

Aula 11 - Circuitos Elétricos sob Excitação Senoidal (II)

Introdução

- Circuitos RLC sob excitação senoidal;
- Potência;
- Fator de potência;
- Máxima transferência de potência;
- Ressonância.

Circuitos RLC sob Excitação Senoidal

Na aula anterior, abordaram-se os métodos de solução de circuitos e, como exemplo, analisou-se um circuito RC. Nesta aula, será abordado o circuito RLC, como visto na Fig. 1, sob excitação senoidal.

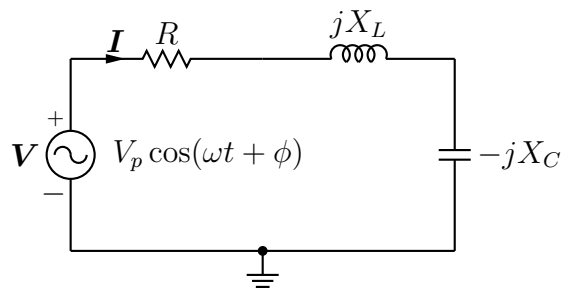


Figura 1: Circuito RLC série.

A queda de tensão, através de cada elemento, é determinada pela lei de Ohm:

$$\mathbf{V}_R = R\mathbf{I}, \quad (1a)$$

$$\mathbf{V}_L = jX_L\mathbf{I}, \quad (1b)$$

$$\mathbf{V}_C = -jX_C\mathbf{I}, \quad (1c)$$

onde:

- $\mathbf{V}_R$ é queda de tensão através da resistência,
- $\mathbf{V}_L$ é queda de tensão através da indutância,
- $\mathbf{V}_C$ é queda de tensão através da capacitância.

A queda de tensão através da resistência, $\mathbf{V}_R$, está em fase com a corrente, $\mathbf{I}$, que passa pela resistência (que é a mesma para o capacitor e indutor). A tensão através da indutância, $\mathbf{V}_L$, está adiantada da corrente de 90° . A tensão através da capacitância, $\mathbf{V}_C$, está atrasada relativamente à corrente de 90° .

Portanto, como V_L e V_C estão exatamente 180° fora de fase e agem exatamente em sentidos opostos, se somando algebricamente, temos duas situações:

1) Quando a reatância X_L for maior do que X_C , o circuito é indutivo. Neste caso, a tensão V_L é maior do que V_C , e a corrente I está atrasada em relação a V em ϕ (graus ou radianos), onde ϕ é o ângulo da impedância equivalente Z . A Fig. 2 exibe os fasores de tensão nesta situação. O fasor de corrente I também está representado, fora de escala, apenas para ressaltar que foi adotado como eixo de referência.

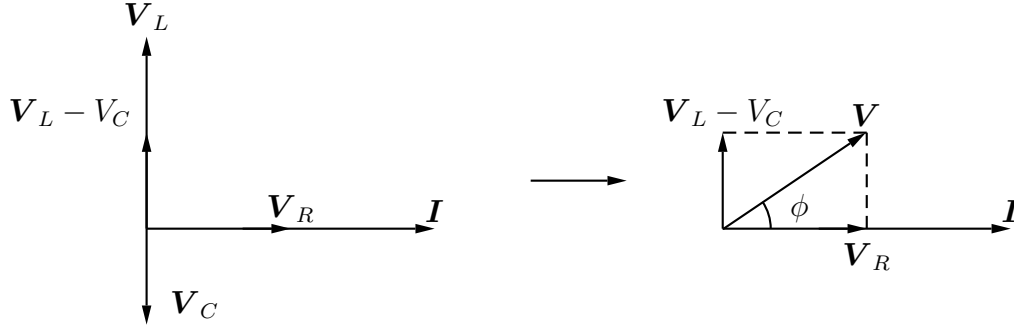


Figura 2: Fasores de tensão do circuito RLC série ($X_L > X_C$).

Quando $X_L > X_C$, o diagrama de fasores da tensão mostra que o módulo da tensão V e o ângulo de fase são os seguintes:

$$|V| = \sqrt{(V_R)^2 + (V_L - V_C)^2}, \quad (2a)$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{V_L - V_C}{V_R}\right). \quad (2b)$$

2) Já quando a reatância X_C é maior do que X_L , o circuito é capacitivo. Agora, a tensão V_C é maior do que V_L , e a corrente I está adiantada em relação a V em ϕ graus. A Fig. 3 exibe os fasores de tensão nesta situação.

