

Aspectos Fundamentais do Método dos Elementos Finitos

1 Introdução

O Método dos Elementos Finitos, doravante abreviado como MEF, tem suas origens nos anos 40, tendo sido entretanto vastamente utilizado apenas nos últimos 20-30 anos, graças aos avanços tecnológicos ocorridos nos equipamentos computacionais. Ele consiste basicamente numa adaptação/modificação de métodos de aproximação conhecidos já no início deste século, como por exemplo o *Método de Ritz*, estabelecido em 1909. Ele é atualmente considerado um método matemático para a solução de equações diferenciais parciais, entre as quais se inclui a *Equação de Poisson*, *Equação de Laplace*, *Equação de Helmholtz*, *Navier-Stokes*, etc... Devido às suas características de flexibilidade e estabilidade numérica, ele pode ser implementado na forma de um sistema computacional (programa de computador) de forma consistente e sistemática, fato que explica a sua grande popularidade nos dias atuais. Um grande impulso para o seu desenvolvimento e aperfeiçoamento foi dado pela indústria aeroespacial, onde o método vem tendo larga aplicação desde os anos 50, sendo utilizado, entre outros, para o projeto e análise de estruturas complexas de aeronaves, as quais certamente não poderiam ser analisadas e projetadas de forma segura usando-se apenas técnicas tradicionais analíticas. Entre as muitas áreas em que o MEF pode ser aplicado cita-se: projeto e análise de estruturas, análise de escoamento de fluidos, distribuição de temperaturas, eletromagnetismo, projeto de equipamentos eletromecânicos (máquinas, transformadores, contadores, etc...). Em muitos casos práticos, o Método dos Elementos Finitos é a única ferramenta capaz de fornecer uma solução aceitável, ainda que sob o ponto de vista matemático a solução seja considerada como uma aproximação. Finalmente, devido à utilidade e interesse para diversas áreas técnicas, o MEF foi objeto de um número incalculável de artigos e livros publicados nos últimos 20 anos, sendo também incluído como disciplina obrigatória nos currículos da grande maioria das universidades européias e americanas, fato que também já ocorre em muitas universidades brasileiras. À medida que técnicas computacionais e numéricas desempenham um papel cada vez mais relevante na vida do engenheiro, torna-se fundamental o conhecimento dos fundamentos do MEF e da sua aplicação prática, especialmente para aqueles que trabalham em áreas de projeto e análise.

O objetivo desta apostila é apresentar de forma introdutória os aspectos mais relevantes do método, utilizando para tanto uma abordagem em apenas uma dimensão. A abordagem envolve conceitos elementares da teoria de funções, álgebra e cálculo, os quais são abordados nas disciplinas básicas dos cursos de engenharia. Também são apresentados exemplos simples e ilustrativos dos conceitos. Ao final de cada seção são propostos exercícios que poderão (na verdade, deveriam) ser resolvidos com ajuda de softwares comerciais tais como *Matlab*, *Mathcad*, etc... A resolução dos exercícios propostos facilitará não apenas a assimilação dos conteúdos apresentados mas também a aplicação do métodos a outros casos práticos semelhantes.

2 Problema de Valor de Contorno com Dois Pontos

A fim de ilustrar a idéia básica do método dos elementos finitos, será inicialmente considerado um caso bastante simples de um problema de valor de contorno em uma dimensão, denominado de *problema de valor de contorno com dois pontos*. O problema consiste em encontrar a solução da equação diferencial que segue:

$$-\frac{d}{dx}\left(p \cdot \frac{du}{dx}\right) + q \cdot u = f(x) \quad 0 < x < 1 \quad (1)$$

$$u(0) = 0 \quad u(1) = 0 \quad (2)$$

Problemas de valor de contorno são caracterizados pelo fato de que as condições de contorno são fixadas nos extremos do intervalo considerado. Por outro lado, problemas em que ambas as condições de contorno se referem ao mesmo ponto são chamados de *problemas de valor inicial*. Problemas de valor de contorno são descritos em geral por equações diferenciais parciais, problemas de valor inicial, por outro lado, são descritos por equações diferenciais ordinárias.

Na equação (1) p e q são constantes positivas e $f(x)$ é uma função dada e conhecida. As condições de contorno (2) são típicas condições de contorno homogêneas; elas são chamadas de *condições de contorno de Dirichlet homogêneas*. Existem ainda outros tipos de condições de contorno que podem igualmente ser tratadas pelos métodos apresentados nesta apostila. A escolha da condição de Dirichlet homogênea visa aqui meramente simplificar a análise.

Uma vez que a equação (1) é do tipo linear com coeficientes constantes e não homogênea (lado direito diferente de zero), pode-se facilmente encontrar uma solução analítica para a mesma. Todavia, será considerada inicialmente uma solução utilizando Séries de Fourier contendo n termos, a fim de ilustrar a idéia básica do MEF. A solução proposta terá portanto a forma seguinte:

$$u_n(x) = \sum_{j=1}^n a_j \cdot \text{sen}(j \cdot \pi \cdot x) \quad (3)$$

Os termos em cosseno da Série de Fourier foram descartados a priori, a fim de que a solução atenda às condições de contorno (2). Para a obtenção dos coeficientes a_j procede-se de forma usual, ou seja, substitui-se a solução (3) na equação (1), multiplica-se ambos os lados da equação por $\text{sen}(k \cdot \pi \cdot x)$ e integra-se entre 0 e 1. Desta forma obtém-se:

$$\sum_{j=1}^n a_j \cdot p \cdot (j \cdot \pi)^2 \cdot \int_0^1 \text{sen}(k \cdot \pi \cdot x) \cdot \text{sen}(j \cdot \pi \cdot x) \cdot dx + \sum_{j=1}^n a_j \cdot q \cdot \int_0^1 \text{sen}(k \cdot \pi \cdot x) \cdot \text{sen}(j \cdot \pi \cdot x) \cdot dx = \int_0^1 f(x) \cdot \text{sen}(k \cdot \pi \cdot x) \cdot dx \quad (4)$$

Por outro lado, considerando-se a igualdade:

$$\int_0^1 \text{sen}(k \cdot \pi \cdot x) \cdot \text{sen}(j \cdot \pi \cdot x) \cdot dx = \begin{cases} \frac{1}{2} & \Leftrightarrow k = j \\ 0 & \Leftrightarrow k \neq j \end{cases} \quad (5)$$

Obtém-se a seguinte expressão para os coeficiente a_j :

$$a_j = \frac{2}{(j \cdot \pi)^2 \cdot p + q} \cdot \int_0^1 f(x) \cdot \text{sen}(j \cdot \pi \cdot x) \cdot dx \quad (6)$$

Substituindo-se a equação (6) na equação (3) obtém-se a solução aproximada da equação (1).

Exercício Proposto 1

Utilizando a equação (6), determine os coeficientes a_j para a solução por série de Fourier da equação (1) sujeita às condições de contorno (2). Considere $p=1$, $q=0$ e $f(x)=2$. Determine a solução analítica da equação (1) e compare com a solução por série de Fourier para os seguintes pontos: $x=0$, $x=0.25$, $x=0.5$, $x=0.75$ e $x=1$. Faça um gráfico de ambas as soluções.

Exercício Proposto 2

Utilizando a equação (6), determine os coeficientes a_j para a solução por série de Fourier da equação (1) sujeita às condições de contorno (2). Considere $p=1$, $q=1$ e $f(x)=2$. Determine a solução analítica da equação (1) e compare com a solução por série de Fourier para os seguintes pontos: $x=0$, $x=0.25$, $x=0.5$, $x=0.75$ e $x=1$. Faça um gráfico de ambas as soluções.

