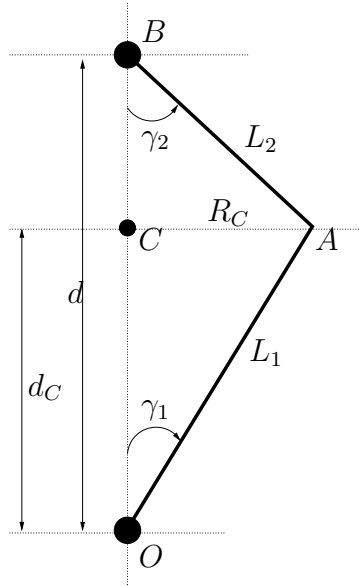


Figura 3: Geometria de intersecção dos volumes das partes inferior e superior do manipulador WAM, adaptado de [7].

$$\gamma_2 = \cos^{-1} \left[\frac{(d^2 + L_2^2 - L_1^2)}{(2dL_2)} \right] \quad (23)$$

$$\gamma_1 = \sin^{-1} \left[\frac{L_2 \sin(\gamma_2)}{(L_1)} \right] \quad (24)$$

O comprimento do segmento L_1 é calculado em relação aos sistemas de coordenadas 1, sendo que o valor resultante é uma constante que não depende das variáveis de junta:

$$L_1 = |{}^1P_{3org} - {}^1P_{1org}| \quad (25)$$

$${}^1P_{1org} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$\begin{aligned}
{}^1P_{3_{org}} &= {}^1T_2 {}^2T_3 {}^3P_{3_{org}} = \\
&\begin{bmatrix} \cos(\theta_2) & 0 & \text{sen}(\theta_2) & 0 \\ \text{sen}(\theta_2) & 0 & -\cos(\theta_2) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta_3) & 0 & -\text{sen}(\theta_3) & a_3 \cos(\theta_3) \\ \text{sen}(\theta_3) & 0 & \cos(\theta_3) & a_3 \text{sen}(\theta_3) \\ 0 & -1 & 0 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \\
&\begin{bmatrix} \cos(\theta_2)a_3 \cos(\theta_3) + \text{sen}(\theta_2)d_3 \\ \text{sen}(\theta_2)a_3 \cos(\theta_3) - \cos(\theta_2)d_3 \\ a_3 \text{sen}(\theta_3) \\ 1 \end{bmatrix} \quad (27)
\end{aligned}$$

portanto:

$$L_1 = \sqrt{a_3^2 + d_3^2} \quad (28)$$

e o comprimento do segmento L_2 é calculado em relação aos sistemas de coordenadas 3, sendo que da mesma forma que para o segmento L_1 , o resultado é uma constante que portanto não depende das variáveis de junta:

$$L_2 = |{}^3P_{5_{org}} - {}^3P_{3_{org}}| \quad (29)$$

$${}^3P_{3_{org}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (30)$$

$$\begin{aligned}
{}^3P_{5_{org}} &= {}^3T_4 {}^4T_5 {}^5P_{5_{org}} = \\
&\begin{bmatrix} \cos(\theta_4) & 0 & \text{sen}(\theta_4) & a_4 \cos(\theta_4) \\ \text{sen}(\theta_4) & 0 & -\cos(\theta_4) & a_4 \text{sen}(\theta_4) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta_5) & 0 & -\text{sen}(\theta_5) & 0 \\ \text{sen}(\theta_5) & 0 & \cos(\theta_5) & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \\
&\begin{bmatrix} d_5 \text{sen}(\theta_4) + a_4 \cos(\theta_4) \\ -d_5 \cos(\theta_4) + a_4 \text{sen}(\theta_4) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (31)
\end{aligned}$$

$$L_2 = \sqrt{a_4^2 + d_5^2} \quad (32)$$

Ainda, para calcular o valor do comprimento do segmento d utilizam-se as coordenadas dos pontos B e O , sendo que o mesmo é independente das variáveis de juntas, dependendo apenas de ${}^0P_{5org}^d$, que pode ser calculado de (20).