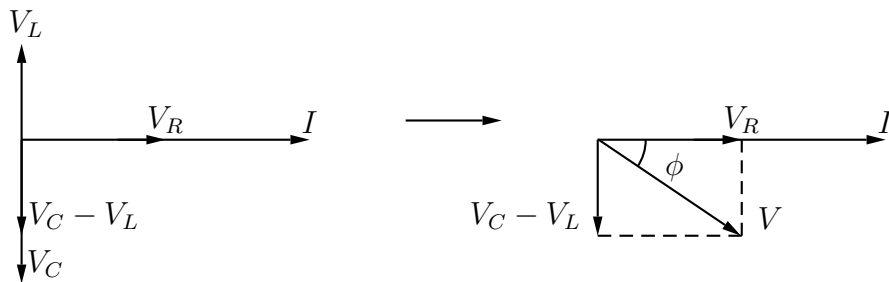


Figura 3: Fasores de tensão do circuito RLC série ($X_C > X_L$).

Quando $X_C > X_L$, o diagrama de fasores da tensão mostra que a tensão V e o ângulo de fase são os seguintes:

$$|V| = \sqrt{(V_R)^2 + (V_C - V_L)^2}, \quad (3a)$$

$$\phi = \arctan\left(-\frac{V_C - V_L}{V_R}\right). \quad (3b)$$

Potência

A maioria das cargas das unidades consumidoras consome energia reativa indutiva, tais como: motores, transformadores, reatores para lâmpadas de descarga, fornos de indução, entre outros. As cargas indutivas necessitam de campo eletromagnético para seu funcionamento, por isso sua operação requer dois tipos de potência: ativa e reativa. Estudaremos agora a potência em circuitos com fontes senoidais. Considerando o circuito senoidal visto na Fig. 4:

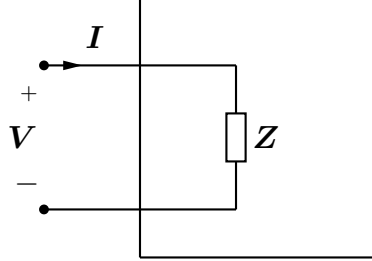


Figura 4: Circuito senoidal para análise da potência.

onde: Z representa a impedância equivalente e V e I são os seguintes sinais senoidais ¹:

$$V = V_P \cos(\omega t + \phi_V), \quad (4a)$$

$$I = I_P \cos(\omega t + \phi_I). \quad (4b)$$

Definindo a corrente como referência, têm-se:

$$V = V_P \cos(\omega t + \phi_V - \phi_I) = V_P \cos(\omega t + \phi), \quad (5a)$$

$$I = I_P \cos(\omega t). \quad (5b)$$

A potência instantânea p é o produto da corrente I pela tensão V para um dado instante t :

$$p = V_P I_P \cos(\omega t + \phi_V - \phi_I) \cos(\omega t). \quad (6)$$

Quando V e I forem ambos positivos ou ambos negativos, o seu produto p é positivo. Portanto, está sendo gasta uma potência. Caso I seja positivo e V negativo (ou vice-versa) o seu produto será negativo. Esta “potência negativa”, não está disponível para a realização de trabalho.

Usando identidades trigonométricas, pode-se expandir a Eq. (6):

$$p = \frac{V_P I_P}{2} \cos(\phi_V - \phi_I) + \frac{V_P I_P}{2} \cos(\phi_V - \phi_I) \cos(2\omega t) - \frac{V_P I_P}{2} \sin(\phi_V - \phi_I) \sin(2\omega t). \quad (7)$$

A Eq. (7) pode ser escrita do seguinte modo:

$$p = P + P \cos(2\omega t) - Q \sin(2\omega t), \quad (8)$$

onde:

$$P = \frac{V_P I_P}{2} \cos(\phi_V - \phi_I), \quad (9a)$$

$$Q = \frac{V_P I_P}{2} \sin(\phi_V - \phi_I). \quad (9b)$$

P é definido como potência média e Q como potência reativa. A potência P também é chamada de **potência real**. A potência real é a potência que efetivamente realiza trabalho gerando calor, luz, movimento, etc. A potência real pode ser considerada como a potência resistiva dissipada na forma de calor.

