Definições de Sinais e Sistemas

- **O que é um Sinal?**
- **O que é um Sistema?**
- **Visão Geral de Sistemas Específicos**
- **Processamento de Sinais Analógicos *Versus* Digitais**

O que é um Sinal?

"Função de uma ou mais variáveis, a qual veicula informação sobre a natureza de um fenômeno físico."

Dependente de uma variável ⟹ Unidimensional

Dependente de duas ou mais variáveis ⟹ Multidimensional

Exemplos de Sinais

Sinais de Voz (unidimesional)
- Frente a frente
- Via telefone

Sinais de Imagem (multidimesional)
- Pessoas
- Objetos (escrita)

Formas de comunicação

Exemplos de Sinais

- Batimentos cardíacos
- Pressão sanguínea
- Temperatura
- Nível de glicose
- Índice de colesterol

Diagnóstico do estado de saúde de pacientes

Exemplos de Sinais

- Variações diárias de temperatura
- Umidade relativa do ar
- Velocidade e direção dos ventos

Previsão do tempo

Exemplos de Sinais

- Rentabilidade
- Risco de mercado
- Risco de crédito
- Transparência
- Benchmark
- Volatilidade

Investimento no mercado de ações

- Risco de mercado: é a possibilidade de ocorrência de perdas decorrentes do efeito da oscilação de preços, índices e taxas sobre os descasamentos de prazos, moedas e indexadores das carteiras ativa e passiva;
- Risco de crédito: pode ser definido como a tentativa de se medir o grau de incerteza na obtenção do retorno esperado em uma determinada aplicação financeira ou investimento realizado;
- Benchmark: índice escolhido pelo usuário para representar a evolução média do mercado de *ações* (Ibovespa).

O que é um Sistema?

"Um sistema é definido como uma entidade que manipula um ou mais sinais para realizar uma função, produzindo novos sinais."

Exemplos de Sistemas

- Sinal de entrada
  - Voz
- Sistema
  - Computador
- Sinal de saída
  - Identidade do locutor

Reconhecimento automático de locutor

Exemplos de Sistemas

- Sinal de entrada
  - Voz ou dados
- Sistema
  - Transmissor + Canal+Receptor
- Sinal de saída
  - Estimativa da informação original

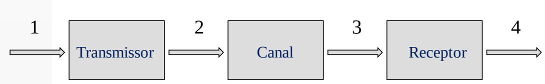
Sistema de comunicação

Exemplos de Sistemas

- Sinal de entrada
  - Posição desejada da aeronave
- Sistema
  - Avião + Piloto
- Sinal de saída
  - Posição da aeronave

Sistema de aterrissagem de um avião

Sistemas de Comunicação



1. Informação
2. Sinal transmitido
3. Sinal recebido
4. Estimativa da informação

Sistemas de Comunicação

1. Transmissor — *Converte o sinal de mensagem para uma forma apropriada ao canal.*
2. Canal — *Ar, fibra óptica, cabo coaxial, canal de satélite, canal de rádio, etc..*
3. Receptor — *Processa o sinal recebido, corrige os efeitos do canal e recupera a mensagem.*

Sistemas de Comunicação

1. Analógicos — *Portadora (sinal de alta-frequência) Senoidal, Modulada em Amplitude, Frequência ou Fase.*
2. Digitais — *Sinais analógicos digitalizados*
   1. *Amostragem*
   2. *Quantização*
   3. *Codificação*
   4. *Possibilidade de inserção de redundância*

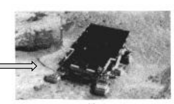
Sistemas de Comunicação

1. Radiodifusão
   1. *Um único transmissor*
   2. *Vários receptores*
2. Ponto a ponto (*normalmente bidirecional*)

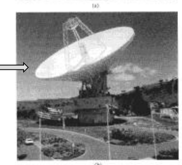
Exemplos ?

