

# Método do Elementos Finitos na Análise e Projeto de Dispositivos Eletromagnéticos

Prof. Luís Alberto Pereira, Dr.-Ing. - DELET

# Organização da Palestra

1. Generalidades sobre o M. E. F.
2. Problemas de Valor de Contorno
3. Solução pelo Método dos Elementos Finitos
  - 3.1 Método de Galerkin
  - 3.2 Discretização do Domínio
  - 3.3 Obtenção das Equações Discretas
4. Software por Elementos Finitos e Estudo de Casos Práticos

# 1. Generalidades sobre o M. E. F.

## Histórico :

- 1941 - Hrenikov : problemas da Elastomecânica
- a partir de 1950 : aplicações na indústria aéro-espaçial

## Aplicação na Eletrotécnica :

- 1967 - Winslow : *Diferenças Finitas para Elementos Triangulares*
- a partir de 1970 - Popularização do Método

## Definição :

Método numérico para a solução de equações diferenciais parciais, as quais surgem, por exemplo, na descrição de problemas de valor de contorno.

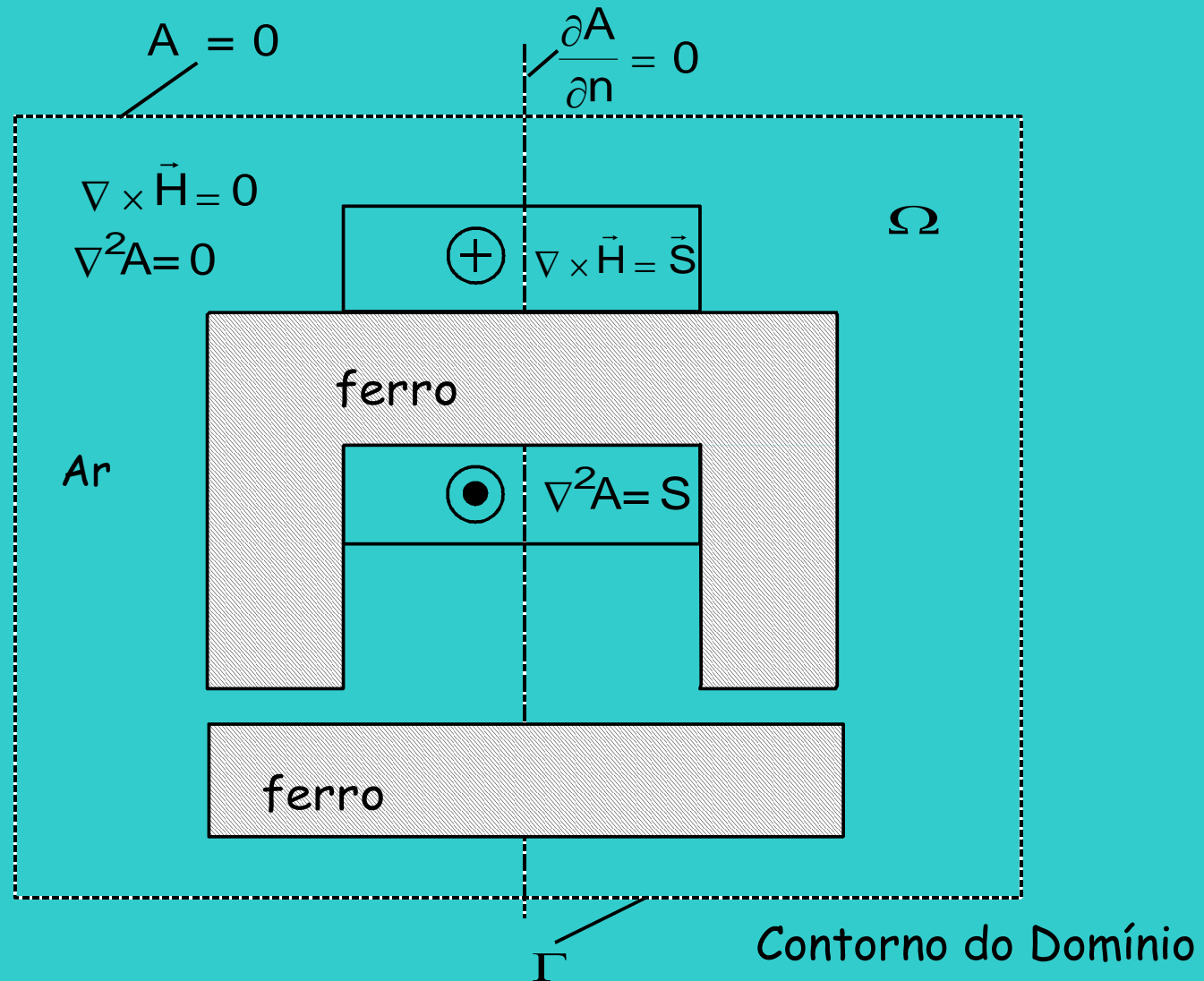
## Vantagens e Características :