¹ $|f| = f_p$

Para o capacitor e indutor, a tensão através da reatância está sempre 90° fora de fase em relação à corrente que passa pela reatância, o produto $p = vi$ é então a potência reativa, Q . A potência reativa não está disponível para a realização de trabalho, é usada apenas para criar e manter os campos eletromagnéticos das cargas indutivas.

Assim, enquanto a potência ativa é sempre consumida na execução de trabalho, a potência reativa, além de não produzir trabalho, circula entre a carga e a fonte de alimentação, ocupando um espaço no sistema elétrico que poderia ser utilizado para fornecer mais energia ativa.

Outra forma de representar a potência complexa pode ser obtida através da representação fasorial das tensões, correntes e impedâncias. Considerando o circuito visto na Fig. 4, têm-se:

$$\mathbf{V} = |V| \angle \phi_V = V_R + j V_I, \quad (10a)$$

$$\mathbf{I} = |I| \angle \phi_I = I_R + j I_I, \quad (10b)$$

$$\mathbf{Z} = |Z| \angle \phi = R + j X. \quad (10c)$$

onde: os índices R e I representam, respectivamente, a parte real e imaginária da tensão e corrente, dados em RMS. Ainda, $\phi_V - \phi_I = \phi$.

Assim, a potência $\mathbf{S}$ pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \mathbf{V}_{RMS} \mathbf{I}_{RMS}^* = (V_R + j V_I) (I_R + j I_I) \\ \mathbf{S} &= V_R I_R + j V_R I_I + j V_I I_R - (V_I I_I) \\ \mathbf{S} &= (V_R I_R - V_I I_I) + j(V_R I_I + V_I I_R) \\ \mathbf{S} &= \underbrace{(V_R I_R - V_I I_I)}_{\Re\{\mathbf{V}\mathbf{I}^*\}} + j \underbrace{(V_R I_I + V_I I_R)}_{\Im\{\mathbf{V}\mathbf{I}^*\}} \\ \mathbf{S} &= P + j Q, \end{aligned} \quad (11)$$

ou seja, somando os fasores de P e Q obtemos o fasor de **Potência Aparente**, S. Representando os fasores destas potências, obtemos o triângulo de potência visto a seguir, supondo um circuito “mais capacitivo” ou “mais indutivo”.

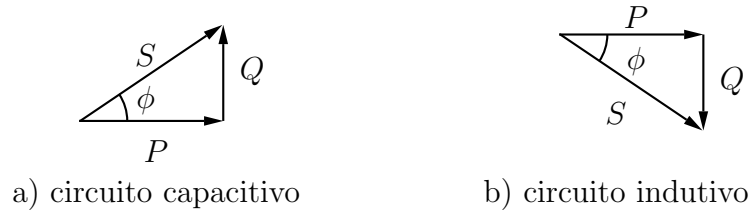


Figura 5: Triângulo de potência para um circuito: a) capacitivo e b) indutivo.

A partir do triângulo de potência, tira-se as seguintes fórmulas para as potências P, Q e S:

$$P = V I \cos(\phi), \quad (12a)$$

$$Q = V I \sin(\phi), \quad (12b)$$

$$|S| = V I = \sqrt{P^2 + Q^2}. \quad (12c)$$

As unidades de potência aparente, S, potência real, P, e potência reativa, Q, são, respectivamente, Volt - Ampéres [VA], Watts [W], e Volt - Ampéres Reativos [VAR].

Os valores (módulos) de tensão, V , e corrente, I , vistos nas equações anteriores, são dados em RMS ($V_{RMS} = V_P/\sqrt{2}$); assim, é fácil mostrar que:

$$S = \frac{1}{2} \mathbf{V} \mathbf{I}^*. \quad (13)$$

Formas Alternativas de Potência

As Eqs. (13) e (12c) podem ser escritas de um modo diferente. A primeira alteração consiste em substituir a tensão V pelo produto $Z I$ na Eq. (13):

$$\begin{aligned} S &= Z I_{RMS} \mathbf{I}_{RMS}^* \\ S &= |I_{RMS}|^2 Z \\ S &= |I_{RMS}|^2 (R + j X) \\ S &= |I_{RMS}|^2 R + j |I_{RMS}|^2 X \\ S &= P + j Q, \end{aligned} \quad (14)$$

e portanto:

$$P = \frac{1}{2} I_P^2 R, \quad (15a)$$

$$Q = \frac{1}{2} I_P^2 X. \quad (15b)$$

Medidor de Potência: Wattímetro.