Comunicação Ponto a Ponto

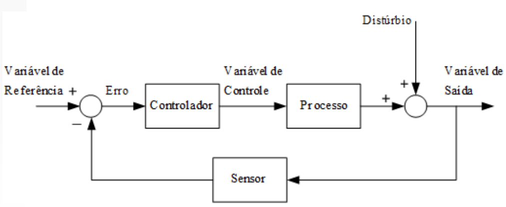
Robô Pathfinder



Antena pertencente a Deep Space Network - DSN



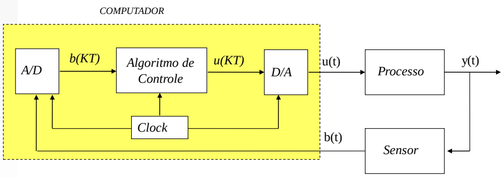
Sistemas de Controle



Sistemas de Controle

1. Resposta — *Desempenho dinâmico*; *Regulação*
2. Robustez — *Manutenção das características de resposta*; *Variações nos parâmetros e distúrbios*

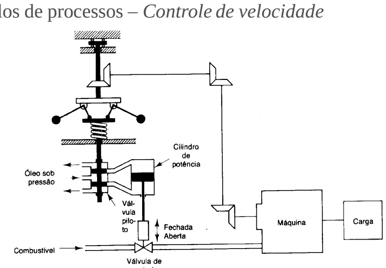
Sistemas de Controle Digital



Sistemas de Controle

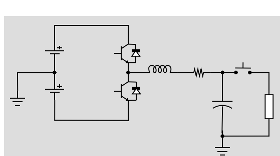
1. Lineares ou não-lineares
2. Variantes ou invariantes no tempo
3. Uma entrada e uma saída – *SISO*
4. Múltiplas entradas e múltiplas saídas – *MIMO*
5. Malha-aberta ou malha-fechada

Exemplos de processos – *Controle de velocidade*

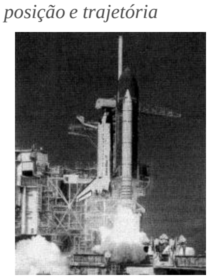


Exemplos de processos – *Controle de temperatura*

Exemplos de processos – *Controle de tensão*



Exemplos de processos – *Controle de posição e trajetória*



Sensoriamento Remoto

"Processo de adquirir informações sobre um objeto de interesse sem estar em contato físico com ele."

1. Passiva – apenas recolhendo informações existentes.
2. Ativa – excitando a área ou objeto de interesse e processando o sinal de retorno.

Sensoriamento Remoto

1. Sensores de radar – *Propriedades físicas (topografia, aspereza, umidade, etc..)*
2. Sensores infravermelhos – *Propriedades térmicas próximas a superfície planeta.*

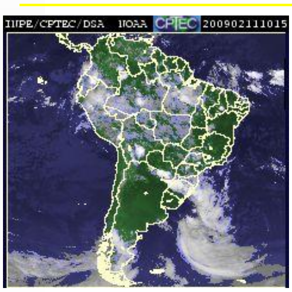
Sensoriamento Remoto

1. Sensores visíveis – *Composição química da superfície do planeta*
2. Sensores de raio X – *Materiais radioativos contidos do planeta*

Imagens de alta resolução → *Técnicas de processamento de sinais (ex. FFT)*

Estreito de Dover

Monte Shasta (Califórnia)



Satélite GOES

O GOES é um dispositivo de 5 canais espectrais sendo um visível (0,55-0,75 μm), três canais infravermelhos (3,8-4,0 μm, 10,2-11,2 μm, 11,5-12,5 μm) e o canal de vapor d'água (6,5-7,0 μm).

http://satelite.cptec.inpe.br

Processamento de Sinais Biomédicos

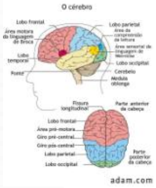
"Extração de informações que auxilie na compreensão dos mecanismos básicos da função biológica, bem como no diagnóstico e tratamento médico."

Sinais biológicos – *Atividade elétrica de grandes grupos de células nervosas e musculares.*

Processamento de Sinais Biomédicos

Atividade elétrica do coração – *Eletrocardiograma (ECG)*

Registra a atividade elétrica do coração em repouso, geralmente através da colocação de dez eletrodos: dois localizados nas pernas , dois localizados nos antebraços e seis localizados na região anterior do tórax.