- formulação simples
- aplicável a problemas complexos
- possibilita a consideração de não-linearidades
- pode ser implementado em computador

# Aplicações Típicas em Engenharia Elétrica

- Determinação de campos elétricos e magnéticos
- Análise de Dispositivos :
  - máquinas, relés, bobinas, transformadores
  - atuadores
  - biomédica: modelagem de campos em seres vivos
  - análise e modelagem de dispositivos semicondutores
- Otimização de Dispositivos :
  - melhoria de desempenho
  - redução de peso ou volume
  - redução de custos
  - otimização da forma geométrica

## 2. Problemas de Valor de Contorno



# Equações do Domínio (Magnestostática):

Equações de Maxwell

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{S} \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (2)$$

$$\vec{B} = \mu \cdot \vec{H} \quad (3)$$

$$\nabla \times \vec{A} = \vec{B} \quad (4) \quad \text{Potencial Vetor}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla \times \vec{B} = \mu \cdot \nabla \times \vec{H} = \mu \cdot \vec{S} \quad (5)$$

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \mu \cdot \vec{S} \quad (6) \quad \nabla \cdot \vec{A} = 0 \quad (7)$$

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu \cdot \vec{S} \quad (8)$$

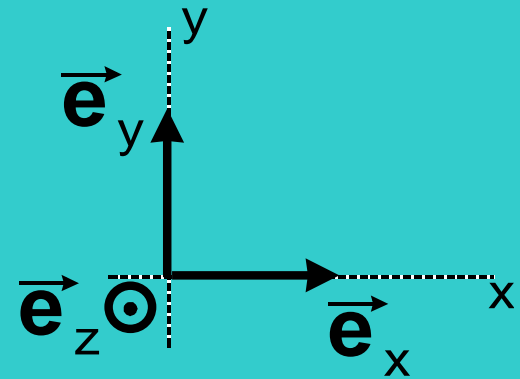
Equação de Poisson em 3D

## Caso Especial de Domínio 2D

$$\vec{S} = S \cdot \vec{e}_z \quad (9)$$

$$\vec{A} = A \cdot \vec{e}_z \quad (10)$$

$$\nabla^2 A = -\mu \cdot S \quad (11a)$$



Explicitamente:

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = -\mu \cdot S \quad (11b)$$