3 Solução Utilizando a Série Generalizada de Fourier

O procedimento que acaba de ser delineado utilizando séries de Fourier pode ser generalizado da forma que segue para funções genéricas, as quais podem diferir de seno e coseno. Inicialmente escolhe-se um conjunto de funções linearmente independentes, ou seja nenhuma delas pode ser expressa como uma combinação linear das demais. Estas funções são chamadas de funções de base e escritas como:

$$\varphi_j(x) \quad j=1, 2, 3, \dots, n \quad (7)$$

Pode-se demonstrar que as funções de base formam um espaço linear (vetorial), o qual pode ser estendido para um espaço de Hilbert (Banach) acrescentando-se a definição de um produto escalar (norma) ao espaço de funções.

Para obter-se a solução, constrói-se uma solução aproximada para a equação (1) em termos de uma combinação linear das funções de base escolhidas, conforme segue:

$$u_n(x) = \sum_{j=1}^n a_j \cdot \varphi_j(x) \quad (8)$$

A fim de que as condições de contorno (2) sejam atendidas, as funções de base devem satisfazer às seguintes condições:

$$\varphi_j(0) = 0 \quad \varphi_j(1) = 0 \quad j = 1, 2, 3, \dots, n \quad (9)$$

As condições acima são restrições que são impostas às funções que compõem o espaço. Estas restrições visam assegurar as condições de contorno são atendidas pela solução aproximada, ou seja, a seguinte relação será válida:

$$u_n(0) = 0 \quad u_n(1) = 0 \quad (10)$$

Repetindo-se o procedimento anteriormente aplicado, os coeficientes a_j serão obtidos substituindo-se (8) em (1), multiplicando-se ambos os lados de (1) por $\varphi_k(x)$ e integrando-se entre 0 e 1. Desta forma resulta:

$$-\sum_{j=1}^n a_j \cdot p \cdot \int_0^1 \varphi_k(x) \cdot \frac{d^2 \varphi_j(x)}{dx^2} \cdot dx + \sum_{j=1}^n a_j \cdot q \cdot \int_0^1 \varphi_k(x) \cdot \varphi_j(x) \cdot dx = \int_0^1 f(x) \cdot \varphi_k(x) \cdot dx \quad (11)$$

Integrando-se o primeiro termo de (11) por partes e considerando-se as condições de contorno, obtém-se:

$$\sum_{j=1}^n a_j \cdot \left\{ p \cdot \int_0^1 \frac{d\varphi_k}{dx} \cdot \frac{d\varphi_j}{dx} \cdot dx + q \cdot \int_0^1 \varphi_k \cdot \varphi_j \cdot dx \right\} = \int_0^1 f(x) \cdot \varphi_k(x) \cdot dx \quad k = 1, 2, 3 \dots n \quad (12)$$

Observando-se o caso anterior da Série de Fourier, verifica-se que as condições de ortogonalidade, dadas pela equação (5), fizeram com que na apenas os termos para os quais $j=k$ obtivessem um valor diferente de zero para as integrais de 0 a 1. Uma vez que, a mesma condição de ortogonalidade vale também para as derivadas da solução (3), foi possível encontrar uma expressão analítica para os coeficientes a_j , chegando-se desta forma à equação (6). Entretanto, para funções genéricas como as funções $\varphi_k(x)$, não existem condições de ortogonalidade que possam ser estabelecidas a priori. Mesmo que condições de ortogonalidade eventualmente existam para as funções $\varphi_k(x)$, elas em geral não estão asseguradas para suas derivadas. Assim, mesmo que eventualmente se consiga obter funções ortogonais, elas não trarão uma simplificação significativa ao problema.

Conforme será detalhado mais tarde, a expressão (12) define um sistema linear de equações com n equações e n incógnitas. Ele é determinado avaliando-se as integrais para cada uma das funções de base $\varphi_k(x)$. Ou seja, as n equações são obtidas fazendo-se k e j variarem entre 1 e n . A solução do sistema linear existirá sempre que a matriz de coeficientes for do tipo não-singular (determinante diferente de zero). Excetuando-se problemas atípicos, o sistema de equações obtidos sempre possui solução única.

O método exposto para a obtenção da solução aproximada a partir de uma extensão do método das Séries de Fourier é conhecido como *Método de Galerkin*. Este método desempenha um papel primordial na *Teoria de Aproximação de Funções* e constitui a base da formulação do método dos elementos finitos, o qual nada mais é do que uma modificação do

Método de Galerkin. Funções de base que são tipicamente utilizadas são polinômios de primeira ordem e ordem mais elevada.

Exercício Proposto 3

Determine a solução por série Fourier generalizada da equação (1) sujeita às condições de contorno (2). Considere $p=1$, $q=1$ e $f(x)=-x$, $n=1$ e a seguinte função de base:

$$\varphi_1(x) = x \cdot (1 - x)$$

A solução terá, portanto a forma:

$$u_n(x) = a_1 \cdot x \cdot (1 - x)$$

Determine a solução analítica e compare com a solução por série de Fourier generalizada para os seguintes pontos: $x=0$, $x=0.25$, $x=0.5$, $x=0.75$ e $x=1$. Faça um gráfico de ambas as soluções.

Exercício Proposto 4

Determine a solução por série de Fourier generalizada da equação (1) sujeita às condições de contorno (2). Considere $p=1$, $q=1$ e $f(x)=2$, $n=2$ e a seguinte função de base:

$$\varphi_1(x) = x \cdot (1 - x)$$

$$\varphi_2(x) = x^2 \cdot (1 - x)$$

A solução terá, portanto a forma:

$$u_n(x) = a_1 \cdot x \cdot (1 - x) + a_2 \cdot x^2 \cdot (1 - x)$$

Determine a solução analítica e compare com a solução por série de Fourier generalizada para os seguintes pontos: $x=0$, $x=0.25$, $x=0.5$, $x=0.75$ e $x=1$. Faça um gráfico de ambas as soluções.

4 Funções de Base definidas Apenas em Trechos

As funções de base abordadas até este ponto são em princípio funções que são definidas e possuem valores diferentes de zero em *todo* o domínio (entre 0 e 1 no exemplo anterior). A formulação empregada anteriormente é conhecida também como *Método Clássico de Galerkin*. Conforme se verifica pelos exemplos apresentados, a formulação clássica não fornece um método sistemático para definição das funções de base, existindo para cada caso uma infinidade de funções possíveis. Levando-se em conta que a precisão e qualidade dos resultados depende fortemente da escolha das funções de base, isto se constitui uma séria desvantagem. A situação é ainda mais complicada quando se considera domínios em 2 e 3 dimensões com geometrias complexas. Uma escolha inadequada das funções de base pode levar a um sistema de equações mal-condicionado e de difícil solução ou até mesmo impossível de resolver numericamente. Por estes motivos, o Método de Galerkin Clássico possui uso restrito na solução de casos práticos. O MEF pode ser considerado uma modificação do Método Clássico de Galerkin onde as funções de base são definidas de forma sistemática e

levando a sistemas de equações numericamente estáveis e fáceis de resolver, evitando desta forma as dificuldades mencionadas.

No MEF são utilizadas funções de base que só tem valores diferente de zero em uma pequena parte do domínio. Conforme será visto, a escolha deste tipo de funções simplifica consideravelmente a obtenção da solução aproximada do problema. Devido à sua forma particular, elas são também conhecidas como *funções piramidais*. O uso deste tipo particular de funções constitui-se, desta forma, numa das características principais do MEF, sendo que a sua eficácia está ligada à esta forma particular das funções de base. Exemplos de funções de base piramidais em uma dimensão são mostrados nas figuras 1 e 2.