$$d = |B - O| \quad (33)$$

$${}^1B = {}^1P_{5org}^d = {}^1T_0 {}^0P_{5org}^d \quad (34)$$

E considerando que ${}^0P_{5org}^d$ vai ter a forma $[{}^0x_{5org}^d \quad {}^0y_{5org}^d \quad {}^0z_{5org}^d \quad 1]^T$ pode-se escrever:

$${}^1B = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & \text{sen}(\theta_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -\text{sen}(\theta_1) & \cos(\theta_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^0x_{5org}^d \\ {}^0y_{5org}^d \\ {}^0z_{5org}^d \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1){}^0x_{5org}^d + \text{sen}(\theta_1){}^0y_{5org}^d \\ -{}^0z_{5org}^d \\ -\text{sen}(\theta_1){}^0x_{5org}^d + \cos(\theta_1){}^0y_{5org}^d \\ 1 \end{bmatrix} \quad (35)$$

E com:

$${}^1O = {}^1P_{1org} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (36)$$

tem-se para d :

$$d = \sqrt{({}^0x_{5org}^d)^2 + ({}^0y_{5org}^d)^2 + ({}^0z_{5org}^d)^2} \quad (37)$$

Para calcular os ângulos de juntas θ_1 à θ_7 , são consideradas as geometrias apresentadas nas Figuras 5 e 4 que representam respectivamente o manipulador configurado com o cotovelo para fora e para dentro, e onde pode-se verificar as posições dos pontos L_J e U_J .

As possíveis posições para os pontos L_J e U_J também descrevem circunferências semelhantes a descrita pelas possíveis posições do ponto A . A partir deste ponto do trabalho, somente o ponto L_J será considerado uma vez que não há necessidade de analisar o ponto U_J para resolver o problema cinemático inverso. A circunferência referente a L_J tem raio R_{LJ} e está a uma distância d_{LJ} do ponto O .

Observando a Figura 4 pode-se verificar que:

$$d_{LJ} = d_c - l_L \text{sen}(\theta_L) \quad (38)$$

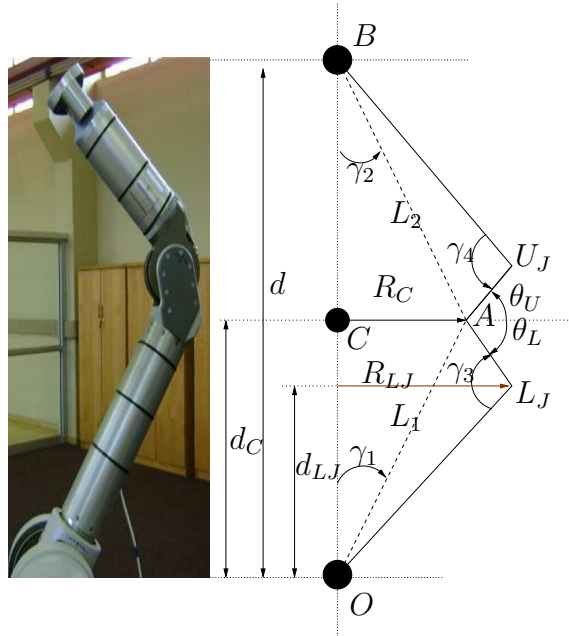


Figura 4: Posição do manipulador WAM com o cotovelo para fora, adaptado de [7].

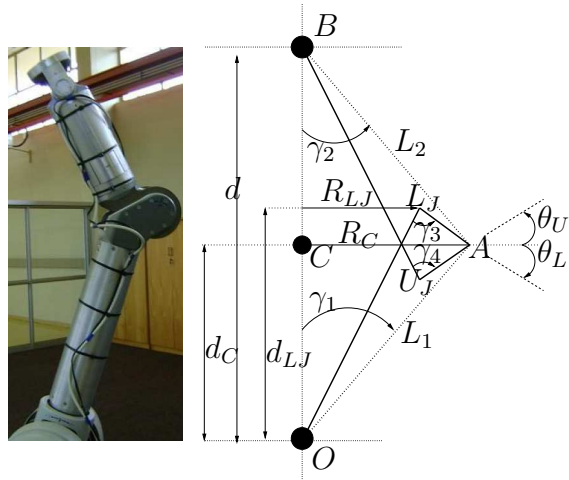


Figura 5: Posição do manipulador WAM com o cotovelo para dentro, adaptado de [7].

$$R_{LJ} = R_c + l_L \cos(\theta_L) \quad (39)$$

onde $l_L = 0.06364\text{m}$ [1] é o tamanho do "offset" do elo, ou seja, a distância do ponto A ao ponto L_J .