Equação de Poisson em 2D

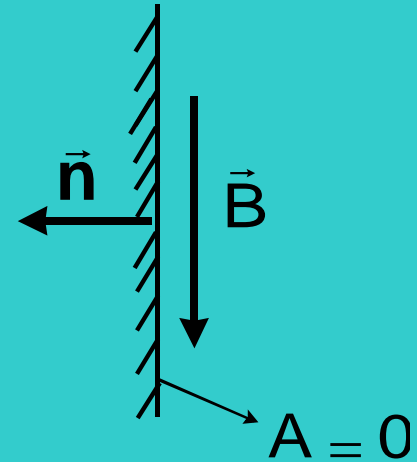


## Condições de Contorno :

→ Condição de Dirichlet

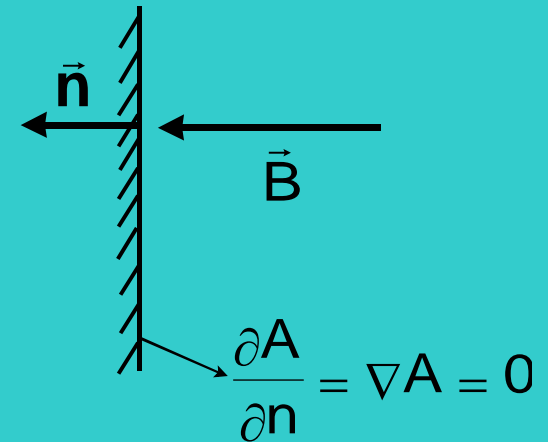
$$A = \text{constante}$$

$$A = 0$$



→ Condição de Neumann

$$\frac{\partial A}{\partial n} = \nabla A = 0$$



## Descrição do Problema de Valor de Contorno 2D

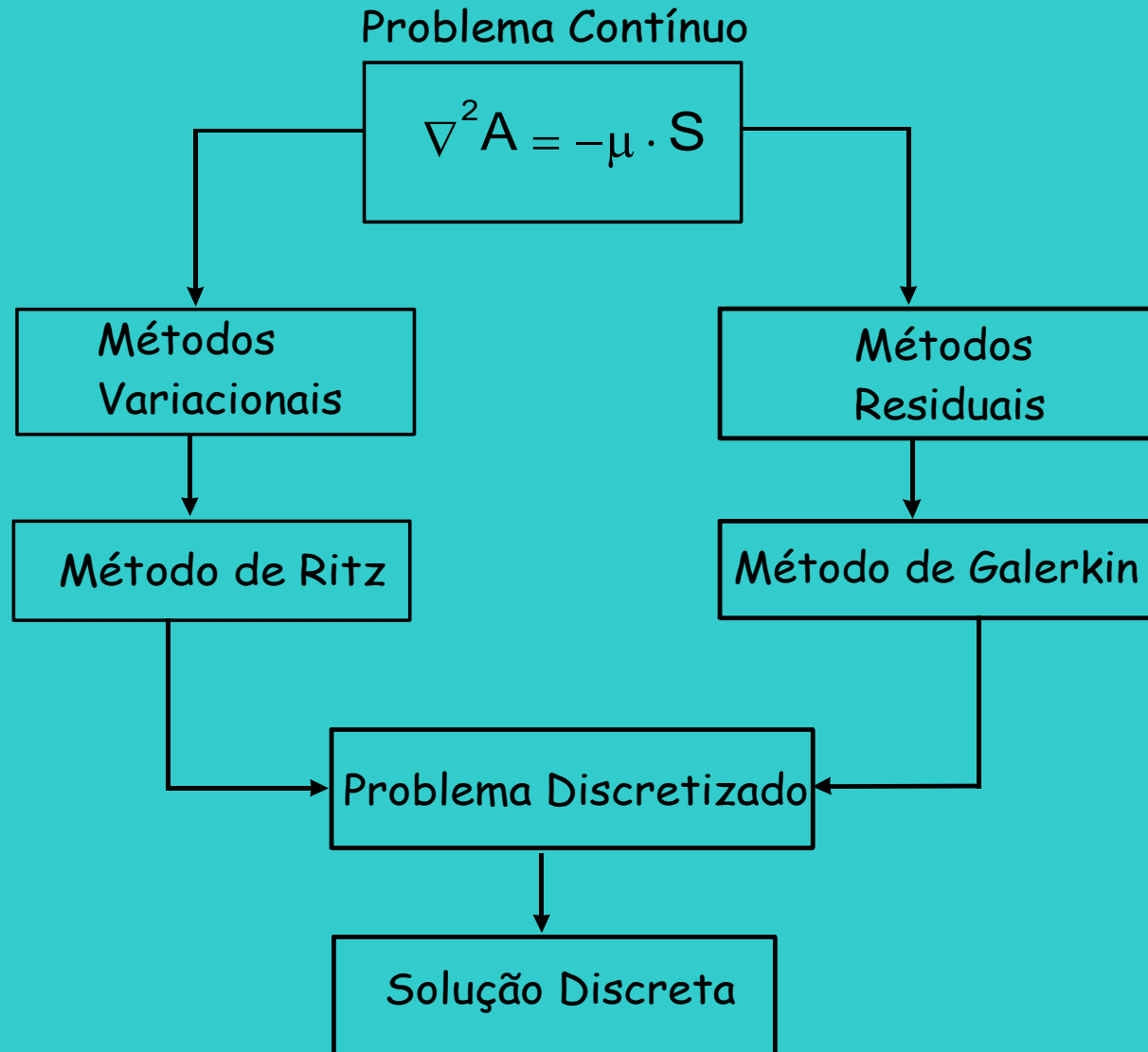
$$\nabla^2 A = -\mu \cdot S \quad \text{no domínio} \quad \Omega$$