A fim de definir conjunto de funções piramidais, como as mostradas na figura 1b, é necessário primeiramente dividir o intervalo [0,1] em um conjunto de n subintervalos, os quais por simplicidade serão todos do mesmo tamanho. Este conjunto de intervalos será denominado genericamente de *malha*. Considerando, portanto, intervalos de igual tamanho resulta para a dimensão de cada um dos intervalos a relação (figura 1a):

$$h = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}$$

Adotando-se a nomenclatura comum no MEF, os subintervalos são denominados de *elementos* e os pontos comuns de cada subintervalo são denominados de *nós*. Assim, cada elemento é limitado pelos seguintes nós:

$$x_k = k \cdot h \quad k = 0, 1, 2, 3 \dots n$$

De acordo com a figura 1b, as funções de base serão definidas como segue:

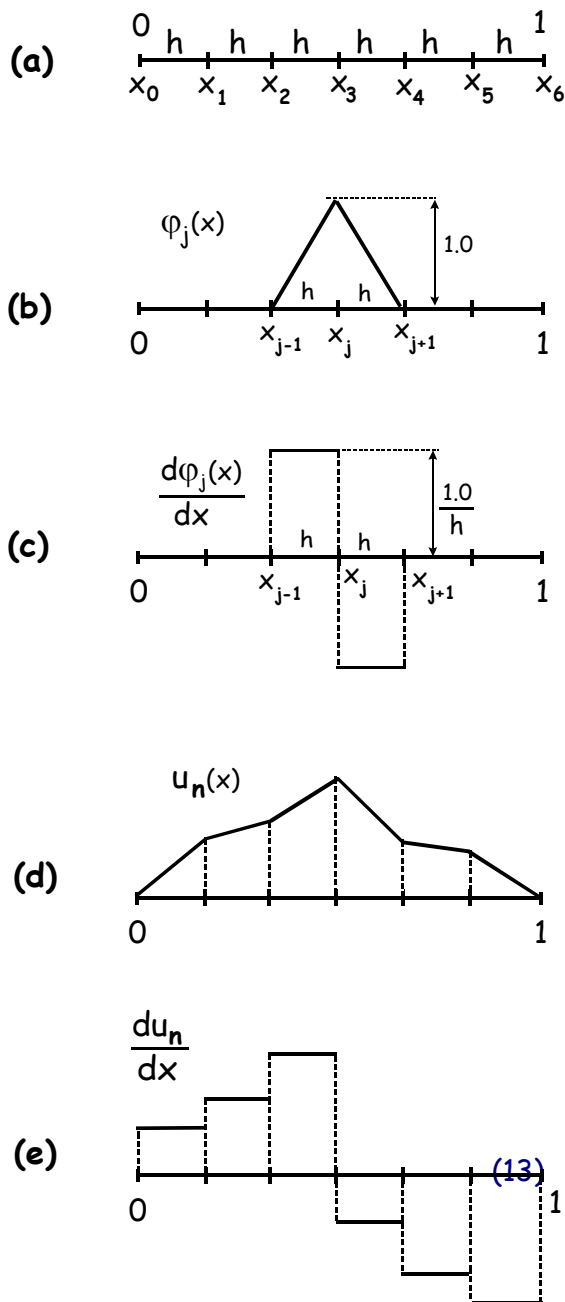


figura 1 - Subdivisão do domínio e funções de base: (a) subdivisão do domínio, (b) funções de base, (c) derivada das funções de base e (d) forma da função de aproximação. (14)

$$\varphi_j(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq x_{k-1} \\ \frac{x - x_{k-1}}{h} & x_{k-1} \leq x \leq x_k \\ \frac{x_{k+1} - x}{h} & x_k \leq x \leq x_{k+1} \\ 0 & x_{k+1} \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (15)$$

As funções lineares definidas por (15) são chamadas de funções de base definidas por trechos. A sua característica principal é o fato de que elas são diferentes de zero apenas em um pequena parcela do domínio, no caso considerado o domínio é o intervalo [0,1]. Por este motivo elas são por vezes denominadas de funções de base local. Esta característica particular simplifica enormemente a solução do problema por métodos numéricos. As derivadas das funções de base são mostradas na figura 1c e dadas matematicamente por:

$$\frac{d\varphi_j(x)}{dx} = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq x_{k-1} \\ +\frac{1}{h} & x_{k-1} \leq x \leq x_k \\ -\frac{1}{h} & x_k \leq x \leq x_{k+1} \\ 0 & x_{k+1} \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (16)$$

Com as definições anteriores, a solução aproximada $u_n(x)$ será composta de segmentos de retas, ou seja ela será do tipo linear por trechos, conforme mostra a figura 1d. Observa-se ainda que função de aproximação é contínua, não havendo saltos nos pontos de transição entre um elemento e outro. Esta característica é em geral desejada na solução. Haverá entretanto uma descontinuidade na derivada da função, conforme mostra a figura 1e. Isto não causa, todavia, problemas. Caso seja necessário continuidade também na derivada de primeira ordem da função de aproximação poderão ser escolhidas funções de base de ordem maior, por exemplo um polinômio de segunda ordem. O procedimento delineado não se altera ao ser alterada a função de base. As matrizes do sistema no entanto possuirão um número maior de elementos diferentes de zero.

5 Construção da Função de Aproximação por EF

Uma vez definidos os tipos de funções de base para a aproximação que se deseja utilizar, pode-se partir para a determinação da solução aproximada da equação dada. Analogamente aos casos anteriores, a solução será estabelecida como uma combinação linear das funções de base $\varphi_j(x)$:

$$u_n(x) = \sum_{j=1}^{n-1} a_j \cdot \varphi_j(x) \quad (17)$$

Os termos $j=0$ e $j=n$ foram omitidos tendo em vista as condições de contorno. Observa-se que a solução aproximada na forma (17) consiste de linhas poligonais conforme mostrado na

figura 1d. Uma função com esta característica é chamada de *função polinomial linear por trechos*. A solução entre dois pontos é assim aproximada por meio de retas; isto decorre do fato de se ter utilizado polinômios de primeiro grau como função de base. Caso fossem utilizados polinômios de mais alto grau a solução aproximada entre dois pontos seria uma curva correspondente à ordem do polinômio utilizado. Por exemplo, tomando-se polinômios de segundo grau obter-se-ia uma parábola como aproximação entre dois pontos.

Considerando-se a forma como as funções de base foram definidas, a solução aproximada (17) fornece o seguinte valor para os nós x_k da malha, ou seja para $x = x_k$ resulta:

$$u_h(x_k) = \sum_{j=1}^{n-1} a_j \cdot \varphi_j(x_k) = a_k \cdot \varphi_k(x_k)$$

$$u_h(x_k) = a_k \tag{18}$$

O coeficiente a_k é assim igual ao valor da função de aproximação no ponto $x = x_k$. Esta característica decorre diretamente da escolha da funções de base e é uma das características fundamentais do MEF, sendo além disso extremamente conveniente do ponto de vista de solução numérica. Ressalta-se ainda que esta forma de aproximação é bastante semelhante ao conhecido *Método de Interpolação de Lagrange*.

Ao se tentar aplicar a solução (17) para a equação original na forma (1) verifica-se uma dificuldade com a derivada de segunda ordem. A equação (17) possui derivada de primeira ordem, conforme mostra a figura 1c, mas a sua derivada de segunda ordem é zero no interior dos elementos e igual à função *Delta de Dirac* nos seus extremos. A derivada de segunda ordem possui, portanto, valor infinito nos extremos do intervalo, sendo desta forma de difícil tratamento. Este tipo de comportamento da solução não é consistente com a equação (1).