Um wattímetro é um instrumento que mede potência CC ou potência CA real. O wattímetro utiliza bobinas fixas para indicar a corrente no circuito, enquanto uma bobina móvel indica tensão.

O wattímetro é especificado em termos de sua corrente, tensão e potência máxima. Cada uma destas especificações devem ser observadas para evitar danos ao instrumento. A leitura do Wattímetro, L_W , é: $L_W = V I \cos(\phi)$.

Fator de Potência

A razão entre a potência real e a potência aparente é chamada de fator de potência (FP). Ele indica a eficiência do uso da energia. Um alto fator de potência indica uma eficiência alta e, inversamente, um baixo fator de potência indica uma baixa eficiência energética. Considerando o circuito visto na Fig. 5, vemos que:

$$FP = \frac{\text{potência real}}{\text{potência aparente}} = \frac{P}{S} = \frac{VI \cos(\phi)}{VI} = \cos(\phi). \quad (16)$$

O $\cos(\phi)$ de um circuito é então o seu fator de potencia. O fator de potência determina que parcela da potência aparente é potência real e pode variar desde 1, quando o ângulo de fase ϕ é igual a 0° , até 0, quando ϕ for igual a 90° . Quando $\phi = 0^\circ$, $P = VI \neq 0$, a tensão e a corrente do circuito estão em fase. Quando $\phi = 90^\circ$, $P = VI \times 0 = 0$, nenhuma potência está sendo gasta ou consumida.

Usualmente, diz-se que um circuito onde a corrente segue “atrás” da tensão (isto é, um circuito indutivo) tem um FP indutivo ou de atraso. Já em um circuito, onde a corrente segue na “frente” da tensão (isto é, um circuito capacitivo) tem um FP capacitivo ou de avanço.

O fator de potência pode ser expresso como um decimal ou como uma porcentagem, por exemplo: um $FP = 0,7 = 70\%$ indica que o circuito, aparelho, ou motor utiliza somente 70% dos voltampéres

da entrada. Assim, é racional projetar um circuito que tenha o maior FP possível, utilizando de forma mais eficiente a corrente fornecida e gerando a maior potência permitida.

Como consequência de um baixo fator de potência, pode-se citar:

- **Perdas na instalação:** as perdas de energia elétrica ocorrem em forma de calor e são proporcionais ao quadrado da corrente total ($I^2 R$). Como essa corrente cresce com o excesso de energia reativa, estabelece-se uma relação entre o incremento das perdas e o baixo fator de potência, provocando o aumento do aquecimento de condutores e equipamentos
- **Quedas de tensão:** O aumento ...
- Subutilização da Capacidade Instalada.

Máxima Transferência de Potência.

Em muitos sistemas elétricos, como os de comunicação e instrumentação, e desejável, algumas vezes, que a transferência de potência da fonte de alimentação para a carga seja a maior possível.

Considerando, por exemplo, o circuito visto abaixo, caso pudéssemos ajustar somente um dos componentes deste circuito de modo a obter a máxima transferência de potência teríamos as seguintes situações:

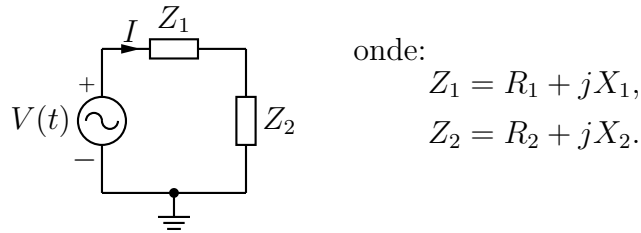


Figura 6: Circuito para análise da máxima transferência de potência.