$$A = 0 \quad \text{sobre} \quad \Gamma_1$$

$$\frac{\partial A}{\partial n} = \nabla A = 0 \quad \text{sobre} \quad \Gamma_2$$

$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$$

# 3. Solução por Elementos Finitos



### 3.1 Método de Galerkin

$$\nabla^2 A \cdot g = -\mu \cdot S \cdot g \quad (12) \quad g - \text{função de teste}$$

$$\iint_{\Omega} \nabla^2 A \cdot g \cdot d\Omega = -\iint_{\Omega} \mu \cdot S \cdot g \cdot d\Omega \quad (13)$$

Emprego do *Teorema de Green* em 2D, resulta:

$$\iint_{\Omega} \nabla A \cdot \nabla g \cdot d\Omega - \oint_{\Gamma} \nabla A \cdot g \cdot d\Gamma = \iint_{\Omega} \mu \cdot S \cdot g \cdot d\Omega \quad (14)$$

$$\iint_{\Omega} \nabla A \cdot \nabla g \cdot d\Omega - \oint_{\Gamma_1} \nabla A \cdot g \cdot d\Gamma - \oint_{\Gamma_2} \nabla A \cdot g \cdot d\Gamma = \iint_{\Omega} \mu \cdot S \cdot g \cdot d\Omega$$

Considerando-se a condição de contorno em  $\Gamma_2$

$$\frac{\partial A}{\partial n} = \nabla A = 0$$

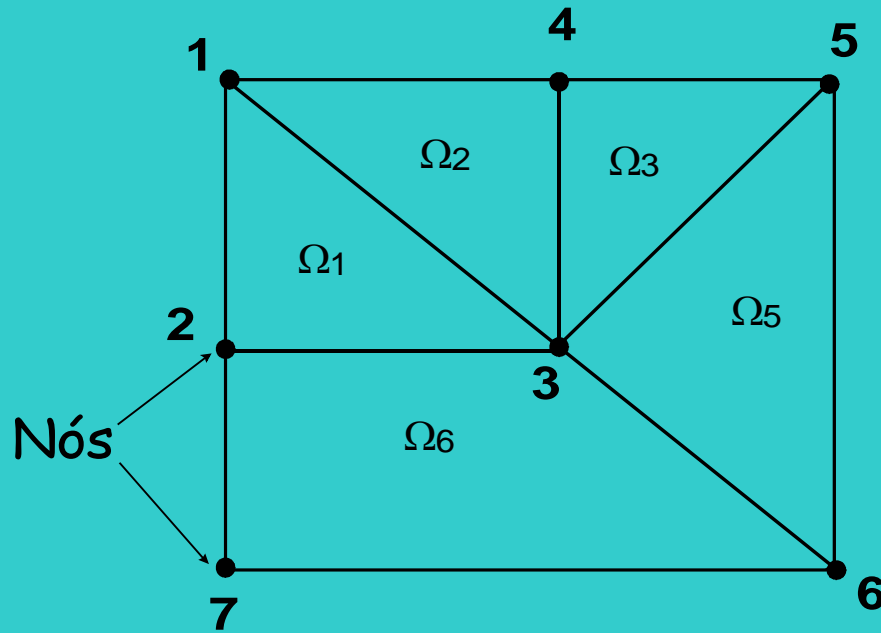
$$\iint_{\Omega} \nabla A \cdot \nabla g \cdot d\Omega - \oint_{\Gamma_1} \nabla A \cdot g \cdot d\Gamma = \iint_{\Omega} \mu \cdot S \cdot g \cdot d\Omega$$