A fim de evitar a inconsistência referida, será considerada a equação (1) numa forma alternativa equivalente, obtida conforme segue. Substituindo-se a solução aproximada $u_h(x)$ e multiplicando-se ambos os lados da equação (1) por φ_k , obtém-se:

$$\left[-\frac{d}{dx} \left(p \cdot \frac{du_h}{dx} \right) + q \cdot u_h \right] \cdot \varphi_k = f(x) \cdot \varphi_k$$

Em seguida integra-se entre 0 e 1 e obtém-se:

$$\int_0^1 \left[-\frac{d}{dx} \left(p \cdot \frac{du_h}{dx} \right) + q \cdot u_h \right] \cdot \varphi_k \cdot dx = \int_0^1 f(x) \cdot \varphi_k \cdot dx$$

Utilizando-se o conceito de integração por partes resulta:

$$\left[-p \cdot \frac{du_h}{dx} \cdot \varphi_k \right]_0^1 + \int_0^1 \left[p \cdot \frac{du_h}{dx} \cdot \frac{d\varphi_k}{dx} + q \cdot u_h \cdot \varphi_k \right] \cdot dx = \int_0^1 f(x) \cdot \varphi_k \cdot dx$$

Considerando-se que $\varphi_k(0) = 0$ e $\varphi_k(1) = 0$, obtém-se finalmente a seguinte expressão:

$$\int_0^1 \left(p \cdot \frac{du_n}{dx} \cdot \frac{d\varphi_k}{dx} + q \cdot u_n \cdot \varphi_k \right) \cdot dx = \int_0^1 f \cdot \varphi_k \cdot dx \quad k = 1, 2, 3, \dots, (n-1) \quad (19)$$

A forma (19) é conhecida como *forma fraca* da equação (1), sendo este nome derivado do fato de que as exigências quanto à continuidade da função serem menos rigorosas que as da equação original. O uso da forma fraca amplia o universo de funções que podem ser empregadas como aproximação. O uso da forma original (1), também conhecida como *forma forte*, exige que a solução possua a segunda derivada, não sendo possível a utilização de funções de aproximação lineares. Todavia, o uso da forma fraca permite que funções possuindo apenas a derivada de primeira ordem também possam ser empregadas como solução de aproximação. O uso da forma fraca torna, portanto, possível o uso de funções lineares, as quais simplificam a obtenção de uma solução aproximada.

Substituindo-se agora a equação (17) na equação (19) obtém-se:

$$\int_0^1 \left(p \cdot \frac{\sum_{j=1}^{n-1} a_j \cdot d\varphi_j}{dx} \cdot \frac{d\varphi_k}{dx} + q \cdot \sum_{j=1}^{n-1} a_j \cdot \varphi_j \cdot \varphi_k \right) \cdot dx = \int_0^1 f \cdot \varphi_k \cdot dx$$

$$\sum_{j=1}^{n-1} a_j \cdot \int_0^1 \left(p \cdot \frac{d\varphi_j}{dx} \cdot \frac{d\varphi_k}{dx} + q \cdot \varphi_j \cdot \varphi_k \right) \cdot dx = \int_0^1 f \cdot \varphi_k \cdot dx \quad k = 1, 2, 3, \dots, (n-1) \quad (20)$$

As expressões sob o sinal de integral poderão agora ser resolvidas a priori para cada uma das funções φ_k , uma vez que todas as funções que aparecem na integral são conhecidas. Considerando-se todas as funções de base dentro do intervalo de 0 a 1, ou seja fazendo-se k variar entre 1 e $n-1$, chega-se a um sistema de equações lineares, cuja solução determina os valores dos coeficientes a_j , os quais por sua vez determinam a solução aproximada.

6 Exemplo Prático de Solução Utilizando o MEF

A fim de ilustrar melhor o processo de obtenção dos sistema de equações, será apresentado a seguir um exemplo onde foi assumido que o intervalo entre 0 e 1 foi dividido em quatro subintervalos iguais (ou seja 4 elementos) com comprimento de $h=1/4$, conforme ilustrado na figura 2. O índice j na equação (17) varia neste caso particular entre 1 e 3, existindo 3 funções de base que são mostradas na figura 2.

Existem também 3 coeficientes a_j que serão determinados: a_1 , a_2 e a_3 . A solução aproximada terá a seguinte forma:

$$u_4(x) = \sum_{j=1}^3 a_j \cdot \varphi_j = a_1 \cdot \varphi_1 + a_2 \cdot \varphi_2 + a_3 \cdot \varphi_3 \quad (21)$$

Considerando-se inicialmente $k=1$, obtém-se a partir de (20) a expressão:

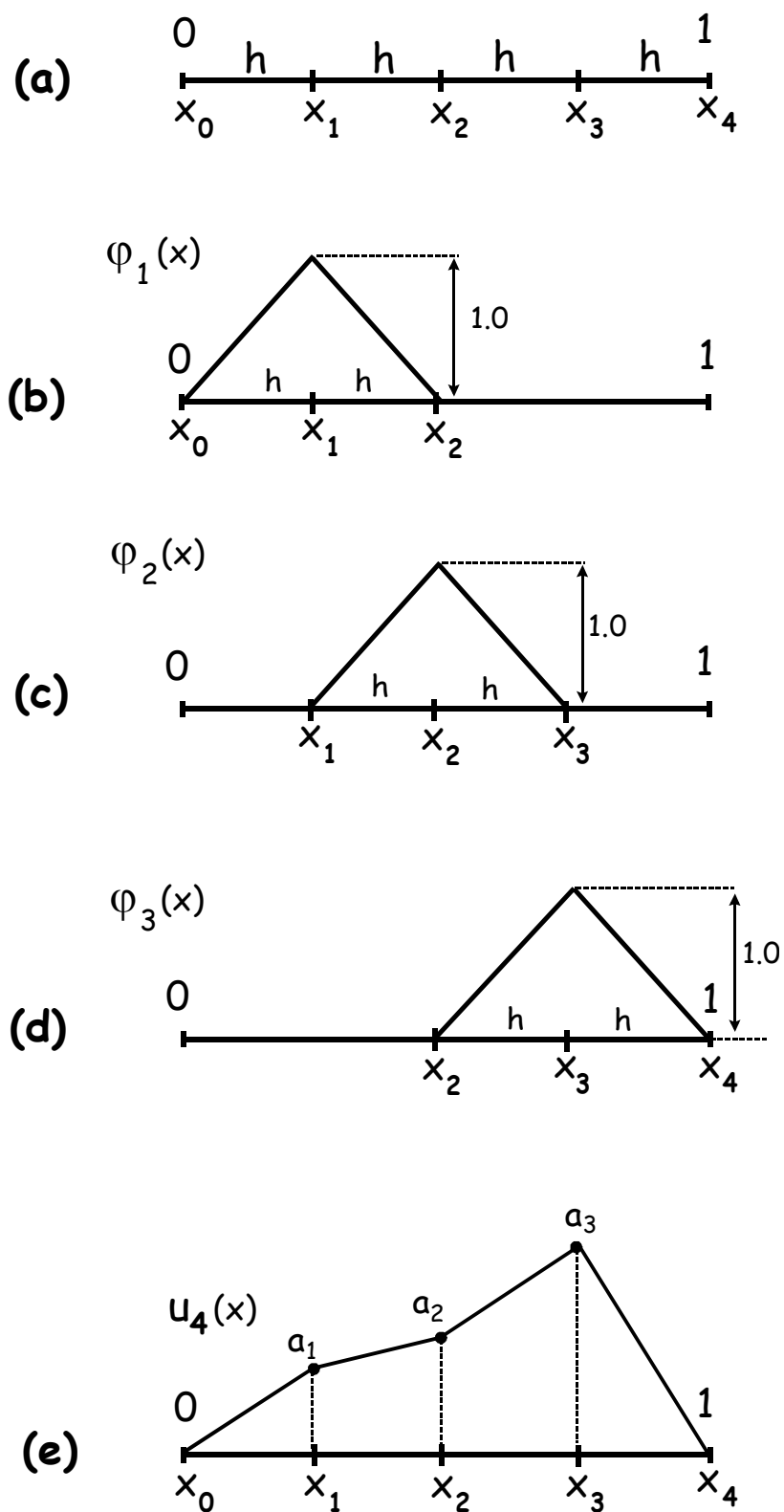


figura 2 - Subdivisão do domínio em 4 elementos e funções de base correspondentes: (a) subdivisão do domínio, (b), (c) e (d) funções de base, (e) forma da função de aproximação.

$$\sum_{j=1}^3 a_j \cdot \int_0^1 \left(p \cdot \frac{d\varphi_j}{dx} \cdot \frac{d\varphi_1}{dx} + q \cdot \varphi_j \cdot \varphi_1 \right) \cdot dx = \int_0^1 f \cdot \varphi_1 \cdot dx \quad (22)$$

De acordo com a figura 2, o produto das funções φ_1 e φ_j é diferente de zero apenas para os elementos que são vizinhos, ou seja o produto entre φ_1 e φ_j é diferente de zero apenas onde ambas as funções são simultaneamente diferentes de zero. Para $k=1$ existem pela equação (21) os produtos $\varphi_1 \cdot \varphi_1$, $\varphi_1 \cdot \varphi_2$ e $\varphi_1 \cdot \varphi_3$, dos quais apenas $\varphi_1 \cdot \varphi_1$ e $\varphi_1 \cdot \varphi_2$ possuem valor diferente de zero. Esta característica vantajosa resulta da escolha do tipo de funções de base. As mesmas considerações valem igualmente para as derivadas das funções de base.