- Somente R_2 variável:

$$R_2 = \sqrt{R_1^2 + (X_1 + X_2)^2}. \quad (17)$$

- Somente X_2 variável:

$$X_2 = -X_1. \quad (18)$$

- Somente $|Z_2|$ variável:

$$|Z_2| = |Z_1|. \quad (19)$$

- Caso geral:

$$Z_2 = Z_1^*{}^2. \quad (20)$$

Ou seja, o problema consiste em determinar a impedância Z_2 para a qual a potência transferida pelo circuito seja máxima.

Como visto no Laboratório 2, qualquer circuito linear pode ser substituído por um circuito pelo seu equivalente de Thévenin. Assim, de um modo geral, para que a potência transferida seja máxima, a

² Z_1^* é o complexo conjugado de Z_1 .

carga, definida como Z_L , colocada na saída de um circuito, deve ser igual ao complexo conjugado da impedância de Thévenin, isto é:

$$Z_L = Z_{Th}^*. \quad (21)$$

Ressonância

Já observamos em outras aulas o comportamento de circuitos RLC série e paralelo. Continuando o estudo destes circuitos, ressalta-se que outra característica importante de um circuito RLC é que é possível fazê-lo responder a uma única frequência dada, com maior eficiência. Ao funcionar nesta condição, diz-se que o circuito está em ressonância. Há dois tipos de ressonância: série e paralela, que serão vistas a seguir.

Ressonância Série

O circuito RLC série, Fig. 7, tem uma impedância $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$, considerando $X_L > X_C$.

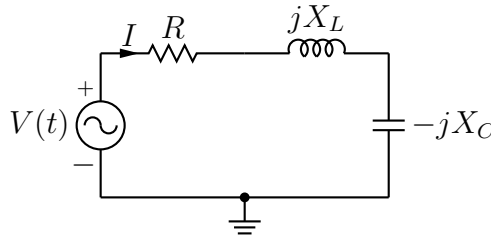


Figura 7: Circuito RLC série em ressonância.

O circuito está em ressonância quando a reatância indutiva X_L é igual a reatância capacitiva X_C :

$$X_L = X_C. \quad (22)$$

Portanto, na ressonância:

$$2\pi fL = \frac{1}{2\pi fC}. \quad (23)$$

Isolando f , obtém-se a frequência de ressonância, f_r , em Hz:

$$f = f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{0,159}{\sqrt{LC}}. \quad (24)$$

Como $X_L = X_C$, $X_L - X_C = 0$, assim:

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2} = R. \quad (25)$$

Portanto, a impedância equivalente do circuito na frequência de ressonância é igual à resistência R (seu valor mínimo). A corrente, conseqüentemente, é máxima. O circuito ressonante tem um ângulo de fase igual a 0° e portanto o fator de potência é igual a um.

Ressonância Paralela

No circuito LC puramente paralelo (isto é, aquele no qual não há resistência), visto na Fig. 8, a ressonância ocorre quando a reatância indutiva é igual a reatância capacitiva.

isto é:

$$X_L = X_C. \quad (26)$$

A tensão aplicada é a mesma em ambos os ramos, isto é:

$$V_L = V_C, \quad (27)$$

de modo que:

$$\frac{V_L}{X_L} = \frac{V_C}{X_C} \rightarrow I_L = I_C. \quad (28)$$

Na frequência de ressonância, a corrente I_L está atrasada em relação à tensão aplicada V de 90° , enquanto I_C está adiantada da tensão 90° . Como os fasores das corrente I_L e I_C são iguais em módulo e estão defasados de 180° , seu vetor soma é zero e portanto a corrente total I_T é zero. Nestas condições, a impedância do circuito na frequência de ressonância terá um valor infinito.

A fórmula para a frequência de ressonância de um circuito LC puro sintonizado em paralelo é a mesma que para o circuito sintonizado em série, ou seja:

$$f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{0,159}{\sqrt{LC}}. \quad (29)$$

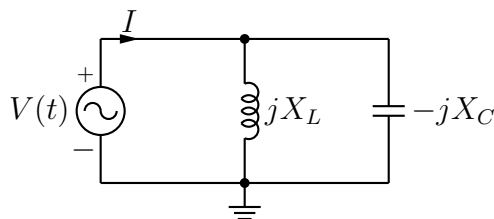


Figura 8: Circuito LC puro ligado em paralelo.