Impondo-se a condição  $g=0$  em  $\Gamma_1$

$$\iint_{\Omega} \nabla A \cdot \nabla g \cdot d\Omega = \iint_{\Omega} \mu \cdot S \cdot g \cdot d\Omega \quad (15)$$

→ Forma fraca da Equação de Poisson

## 3.2 Discretização do Domínio



M Elementos

N Nós

$$\sum_{e=1}^M \iint_{\Omega_e} \nabla A \cdot \nabla g \cdot d\Omega_e = \sum_{e=1}^M \iint_{\Omega_e} \mu \cdot S \cdot g \cdot d\Omega_e \quad (16)$$

- $g$  - será definido para um triângulo padrão
- $A$  - será aproximado para cada triângulo

## 3.3 Obtenção das Equações Discretas

$$A = A(x, y) \cong \bar{A}(x, y) = \sum_{j=1}^N R_j \cdot \phi_j(x, y) \quad (17)$$

Funções de aproximação :  $\phi_j(x, y)$

Exemplos :

- polinômios
- funções trigonométricas
- funções lineares
- etc...

M. E. F. :  $R_j = \bar{A}_j$        $\bar{A}_j \Rightarrow$  Potenciais nos nós

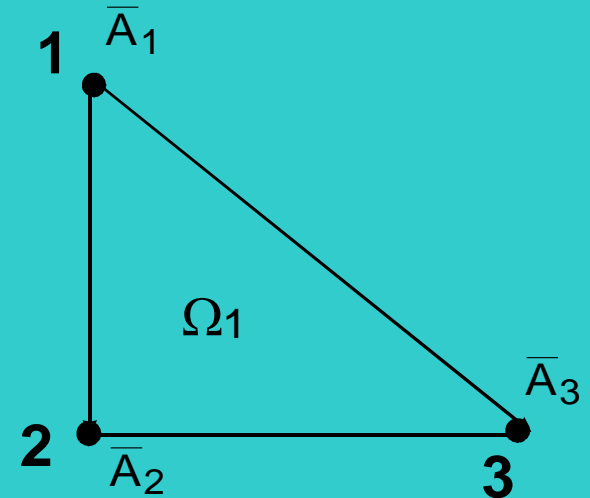
Elementos Triangulares :

$$\bar{A}(x, y) = C_0 + C_1 \cdot x + C_2 \cdot y \quad (18)$$

$$\bar{A}(x_1, y_1) = \bar{A}_1$$

$$\bar{A}(x_2, y_2) = \bar{A}_2 \quad \bar{A}(x_3, y_3) = \bar{A}_3$$

$$A(x, y) = \sum_{j=1}^3 \bar{A}_j \cdot \phi_j(x, y) \quad (19)$$



Interpolação de Lagrange



Método de Galerkin  $\Rightarrow$   $\left\{ \begin{array}{l} \text{funções de teste } g \text{ idênticas} \\ \text{às de aproximação} \end{array} \right.$

$$g_1(x, y) = \phi_1(x, y)$$

$$g_2(x, y) = \phi_2(x, y)$$

$$g_3(x, y) = \phi_3(x, y)$$

$$\iint_{\Omega_e} \nabla \left[ \sum_{j=1}^3 \bar{A}_j \cdot \phi_j \right] \cdot \nabla \phi_i \cdot d\Omega_e = \iint_{\Omega_e} \mu \cdot S \cdot \phi_i \cdot d\Omega_e \quad i = 1,2,3$$