Para $k=1$, será portanto necessário considerar apenas $j=1$ e $j=2$. Analisando-se a integral entre 0 1 e tomando-se em conta as funções φ_1 e φ_j pode-se estabelecer a seguinte simplificação:

$$\sum_{j=1}^2 a_j \cdot \int_0^1 \left(p \cdot \frac{d\varphi_j}{dx} \cdot \frac{d\varphi_1}{dx} + q \cdot \varphi_j \cdot \varphi_1 \right) \cdot dx = \int_0^1 f \cdot \varphi_1 \cdot dx$$

$$\sum_{j=1}^2 a_j \cdot \int_0^{2 \cdot h} \left(p \cdot \frac{d\varphi_j}{dx} \cdot \frac{d\varphi_1}{dx} + q \cdot \varphi_j \cdot \varphi_1 \right) \cdot dx = \int_0^{2 \cdot h} f \cdot \varphi_1 \cdot dx \quad (23)$$

Escrita de forma mais explícita, a equação (23) se torna:

$$a_1 \cdot \int_0^{2 \cdot h} \left(p \cdot \frac{d\varphi_1}{dx} \cdot \frac{d\varphi_1}{dx} + q \cdot \varphi_1 \cdot \varphi_1 \right) \cdot dx + a_2 \cdot \int_0^{2 \cdot h} \left(p \cdot \frac{d\varphi_2}{dx} \cdot \frac{d\varphi_1}{dx} + q \cdot \varphi_2 \cdot \varphi_1 \right) \cdot dx = \int_0^{2 \cdot h} f \cdot \varphi_1 \cdot dx \quad (24)$$

A avaliação dos termos da equação (23) para $k=1$ e $j=1$, resulta:

$$\int_0^{2 \cdot h} p \cdot \frac{d\varphi_1}{dx} \cdot \frac{d\varphi_1}{dx} \cdot dx = \int_0^h p \cdot \frac{1}{h} \cdot \frac{1}{h} \cdot dx + \int_h^{2 \cdot h} p \cdot \frac{-1}{h} \cdot \frac{-1}{h} \cdot dx = p \cdot \frac{1}{h^2} \cdot h + p \cdot \frac{1}{h^2} \cdot h = \frac{p}{h} \cdot 2 \quad (25)$$

$$\int_0^{2 \cdot h} q \cdot \varphi_1 \cdot \varphi_1 \cdot dx = \int_0^h q \cdot \frac{x}{h} \cdot \frac{x}{h} \cdot dx + \int_h^{2 \cdot h} q \cdot \frac{(2 \cdot h - x)}{h} \cdot \frac{(2 \cdot h - x)}{h} \cdot dx = q \cdot \frac{1}{h^2} \cdot \frac{h^3}{3} + q \cdot \frac{1}{h^2} \cdot \frac{h^3}{3} = q \cdot \frac{h}{3} \cdot 2 \quad (26)$$

Tomando-se ainda $k=1$ e considerando-se agora $j=2$, resulta para o segundo termo da equação (23):

$$a_2 \cdot \int_0^{2 \cdot h} \left(p \cdot \frac{d\varphi_1}{dx} \cdot \frac{d\varphi_2}{dx} + q \cdot \varphi_1 \cdot \varphi_2 \right) \cdot dx = a_2 \cdot \int_h^{2 \cdot h} \left(p \cdot \frac{d\varphi_1}{dx} \cdot \frac{d\varphi_2}{dx} + q \cdot \varphi_1 \cdot \varphi_2 \right) \cdot dx \quad (27)$$

A simplificação anterior decorre do fato de que entre 0 e h o produto das funções $\varphi_1 \cdot \varphi_2$ ser identicamente zero.

De modo análogo ao caso $j=1$, pode-se determinar os termos da integral (27) conforme segue:

$$\int_h^{2h} p \cdot \frac{d\varphi_1}{dx} \cdot \frac{d\varphi_2}{dx} \cdot dx = \int_h^{2h} p \cdot \frac{-1}{h} \cdot \frac{1}{h} \cdot dx = -p \cdot \frac{1}{h^2} \cdot h = -\frac{p}{h} \quad (28)$$

$$\int_h^{2h} q \cdot \varphi_1 \cdot \varphi_2 \cdot dx = \int_h^{2h} q \cdot \frac{(2 \cdot h - x)}{h} \cdot \frac{(x - h)}{h} \cdot dx = q \cdot \frac{h}{6} \quad (29)$$

Para a avaliação da integral no lado direito, pode-se fazer igualmente uma aproximação e considerar a função a $f(x)$ constante entre 0 e h e entre h e 2h. Assim, entre 0 e h será assumido que a função $f(x)$ possui o valor constante e igual a $f\left(\frac{h}{2}\right)$, ou seja é o valor no centro do intervalo. Entre h e 2h o valor assumido será $f\left(\frac{3 \cdot h}{2}\right)$. Esta aproximação é em geral justificada na prática tendo em vista que os intervalos h são pequenos. Desta forma, obtém-se para o lado direito da equação:

$$\begin{aligned} \int_0^{2h} f(x) \cdot \varphi_1 \cdot dx &= \int_0^h f(x) \cdot \frac{x}{h} \cdot dx + \int_h^{2h} f(x) \cdot \frac{(2 \cdot h - x)}{h} \cdot dx \cong f\left(\frac{h}{2}\right) \cdot \int_0^h \frac{x}{h} \cdot dx + f\left(\frac{3 \cdot h}{2}\right) \cdot \int_h^{2h} \frac{(2 \cdot h - x)}{h} \cdot dx \\ \int_0^{2h} f(x) \cdot \varphi_1 \cdot dx &\cong f\left(\frac{h}{2}\right) \cdot \frac{1}{h} \cdot \frac{h^2}{2} + f\left(\frac{3 \cdot h}{2}\right) \cdot \frac{1}{h} \cdot \frac{h^2}{2} \\ \int_0^{2h} f(x) \cdot \varphi_1 \cdot dx &\cong f\left(\frac{h}{2}\right) \cdot \frac{h}{2} + f\left(\frac{3 \cdot h}{2}\right) \cdot \frac{h}{2} \end{aligned} \quad (30)$$

Portanto, considerando a equação (23) e as expressões (24) a (30), obtém-se para $k=1$ a seguinte equação:

$$a_1 \cdot \left(\frac{p}{h} \cdot 2 + q \cdot \frac{h}{3} \cdot 2\right) + a_2 \cdot \left(-\frac{p}{h} + q \cdot \frac{h}{6}\right) = f\left(\frac{h}{2}\right) \cdot \frac{h}{2} + f\left(\frac{3 \cdot h}{2}\right) \cdot \frac{h}{2} \quad (31)$$