Atividade elétrica do cérebro – *Eletroencefalograma (EEG)*

Processamento de Sinais Biomédicos

- Sinais elétricos de baixa intensidade que podem estar corrompidos por fatores de ordem:
  - Instrumental - ex: frequência da rede elétrica
  - Biológica – ex: interferência da atividade cardíaca no EEG
  - Análise – ex: processamento inadequado dos sinais

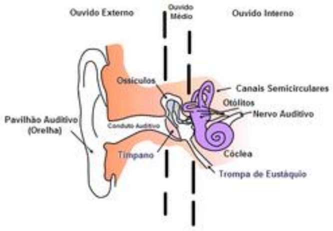
Processamento de Sinais Biomédicos

- Instrumental ou biológica

Sinal medido → Filtro → Sinal filtrado

Sistema de Equilíbrio Humano

Origina-se primeiramente no interior dos ouvidos onde canais semicirculares fornecem a informação de aceleração angular e partículas de carbonato de cálcio, encontradas na superfície da membrana otolítica da mácula interna do ouvido, fornecem informação relacionada com a aceleração linear.



Sistema de Equilíbrio Humano

Realize o seguinte experimento: fique em pé e coloque um pé em frente ao outro, de forma que os dois pés fiquem alinhados mantendo os braços na posição normal. Feche os olhos e descreva o que acontece com o equilíbrio do seu corpo.

Por quê?

Processamento de Sinal Analógico *Versus* Digital

Processamento de sinais

1. *Abordagem analógica ou de tempo contínuo*
2. *Abordagem digital ou de tempo discreto*

Processamento analógico de sinais

1. *Circuitos analógicos compostos por resistores, capacitores, indutores, amp. operacionais, etc..*
2. *Aplicáveis a sinais independente da faixa de frequência.*
3. *Menor flexibilidade.*

Processamento de Sinal Analógico *Versus* Digital

Processamento digital de sinais

1. *Aplicações realizadas com dispositivos eletrônicos programáveis (microcontroladores, FPGAs, etc..).*
2. *Aplicáveis a sinais com frequências compatíveis às frequências de operações destes dispositivos.*
3. *Maior flexibilidade.*
4. *Repetibilidade.*

Classificação de Sinais

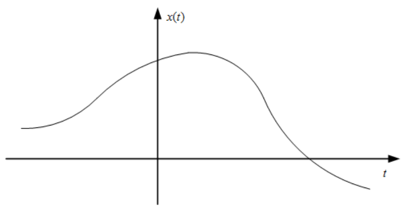
Introdução

Sinais unidimensionais: definidos como funções de valor único.

Valor único
1. *Número real: sinal de valor real*
2. *Número complexo: sinal de valor complexo*

Sinais de Tempo Contínuo e Tempo Discreto

$x(t)$ é dito ser de *tempo contínuo* se definido para todo t.

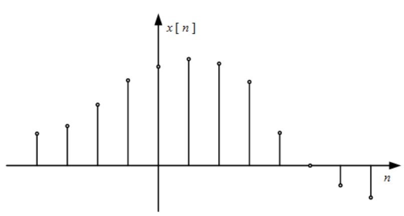


Sinais de Tempo Contínuo e Tempo Discreto

Um sinal de tempo discreto *é frequentemente derivado de um sinal de tempo contínuo, amostrando-se a uma taxa uniforme. Definindo T como período de amostragem e n como sendo um número inteiro tem-se para $t=nT$, $x(t)=x(nT)$.*

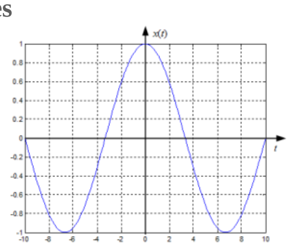
Por conveniência será utilizado $x[n]=x(nT)$ para todo $n \in Z$.