$$\sum_{j=1}^3 \bar{A}_j \cdot \iint_{\Omega_e} \nabla \phi_j \cdot \nabla \phi_i \cdot d\Omega_e = \iint_{\Omega_e} \mu \cdot S \cdot \phi_i \cdot d\Omega_e \quad (20)$$

$$K_{i,j} = \iint_{\Omega_e} \nabla \phi_j \cdot \nabla \phi_i \cdot d\Omega_e \quad (21)$$

$$b_i = \iint_{\Omega_e} \mu \cdot S \cdot \phi_i \cdot d\Omega_e \quad (22)$$

$$\sum_{j=1}^3 \bar{A}_j \cdot K_{i,j} = b_i \quad (23) \quad i = 1,2,3$$

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{A}_1 \\ \bar{A}_2 \\ \bar{A}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \quad (24)$$

Considerando-se todos os elementos do domínio e passando-se para uma numeração global:

$$1 \Rightarrow 5$$

$$2 \Rightarrow 7$$

$$1 \Rightarrow 5$$

$$3 \Rightarrow 10$$

$$[K]_G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K_{11} & 0 & K_{12} & 0 & 0 & K_{13} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K_{12} & 0 & K_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{33} \end{bmatrix}$$

coluna 5      coluna 7      coluna 10  
 ↓                    ↓                    ↓

$[K]_G$ 

Matriz global de coeficientes:

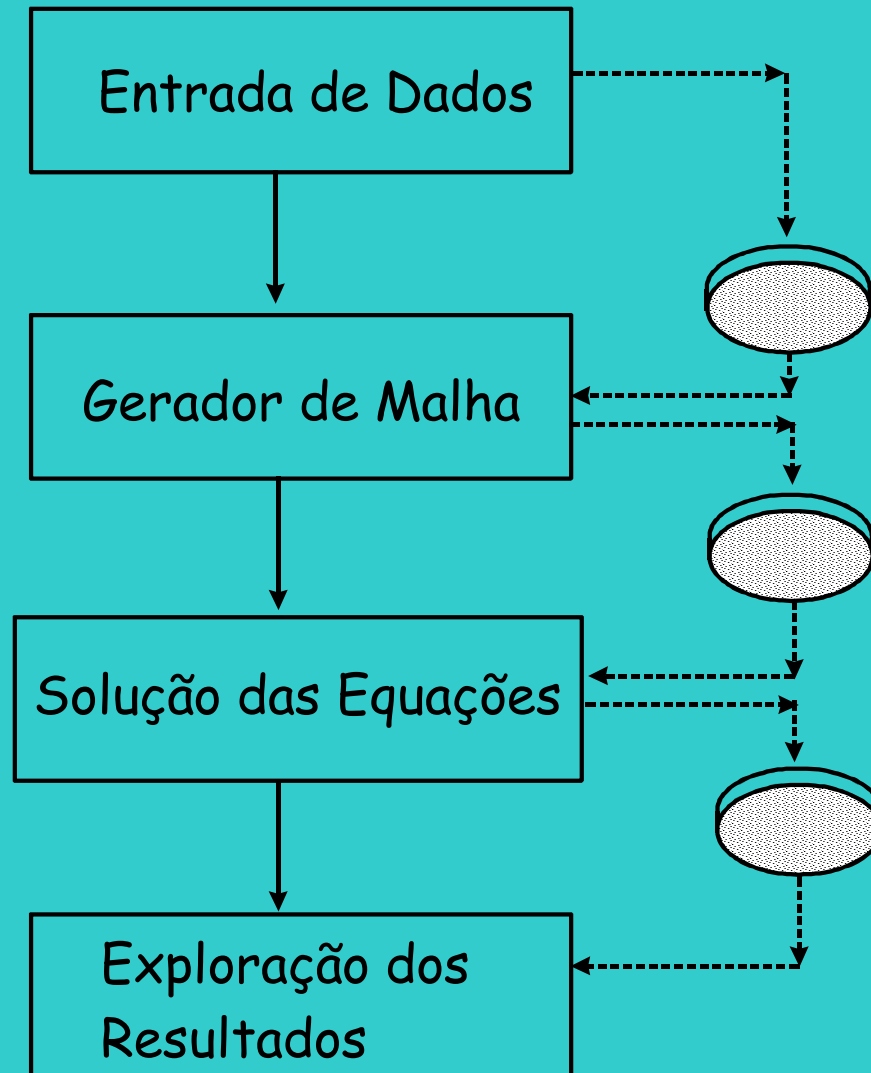
- esparsa
- simétrica

Sistema de Equações Lineares:  $[K]_G \cdot [\bar{A}] = [b] \quad (24)$

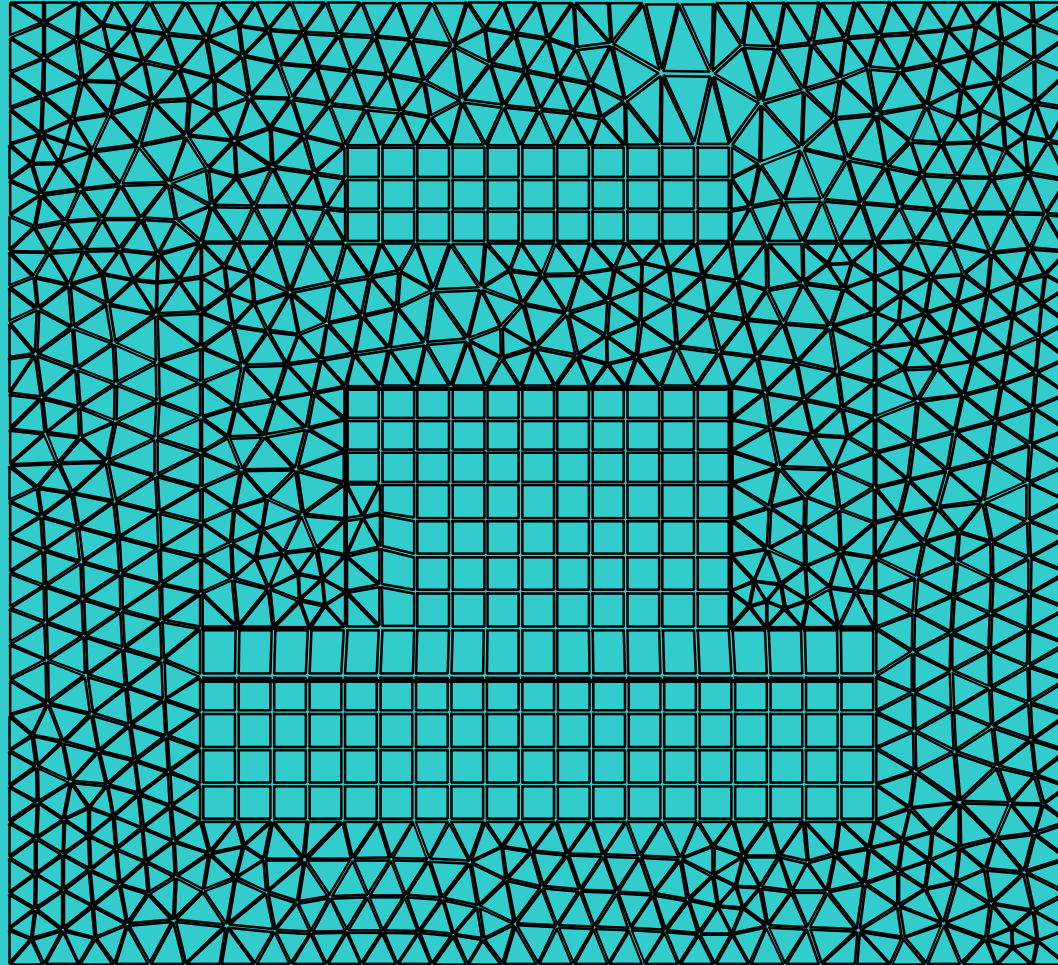
Solução:  $[\bar{A}] = [K]_G^{-1} \cdot [b]$