Considerando-se agora $k=2$, obtém-se de forma análoga ao caso anterior a seguinte equação:

$$\sum_{j=1}^3 a_j \cdot \int_0^1 \left(p \cdot \frac{d\varphi_j}{dx} \cdot \frac{d\varphi_2}{dx} + q \cdot \varphi_j \cdot \varphi_2 \right) \cdot dx = \int_0^1 f \cdot \varphi_2 \cdot dx \quad (32)$$

Considerando a forma das funções de base (figura 2), pode-se escrever a equação acima da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 & a_1 \cdot \int_h^{2 \cdot h} \left(p \cdot \frac{d\varphi_1}{dx} \cdot \frac{d\varphi_2}{dx} + q \cdot \varphi_1 \cdot \varphi_2 \right) \cdot dx + a_2 \cdot \int_h^{3 \cdot h} \left(p \cdot \frac{d\varphi_2}{dx} \cdot \frac{d\varphi_2}{dx} + q \cdot \varphi_2 \cdot \varphi_2 \right) \cdot dx + \\
 & a_3 \cdot \int_{2 \cdot h}^{3 \cdot h} \left(p \cdot \frac{d\varphi_3}{dx} \cdot \frac{d\varphi_2}{dx} + q \cdot \varphi_3 \cdot \varphi_2 \right) \cdot dx = \int_0^1 f \cdot \varphi_2 \cdot dx
 \end{aligned} \tag{33}$$

A primeira integral da equação (31) já foi avaliada anteriormente para $k=1$ e $j=2$, tendo como resultado as expressões (28) e (29), repetidas abaixo:

$$a_1 \cdot \int_h^{2 \cdot h} \left(p \cdot \frac{d\varphi_1}{dx} \cdot \frac{d\varphi_2}{dx} + q \cdot \varphi_1 \cdot \varphi_2 \right) \cdot dx = a_1 \cdot \left(-\frac{p}{h} + q \cdot \frac{h}{6} \right) \tag{34}$$

Avaliando-se o segundo termo da equação (32), resultará nas mesmas expressões calculadas anteriormente para $k=1$ e $j=1$:

$$a_2 \cdot \int_h^{3 \cdot h} \left(p \cdot \frac{d\varphi_2}{dx} \cdot \frac{d\varphi_2}{dx} + q \cdot \varphi_2 \cdot \varphi_2 \right) \cdot dx = a_2 \cdot \left(2 \cdot \frac{p}{h} + q \cdot \frac{h}{3} \cdot 2 \right) \tag{35}$$

O último termo da equação (31) fornece o mesmo resultado que obtido anteriormente para $k=1$ e $j=2$:

$$a_3 \cdot \int_{2 \cdot h}^{3 \cdot h} \left(p \cdot \frac{d\varphi_3}{dx} \cdot \frac{d\varphi_2}{dx} + q \cdot \varphi_3 \cdot \varphi_2 \right) \cdot dx = a_3 \cdot \left(-\frac{p}{h} + q \cdot \frac{h}{6} \right) \tag{36}$$

Para o termo no lado direito da equação (32), resulta de forma análoga:

$$\begin{aligned}
 \int_h^{3 \cdot h} f(x) \cdot \varphi_2 \cdot dx &= \int_h^{2 \cdot h} f(x) \cdot \frac{x}{h} \cdot dx + \int_{2 \cdot h}^{3 \cdot h} f(x) \cdot \frac{(2 \cdot h - x)}{h} \cdot dx \cong f\left(\frac{3}{2} \cdot h\right) \cdot \frac{1}{h} \cdot \frac{h^2}{2} + f\left(\frac{5}{2} \cdot h\right) \cdot \frac{1}{h} \cdot \frac{h^2}{2} \\
 \int_h^{3 \cdot h} f(x) \cdot \varphi_2 \cdot dx &\cong f\left(\frac{3}{2} \cdot h\right) \cdot \frac{h}{2} + f\left(\frac{5}{2} \cdot h\right) \cdot \frac{h}{2}
 \end{aligned} \tag{37}$$

Considerando-se as equações (33) a (36), resulta finalmente para $k=2$ a seguinte equação:

$$a_1 \cdot \left(-\frac{p}{h} + q \cdot \frac{h}{6} \right) + a_2 \cdot \left(\frac{p}{h} \cdot 2 + q \cdot \frac{h}{3} \cdot 2 \right) + a_3 \cdot \left(-\frac{p}{h} + q \cdot \frac{h}{6} \right) = f\left(\frac{3}{2} \cdot h\right) \cdot \frac{h}{2} + f\left(\frac{5}{2} \cdot h\right) \cdot \frac{h}{2} \tag{38}$$

A fim de completar o sistema de equações será determinado ainda a equação que resulta para $k=3$. Considerando-se a forma como as funções de base estão definidas, obtém-se a expressão que segue:

$$\sum_{j=2}^3 a_j \cdot \int_{2 \cdot h}^{4 \cdot h} \left(p \cdot \frac{d\varphi_j}{dx} \cdot \frac{d\varphi_3}{dx} + q \cdot \varphi_j \cdot \varphi_3 \right) \cdot dx = \int_{2 \cdot h}^{4 \cdot h} f \cdot \varphi_3 \cdot dx \tag{39}$$

$$a_2 \cdot \int_{2 \cdot h}^{3 \cdot h} \left(p \cdot \frac{d\varphi_2}{dx} \cdot \frac{d\varphi_3}{dx} + q \cdot \varphi_2 \cdot \varphi_3 \right) \cdot dx + a_3 \cdot \int_{2 \cdot h}^{4 \cdot h} \left(p \cdot \frac{d\varphi_3}{dx} \cdot \frac{d\varphi_3}{dx} + q \cdot \varphi_3 \cdot \varphi_3 \right) \cdot dx = \int_{2 \cdot h}^{4 \cdot h} f \cdot \varphi_3 \cdot dx \quad (40)$$

A primeira integral da expressão (40) já foi avaliada anteriormente, para a segunda integral resulta o mesmo valor que para $j=1$ e $k=1$ (ou $j=2$ e $k=2$). Para a expressão no lado direito resulta de forma análoga aos casos anteriores:

$$\int_{2 \cdot h}^{4 \cdot h} f(x) \cdot \varphi_3 \cdot dx \cong f\left(\frac{5}{2} \cdot h\right) \cdot \frac{1}{h} \cdot \frac{h^2}{2} + f\left(\frac{7}{2} \cdot h\right) \cdot \frac{1}{h} \cdot \frac{h^2}{2} = f\left(\frac{5}{2} \cdot h\right) \cdot \frac{h}{2} + f\left(\frac{7}{2} \cdot h\right) \cdot \frac{h}{2} \quad (41)$$

Desta forma a equação correspondente a $k=3$ possui a seguinte forma:

$$a_3 \cdot \left(\frac{p}{h} \cdot 2 + q \cdot \frac{h}{3} \cdot 2 \right) + a_2 \cdot \left(-\frac{p}{h} + q \cdot \frac{h}{6} \right) = f\left(\frac{5}{2} \cdot h\right) \cdot \frac{h}{2} + f\left(\frac{7}{2} \cdot h\right) \cdot \frac{h}{2} \quad (42)$$

O sistema de equações é, assim, definido pelas equações (31), (38) e (42), as quais são repetidas a seguir:

$$\begin{cases} a_1 \cdot \left(\frac{p}{h} \cdot 2 + q \cdot \frac{h}{3} \cdot 2 \right) + a_2 \cdot \left(-\frac{p}{h} + q \cdot \frac{h}{6} \right) = f\left(\frac{h}{2}\right) \cdot \frac{h}{2} + f\left(\frac{3}{2} \cdot h\right) \cdot \frac{h}{2} \\ a_1 \cdot \left(-\frac{p}{h} + q \cdot \frac{h}{6} \right) + a_2 \cdot \left(\frac{p}{h} \cdot 2 + q \cdot \frac{h}{3} \cdot 2 \right) + a_3 \cdot \left(-\frac{p}{h} + q \cdot \frac{h}{6} \right) = f\left(\frac{3}{2} \cdot h\right) \cdot \frac{h}{2} + f\left(\frac{5}{2} \cdot h\right) \cdot \frac{h}{2} \\ a_3 \cdot \left(\frac{p}{h} \cdot 2 + q \cdot \frac{h}{3} \cdot 2 \right) + a_2 \cdot \left(-\frac{p}{h} + q \cdot \frac{h}{6} \right) = f\left(\frac{5}{2} \cdot h\right) \cdot \frac{h}{2} + f\left(\frac{7}{2} \cdot h\right) \cdot \frac{h}{2} \end{cases} \quad (43)$$