Para a posição com o cotovelo para fora tem-se que:

$$\gamma_3 = \frac{\pi}{2} - \text{atan2}(|a_4|, d_5) \quad (40)$$

$$\gamma_4 = \frac{\pi}{2} - \text{atan2}(a_3, d_3) \quad (41)$$

$$\theta_L = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \gamma_1\right) - \gamma_3 \quad (42)$$

$$\theta_U = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \gamma_2\right) - \gamma_4 \quad (43)$$

E para a posição com o cotovelo para dentro tem-se:

$$\theta_L = \gamma_3 - \left(\frac{\pi}{2} - \gamma_1\right) \quad (44)$$

$$\theta_U = \gamma_4 - \left(\frac{\pi}{2} - \gamma_2\right) \quad (45)$$

Deve-se observar que as possíveis posições para o ponto A descrevem uma circunferência centrada no ponto C , com raio R_C a uma distância d_C do ponto O , e que as possíveis posições para o ponto L_J descrevem uma circunferência centrada em C_{LJ} , com raio R_{LJ} a uma distância d_{LJ} do ponto O . Ainda, as Figuras 3, 4 e 5 se referem a uma posição normalizada do robô sendo que o eixo OB pode estar em qualquer orientação espacial (diferente da vertical).

As circunferências descritas pelas possíveis posições dos pontos A e L_J são paralelos e em torno do eixo OB . Pode-se parametrizar os mesmos através de seu raio R , distância D ao ponto O e ângulo $\phi \in [-\pi, \pi]$. Ou seja, tem-se cada ponto sobre uma das circunferências dada por:

$$C_n(R, D, \phi) = \begin{bmatrix} R \cos(\phi) \\ R \sin(\phi) \\ D \end{bmatrix} \quad (46)$$

Assim, as possíveis posições para o ponto A na configuração normalizada são dadas por $C_n(R_c, d_c, \phi)$ e as possíveis posições para o ponto L_J são dadas por $C_n(R_{LJ}, d_{LJ}, \phi)$, sendo que considerando-se o fato de que o eixo OB em geral

não está na vertical, as circunferências normalizadas precisam ser rotacionadas para a sua posição real.

Sendo R_n a matriz de rotação que move a posição desejada do punho do manipulador para a posição normalizada equivalente (Figura 3), tem-se:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d \end{bmatrix} = R_n {}^0 P_{5org}^d \quad (47)$$

A matriz R_n é a matriz de rotação que rotaciona um ponto em torno de um eixo arbitrário, transformando-o em outro, cujo cálculo é mostrado no apêndice C. Assim, as possíveis posições para o ponto A são dadas por:

$${}^0 A = R_n^T C_n(R_c, d_c, \phi) = \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{bmatrix} \quad (48)$$

e as possíveis posições para o ponto L_J são dadas por:

$${}^0 L_J = R_n^T C_n(R_{LJ}, d_{LJ}, \phi) = \begin{bmatrix} x_{LJ} \\ y_{LJ} \\ z_{LJ} \end{bmatrix} \quad (49)$$

Uma vez que $\gamma_3, \gamma_4, \theta_L$ e θ_U foram calculados, pode-se seguir:

$$\theta_1 = \text{atan}(y_{LJ}, x_{LJ}) \quad (50)$$

$$\theta_2 = \text{acos}\left(\frac{z_{LJ}}{d_3}\right) \quad (51)$$

$$\theta_3 = \text{atan2}(\text{sen}(\theta_3), \text{cos}(\theta_3)) \quad (52)$$

Com $\text{sen}(\theta_3)$ e $\text{cos}(\theta_3)$ calculados de:

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta_1) \cos(\theta_2) & -\text{sen}(\theta_1) \\ \text{sen}(\theta_1) \cos(\theta_2) & \cos(\theta_1) \\ -\text{sen}(\theta_2) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta_3) \\ \text{sen}(\theta_3) \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} x_{LJ} \\ y_{LJ} \\ z_{LJ} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{bmatrix} \right) \frac{1}{a_3} \quad (53)$$

$$\theta_4 = (\theta_U + \theta_L), \text{cotovelo para fora} \quad (54)$$

$$\theta_4 = (\theta_U + \theta_L), \text{cotovelo para dentro} \quad (55)$$

Os ângulos θ_5 e θ_6 podem ser calculados a partir do deslocamento da posição desejada da garra em relação a posição desejada do punho, representada no sistema de coordenadas 4, ou seja:

$$\begin{aligned} {}^4D_{garra}^5 &= {}^4T_{base} \text{ }^{base}P_{garra}^d - {}^4T_{base} \text{ }^{base}P_5^d \\ &= {}^4R_{base} \left(\text{ }^{base}P_{garra}^d - \text{ }^{base}P_5^d \right) = \begin{bmatrix} x_D \\ y_D \\ z_D \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (56)$$

E:

$$\theta_5 = \text{atan2}(y_D, x_D) + \pi, \text{ cotovelo para fora} \quad (57)$$

$$\theta_5 = \text{atan2}(y_D, x_D), \text{ cotovelo para dentro} \quad (58)$$

$$\theta_6 = \text{atan2} \left(z_D, \sqrt{x_D^2 + y_D^2} \right) - \frac{\pi}{2}, \text{ cotovelo para fora} \quad (59)$$

$$\theta_6 = \pi - \text{atan2} \left(z_D, \sqrt{x_D^2 + y_D^2} \right), \text{ cotovelo para dentro} \quad (60)$$

Observando que $[x_D \ y_D \ z_D]^T$ pode ser calculado de (56). Para proceder com o cálculo de θ_7 , tem-se:

$$\text{ }^{base}R_{garra}^d = \text{ }^{base}R_0^0 R_6^{d6} R_7^{d7} R_{garra} \quad (61)$$

E deve-se observar que $\text{ }^{base}R_{garra}^d$ é especificado e conhecido, $\text{ }^{base}R_0$ e ${}^7R_{garra}$ são constantes e conhecidos e ${}^0R_6^d$ pode ser calculado a partir de $\theta_1 \cdots \theta_6$ que já foram determinados. E de (61) pode-se obter:

$${}^6R_7^d = {}^6R_0^0 R_{base} \text{ }^{base}R_{garra}^d \text{ }^{garra}R_7 \quad (62)$$

Por outro lado, dado que $a_7 = \alpha_7 = 0$ tem-se:

$${}^6R_7^d = \begin{bmatrix} \cos(\theta_7) & -\text{sen}(\theta_7) & 0 & 0 \\ \text{sen}(\theta_7) & \cos(\theta_7) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & 0 & 0 \\ r_{21} & r_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (63)$$

e portanto

$$\theta_7 = \text{atan2}(r_{21}, r_{11}) \quad (64)$$

Referências

- [1] Barrett Technology, Inc., Cambridge, MA. *WAM User Manual*, 2011.
- [2] S. R. Buss. Introduction to inverse kinematics with jacobian transpose, pseudo-inverse and damped least squares methods. Typeset Manuscript, available from <http://math.ucsd.edu/~sbuss/ResearchWeb>, Apr 2004.
- [3] S. R. Buss and J.-S. Kim. Selectively damped least squares for inverse kinematics. Typeset Manuscript, available from <http://math.ucsd.edu/~sbuss/ResearchWeb>, Apr 2004.
- [4] J. J. Craig. *Introduction to Robotics Mechanics and Control*. Addison-Wesley, second edition, 1989.
- [5] K. S. Fu, R. C. Gonzales, and C. S. G. Lee. *Robotics Control, Sensing, Vision and Intelligence*. Industrial Engineering Series. McGraw-Hill, New York, 1987.
- [6] V. F. Romano, editor. *Robótica Industrial Aplicação na Indústria de Manufatura e de Processos*. Edgard Blücher, São Paulo, 2002.
- [7] G. K. Singh and J. Claassens. An analytical solution for the inverse kinematics of a redundant 7dof manipulator with link offsets. In *Proceedings of IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, pages 2976–2982, Taipei, Taiwan, 2010. IEEE Press.
- [8] M. W. Spong and M. Vidyasagar. *Robot Dynamics and Control*. John Wiley & Sons, 1989.