Determinação do campo:  $[\bar{A}] \Rightarrow \nabla \times \bar{A} = \bar{B}$

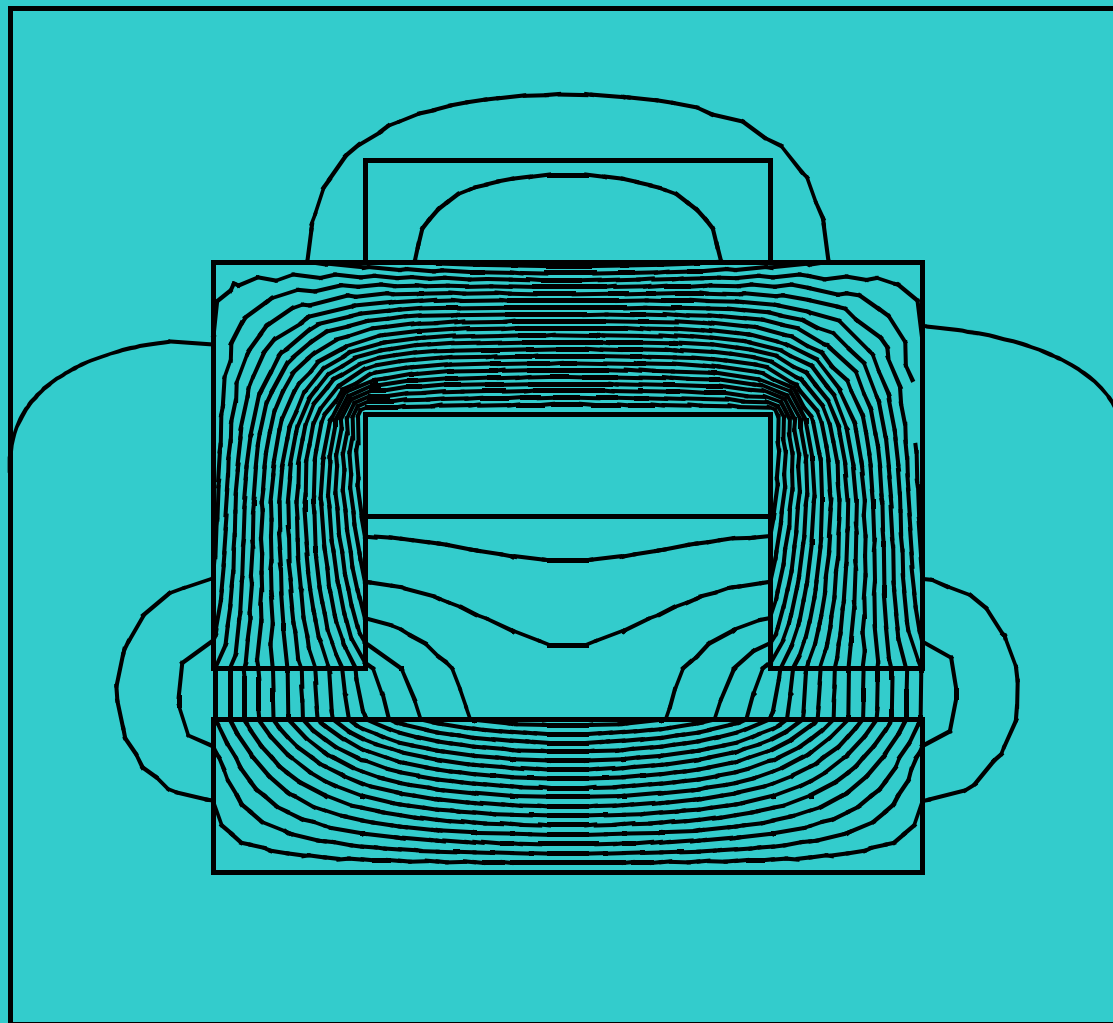
## 4. Software por Elementos Finitos e Estudo de Casos Práticos



# Caso da Magnetostática Analisado



Malha gerada (1550 elementos)



Distribuição do Campo ( $S=5 \text{ A/mm}^2$ )