Escrito na forma matricial, o sistema assume a forma:

$$\{[K] + [M]\} \cdot [A] = [F] \quad (44)$$

As matrizes que aparecem em (44) são dadas pelas expressões:

$$[K] = \frac{p}{h} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad (45)$$

$$[M] = \frac{q \cdot h}{6} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad (46)$$

$$[F] = \frac{h}{2} \cdot \begin{bmatrix} f\left(\frac{1}{2} \cdot h\right) + f\left(\frac{3}{2} \cdot h\right) \\ f\left(\frac{3}{2} \cdot h\right) + f\left(\frac{5}{2} \cdot h\right) \\ f\left(\frac{5}{2} \cdot h\right) + f\left(\frac{7}{2} \cdot h\right) \end{bmatrix} \quad (47)$$

$$[A] = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \tag{48}$$

A solução do sistema acima fornece os coeficientes a_1 , a_2 e a_3 os quais por sua vez determinam a solução aproximada, de acordo com a equação (21).

Repetindo-se o procedimento para a montagem do sistema de equações para uma subdivisão contendo um número arbitrário de elementos n , obtém-se matrizes de ordem $(n-1)$ por $(n-1)$, as quais possuem a seguinte forma geral:

$$[K] = \frac{p}{h} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \tag{49}$$

$$[M] = \frac{q \cdot h}{6} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \tag{50}$$

$$[F] = \frac{h}{2} \cdot \begin{bmatrix} f\left(\frac{1}{2} \cdot h\right) + f\left(\frac{3}{2} \cdot h\right) \\ f\left(\frac{3}{2} \cdot h\right) + f\left(\frac{5}{2} \cdot h\right) \\ f\left(\frac{5}{2} \cdot h\right) + f\left(\frac{7}{2} \cdot h\right) \\ \vdots \\ f\left[\frac{1}{2} \cdot h + (n-1) \cdot h\right] + f\left[\frac{3}{2} \cdot h + (n-1) \cdot h\right] \end{bmatrix} \tag{51}$$

$$[A] = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{bmatrix} \tag{52}$$

Por motivos históricos, as matrizes $[K]$ e $[M]$ são denominadas de *Matriz de Rigidez* e *Matriz de Massa*. As denominações decorrem do fato de que o MEF foi inicialmente aplicado à problemas de elasticidade. A matriz $[K]+[M]$ é conhecida de forma geral por *Matriz de Coeficientes*.

Deve-se ressaltar que em sistemas computacionais por elementos finitos as matrizes do sistema são montadas de forma automática. O equacionamento do problema é feito tomando-se apenas um elemento representativo, de tal forma que os demais são feitos substituindo-se as coordenadas correspondentes. A modelagem se resume, assim, à modelagem do sistema dentro de um elemento apenas, sendo o procedimento em seguida estendido a todo os elementos que compõem o domínio. Assim, um sistema computacional baseado em elementos finitos é capaz de trabalhar com uma classe ampla de problemas envolvendo geometrias complexas. Esta se constitui numa das maiores vantagens do MEF: a solução para domínios complexos pode ser obtida de forma sistemática e segura.

7 Propriedades das Matrizes e da Solução por Elementos Finitos

Uma das características importantes das matrizes introduzidas anteriormente é que elas são do tipo tridiagonal. Uma matriz tridiagonal é uma matriz cujos termos são todos zero, exceto os termos da diagonal e os termos da subdiagonal superior e inferior. As matrizes $[K]$ e $[M]$ são exemplos de matrizes tridiagonais. No primeiro exemplo, nos quais se utilizou funções trigonométricas como funções de base, as matrizes $[K]$ e $[M]$ eram diagonais. Esta característica decorreu do fato de que as funções de base e suas derivadas são ortogonais. No presente caso, as matrizes não são completamente diagonais, mas quase-diagonais, ou seja tridiagonais. Isto decorreu do fato de que as funções de base escolhidas só são diferente de zero em uma pequena parte do domínio. De uma forma mais geral, o uso deste tipo de função faz com que poucos termos da matriz além da diagonal possuam um valor diferente de zero. A matriz de coeficientes torna-se assim uma matriz esparsa, ou seja com poucos elementos diferentes de zero em relação ao número total de elementos da matriz. Esta característica é muito vantajosa do ponto de vista de resolução do sistema de equações, uma vez que permite que a solução possa ser encontrada de forma mais eficiente e rápida. Além disso, a armazenagem da matriz exige menos recursos computacionais, dado que apenas os elementos diferente de zero necessitam ser efetivamente armazenados.

Outra característica importante das matrizes $[K]$ e $[M]$ é que elas são simétricas, o que simplifica a determinação do sistema de equações. Pode-se também armazenar apenas a parte acima da diagonal (ou abaixo), diminuindo sensivelmente o espaço de memória necessário para o armazenamento.

Uma análise mais detalhada mostra que para $p > 0$ e $q > 0$ os sistema de equações sempre possui solução, existindo portanto sempre um conjunto de valores para os coeficientes a_j que satisfazem o sistema de equações. A substituição destes valores na expressão (17) determina a solução aproximada $u_h(x)$. Esta é a exatamente a *solução por elementos finitos* do problema de valor de contorno dado.

Embora o problema tratado até aqui foi um simples problema em uma dimensão, a mesma idéia se aplica diretamente a problemas em duas e três dimensões. Por exemplo, em duas

dimensões o domínio do problema será dividido em pequenos triângulos e as funções de base serão polinômios os quais só possuem valor diferente de zero em um reduzido número de triângulos adjacentes. A solução aproximada é construída a partir de uma combinação linear destas funções de base. Em seguida é aplicado o Método de Galerkin e obtida a solução. O conjunto dos procedimentos de subdivisão do domínio, montagem do sistema de equações e determinação da solução para funções diferente de zero em apenas uma pequena parcela do domínio é conhecido como Método dos Elementos Finitos, abreviadamente MEF. Pelo exposto, fica claro que ele se constitui num caso particular do método de Galerkin.

A aplicação do MEF a casos práticos exige a solução de grandes sistemas de equações lineares. Por esta razão a sua utilização prática só foi possível a partir do momento em que os computadores adquiriram a necessária capacidade de processamento e memória.

Finalmente, deve ser lembrado que o MEF pode igualmente ser aplicado a equações diferenciais parciais não-lineares e variáveis no tempo. Materiais não-lineares podem ser igualmente considerados. Em tais casos resultarão sistemas de equações não-lineares e/ou dependentes do tempo.

Exercício Proposto 5

Utilizando a equação (44), determine a solução por elementos finitos da equação (1) sujeita às condições de contorno (2) utilizando 4 elementos. Considere $p=1$, $q=0$ e $f(x)=2$. Determine a solução analítica da equação (1) e compare com a solução por Elementos Finitos para os seguintes pontos: $x=0$, $x=0.25$, $x=0.5$, $x=0.75$ e $x=1$. Faça um gráfico de ambas as soluções.

Exercício Proposto 6

Repita o exercício 5 utilizando 8 elementos e compare com a solução obtida para 4 elementos fazendo um gráfico de ambas as soluções..

Exercício Proposto 7

Repita o exercício 5 utilizando 16 elementos e compare com a solução obtida para 4 elementos fazendo um gráfico de ambas as soluções.