A Relações Trigonométricas Úteis

A.1 Cosseno da Soma

$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$$

A.2 Seno da Soma

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$$

A.3 Lei dos Cossenos

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

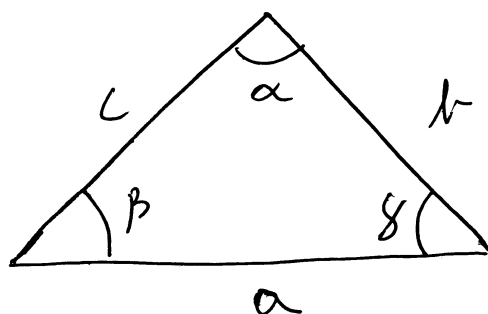


Figura 6: Definição de ângulos e vértices para a Lei dos Senos e Lei dos Cossenos.

A.4 Lei dos Senos

$$\frac{a}{\text{sen } \alpha} = \frac{b}{\text{sen } \beta} = \frac{c}{\text{sen } \gamma}$$

A.5 Lei das Tangentes

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan\left(\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\right)}{\tan\left(\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\right)}$$

B Soluções Algébricas Reduzidas a Polinômios

Seja uma equação trigonométrica na forma

$$a \cos \theta + b \text{sen } \theta = c$$

Esta equação pode ser resolvida para θ através das seguintes transformações algébricas:

$$\cos \theta = \frac{1-u^2}{1+u^2} \quad (65)$$

$$\text{sen } \theta = \frac{2u}{1+u^2} \quad (66)$$

$$\tan \frac{\theta}{2} = u \quad (67)$$

Aplicando-se as transformações, tem-se

$$a \frac{1-u^2}{1+u^2} + b \frac{2u}{1+u^2} = c$$

$$a(1 - u^2) + 2bu = c(1 + u^2)$$

$$a - au^2 + 2bu = c + cu^2$$

$$(c + a)u^2 - 2bu + (c - a) = 0$$

$$u = \frac{2b \pm \sqrt{4b^2 - 4(c + a)(c - a)}}{2(c + a)}$$

$$u = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - c^2 + a^2}}{c + a}$$

$$\theta = 2 \tan^{-1} \left(\frac{b \pm \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{a + c} \right)$$

C Matriz de Rotação que Relaciona Dois Pontos

Seja P_n um ponto obtido a partir da rotação de um ponto P em torno de um eixo arbitrário. Deseja-se determinar R_n tal que

$$P_n = R_n P \quad (68)$$

Inicialmente, nota-se que R_n não altera o módulo dos vetores que representam os pontos, portanto é conveniente continuar o desenvolvimento com vetores unitários:

$$P_1 = \frac{P}{|P|} \quad (69)$$

$$P_2 = \frac{P_n}{|P_n|} \quad (70)$$

A partir dos vetores unitários, o cosseno e o seno do ângulo de rotação entre eles pode ser obtido por:

$$\cos(\phi) = P_1 \cdot P_2 = P_1^T P_2 \quad (71)$$

$$\text{sen}(\phi) = |P_1 \times P_2| \quad (72)$$

onde \cdot e \times representam respectivamente os produtos escalar e vetorial entre os dois vetores. Por outro lado, o eixo em torno do qual é feita a rotação pode ser obtido por:

$$r = \frac{1}{\text{sen}(\phi)}(P_1 \times P_2) = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{bmatrix} \quad (73)$$

A partir do seno e cosseno do ângulo de rotação e do eixo de rotação é possível obter a matriz de rotação, que tem a forma [5]:

$$R_n = \begin{bmatrix} r_x^2 \text{vers}(\phi) + \cos(\phi) & r_x r_y \text{vers}(\phi) - r_z \text{sen}(\phi) & r_x r_z \text{vers}(\phi) + r_y \text{sen}(\phi) \\ r_x r_y \text{vers}(\phi) + r_z \text{sen}(\phi) & r_y^2 \text{vers}(\phi) + \cos(\phi) & r_y r_z \text{vers}(\phi) - r_x \text{sen}(\phi) \\ r_x r_z \text{vers}(\phi) - r_y \text{sen}(\phi) & r_y r_z \text{vers}(\phi) + r_x \text{sen}(\phi) & r_z^2 \text{vers}(\phi) + \cos(\phi) \end{bmatrix} \quad (74)$$

onde $\text{vers}(\phi) = 1 - \cos(\phi)$.