Exercício Proposto 8

Utilizando a equação (44), determine a solução por elementos finitos da equação (1) sujeita às condições de contorno (2) utilizando 4 elementos. Considere $p=1$, $q=1$ e $f(x)=2$. Determine a solução analítica da equação (1) e compare com a solução por série de Fourier para os seguintes pontos: $x=0$, $x=0.25$, $x=0.5$, $x=0.75$ e $x=1$. Faça um gráfico de ambas as soluções.

Exercício Proposto 9

Repita o exercício 8 utilizando 8 elementos e compare com a solução obtida para 4 elementos fazendo um gráfico de ambas as soluções.

Exercício Proposto 10

Repita o exercício 8 utilizando 16 elementos e compare com a solução obtida para 4 elementos fazendo um gráfico de ambas as soluções.

8 Solução por EF com Condições de Contorno Não-Homogêneas

O equacionamento desenvolvido até este ponto considerou a equação (1) sujeita às condições de contorno dadas pela equação (2):

$$-\frac{d}{dx}\left(p \cdot \frac{du}{dx}\right) + q \cdot u = f(x) \quad 0 < x < 1 \quad (1)$$

$$u(0) = 0 \quad u(1) = 0 \quad (2)$$

Evidentemente que estas condições de contorno não representam o caso mais geral, uma vez que condições de contorno não homogêneas também são comuns na prática. Além disso, deve ser considerado o caso em que as derivadas da função $u(x)$ possam ser especificadas como condições de contorno. A fim de tornar a análise por EF mais genérica são apresentadas a seguir as modificações necessárias nas matrizes do sistema a fim de abranger também os casos citados. A abordagem não apresenta maiores detalhes matemáticos, os quais poderão ser encontrados no item 4 da bibliografia citada ao final desta apostila.

8.1 Condições de Contorno de Dirichlet Não-Homogêneas

Neste caso as condições de contorno são dadas na seguinte forma:

$$u(0) = u_0 \quad u(1) = u_1 \quad (53)$$

Condições deste tipo são denominadas de *Condições de Contorno de Dirichlet* ou *Condições de Contorno Essenciais*. A solução aproximada terá agora duas funções de base a mais: $\varphi_0(x)$ e $\varphi_n(x)$, sendo assim dada por:

$$u_n(x) = \sum_{j=0}^n a_j \cdot \varphi_j(x) = \sum_{j=0}^n u_n(x_j) \cdot \varphi_j(x) \quad (54)$$

Como os coeficientes $u_n(x_0) = u(0) = u_0$ e $u_n(x_n) = u(1) = u_1$ são conhecidos e especificados como parte do problema, pode-se expandir a equação (54):

$$u_n(x) = \sum_{j=0}^n u_n(x_j) \cdot \varphi_j(x) = u_0 \cdot \varphi_0(x) + u_1 \cdot \varphi_n(x) + \sum_{j=1}^{n-1} u_n(x_j) \cdot \varphi_j(x) \quad (55)$$

Desta forma, como no caso anterior, existem $n-1$ coeficientes a determinar. As matrizes $[K]$ e $[M]$ são idênticas às anteriores. A matriz $[F]$ possui termos adicionais na primeira e na última linha, assumindo a seguinte forma:

$$[F] = h \cdot \begin{bmatrix} f\left(\frac{1}{2} \cdot h\right) + f\left(\frac{3}{2} \cdot h\right) - \left(-\frac{p}{h} + q \cdot \frac{h}{6}\right) \cdot u_0 \cdot \frac{h}{2} \\ f\left(\frac{3}{2} \cdot h\right) + f\left(\frac{5}{2} \cdot h\right) \\ f\left(\frac{5}{2} \cdot h\right) + f\left(\frac{7}{2} \cdot h\right) \\ \vdots \\ f\left[\frac{1}{2} \cdot h + (n-1) \cdot h\right] + f\left[\frac{3}{2} \cdot h + (n-1) \cdot h\right] - \left(-\frac{p}{h} + q \cdot \frac{h}{6}\right) \cdot u_1 \cdot \frac{h}{2} \end{bmatrix} \quad (56)$$

8.2 Problemas com Condições Mistas (Dirichlet + Neumann)

Em muitos casos práticos, torna-se necessário especificar um valor para a função em um dos extremos e o valor da sua derivada em outro extremo. Problemas com este tipo de condições de contorno são denominados de problemas com condições mistas.

Nestes casos é prescrito o valor da função em um dos extremos e a derivada da função no outro extremo do domínio:

$$u(0) = u_0 \quad \frac{du(1)}{dx} = \frac{du_1}{dx} \quad (57)$$

Condições de contorno onde a derivada é prescrita são denominadas de *Condição de Contorno de Neumann*, *Condição de Contorno Natural* ou ainda *Condição Complementar*.

A fim de obter a solução as matrizes deverão ser modificadas. A função de aproximação terá um elemento a mais, sendo acrescida da função $\varphi_0(x)$:

$$u_n(x) = \sum_{j=0}^n a_j \cdot \varphi_j(x) = \sum_{j=0}^n u_n(x_j) \cdot \varphi_j(x) = u_n(x_0) \cdot \varphi_0(x) + \sum_{j=1}^n u_n(x_j) \cdot \varphi_j(x) \quad (58)$$

As matrizes $[K]$, $[M]$ e $[F]$ terão uma linha a mais acrescida ao final, sendo portanto matrizes de n linhas e n colunas, mantendo no entanto a forma anterior:

$$[K] = \frac{p}{h} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad (59)$$

$$[M] = \frac{q \cdot h}{6} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad (60)$$

$$[F] = \frac{h}{2} \cdot \begin{bmatrix} f\left(\frac{1}{2} \cdot h\right) + f\left(\frac{3}{2} \cdot h\right) - \left(-\frac{p}{h} + q \cdot \frac{h}{6}\right) \cdot u_0 \cdot \frac{h}{2} \\ f\left(\frac{3}{2} \cdot h\right) + f\left(\frac{5}{2} \cdot h\right) \\ f\left(\frac{5}{2} \cdot h\right) + f\left(\frac{7}{2} \cdot h\right) \\ \vdots \\ f\left[\frac{1}{2} \cdot h + (n-1) \cdot h\right] + f\left[\frac{3}{2} \cdot h + (n-1) \cdot h\right] \\ f\left[\frac{3}{2} \cdot h + (n-1) \cdot h\right] + p \cdot u_1 \cdot \frac{2}{h} \end{bmatrix} \quad (61)$$

$$[A] = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \quad (62)$$

A consideração de condições de contorno não homogêneas exige assim apenas modificações na matriz $[F]$.

9 Bibliografia

A seguir são listados algumas obras sobre o método dos elementos finitos e suas aplicações onde maiores detalhes sobre o exposto poderão ser encontrados.

- 1) *The finite element method using Matlab* : Y. W. Kwon; H. Bang. CRC Press. 1996.
- 2) *An Introduction to finite element analysis* : D. H. Norrie, G. de Vries ; Academic Press, 1978.
- 3) *The mathematical theory of finite element methods* : Susanne C. Brenner, L. Ridgway Scott ; Springer Verlag, 1994.
- 4) *The Texas finite element series* : Volume I, II, III, IV e V ; E. B. Becker, G. F. Carey, J. T. Oden; Prentice Hall, 1981.
- 5) *The finite element method in engineering science* : O. C. Zienkiewicz, McGraw-Hill, 1971.
- 6) *The finite element method and its applications* : Masatake Mori ; Macmillan Publishing Company, 1983.
- 7) *The finite element method for elliptic problems* : P. G. Ciarlet ; North-Holland, 1978.
- 8) *Finite elements for electrical engineers* : P. P. Silvester ; Cambridge Press, 1996.
- 9) *The finite element method in electromagnetics* : J. Jin ; John Wiley & Sons, 1993.
- 10) *An introduction to the finite element method* : J. N. Reddy ; McGraw-Hill, 1993.