Sinais de Tempo Contínuo e Tempo Discreto



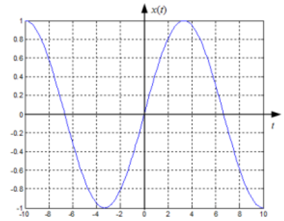
Sinais Pares e Ímpares

Um sinal $x(t)$ será dito par se $x(-t)=x(t)$ (simétrico em relação ao eixo das ordenadas)



Sinais Pares e Ímpares

Um sinal x(t) será dito ímpar se x(-t)=-x(t) (antissimétrico em relação ao eixo das ordenadas)



Sinais Pares e Ímpares

Exemplo 1.1: Desenvolva a decomposição par/ímpar de um sinal genérico *x(t)* aplicando as definições anteriores:

$$x(t) = x_p(t) + x_i(t)$$

$$x(-t) = x_p(-t) + x_i(-t)$$

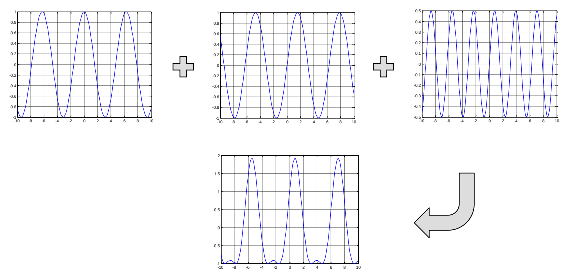
Sinais Pares e Ímpares

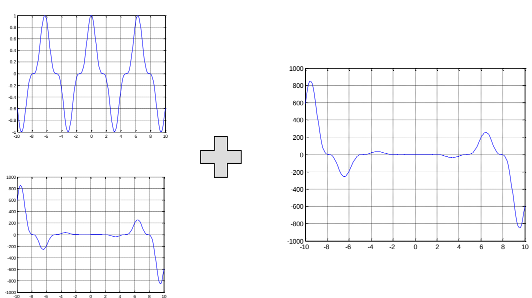
Problemas do Livro (Haykin pág. 78):

1.1 Encontre as componentes par e ímpar de cada um dos seguintes sinais:

$$x(t) = \cos(t) + sen(t) + sen(t)\cos(t)$$

$$x(t) = (1 + t^3)\cos^3(10t)$$





Sinais Pares e Ímpares

Para sinais de valores complexos utiliza-se a definição de simetria conjugada, ou seja:

$$x(-t) = x^*(t)$$

Se $x(t) = a + jb$ apresentar simetria conjugada,

então $x(-t) = a - jb$

Sinais Pares e Ímpares

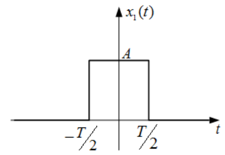
Sendo $x(t) = a + jb$ e $x^*(t) = a - jb$ então

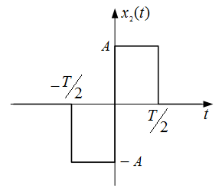
$\mathrm{Re}(x(t))$ apresenta simetria par

$\mathrm{Im}(x(t))$ apresenta simetria ímpar

Sinais Pares e Ímpares

Sendo $x_1(t)$ a parte real de um sinal e $x_2(t)$ a parte imaginária do mesmo sinal, avaliar se é um sinal conjugado simétrico.





Sinais Periódicos e Não-Periódicos

Um sinal *x(t)* é dito periódico se satisfizer a condição:

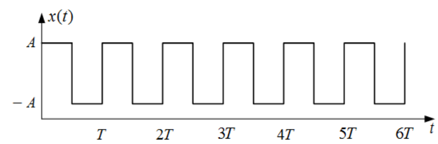
$$x(t) = x(t+T)\ \forall\ t \in \Re,\ T \in \Re^+$$

T:= Período fundamental do sinal (s)

f:= Frequência fundamental do sinal (Hz) $\quad f = \dfrac{1}{T}$

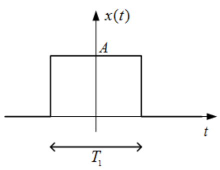
ω:= Frequência angular fundamental do sinal (rad/s) $\quad \omega = \dfrac{2\pi}{T}$

Sinais Periódicos e Não-Periódicos



$$x(t) = x(t+T)\ \forall\ t \in \Re,\ T \in \Re^+$$

Sinais Periódicos e Não-Periódicos



$$x(t) = x(t+T)\ \forall\ t \in \Re,\ T \in \Re^+$$

Sinais Periódicos e Não-Periódicos

Para sinais de tempo discreto, *x[n]* é dito periódico se satisfizer a condição:

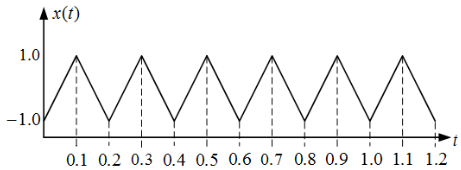
$$x[n] = x[n+N]\ \forall\ n \in Z,\ N \in Z^+$$

N:= Período fundamental do sinal

Ω:= Frequência angular fundamental do sinal $\quad \Omega = \dfrac{2\pi}{N}$

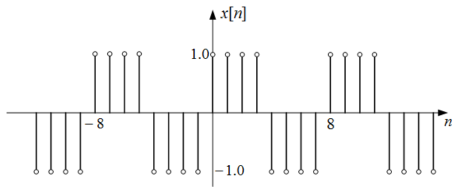
Sinais Periódicos e Não-Periódicos

Exemplo: Avaliar se é um sinal de tempo contínuo ou de tempo discreto e determinar o período e a frequência fundamental.



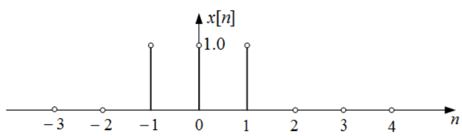
Sinais Periódicos e Não-Periódicos

Exemplo: Avaliar se é um sinal de tempo contínuo ou de tempo discreto e determinar o período e a frequência fundamental.



Sinais Periódicos e Não-Periódicos

Exemplo: Avaliar se é um sinal de tempo contínuo ou de tempo discreto e determinar o período e a frequência fundamental.

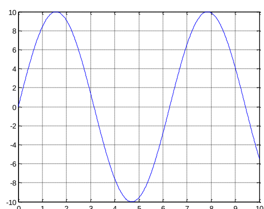


Sinais Determinísticos e Sinais Aleatórios

"Um sinal determinístico é um sinal sobre o qual não existe nenhuma incerteza com respeito ao seu valor em qualquer instante de tempo."

Exemplo: $x(t) = 10\, sen(t)$

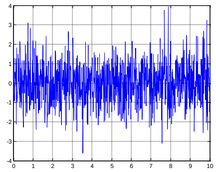
Sinal Determinístico



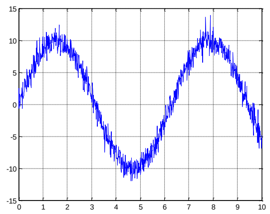
Sinal Aleatório

"Um sinal aleatório é um sinal sobre o qual há incertezas associadas ao seu valor em qualquer instante de tempo."

Exemplo: Ruído branco



Sinal Corrompido por Ruído



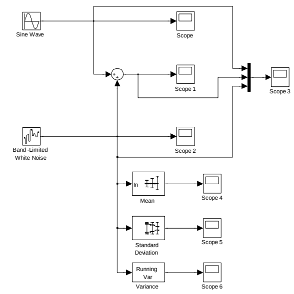
Sinal determinístico:

$$x(t) = 10\ sen(t)$$

Sinal aleatório:

- Média;
- Variância;
- Desvio padrão.

Arquivo determ_aleat.mdl



Sinais de Energia e Sinais de Potência

Em sistemas elétricos um sinal normalmente é representado pela tensão ou corrente elétrica. Considera-se então a potência instantânea dissipada em um resistor:

$$p(t) = \frac{v^2(t)}{R} \quad ou \quad p(t) = Ri^2(t)$$

Sinais de Energia e Sinais de Potência

Em ambos os casos a potência é proporcional à amplitude do sinal elevado ao quadrado. Sendo assim, generaliza-se a potência instantânea de um sinal *x(t)* como

$$p(t) = x^2(t)$$

Sinais de Energia e Sinais de Potência

Energia total de um sinal contínuo:

$$E = \lim_{\tau \to \infty} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} x^2(t)\,dt$$

Energia total de um sinal discreto:

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2[n]$$

Sinais de Energia e Sinais de Potência

Potência média de um sinal contínuo:

$$P = \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} x^2(t)\,dt$$

Potência média de um sinal contínuo periódico:

$$P = \frac{1}{\tau} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} x^2(t)\,dt$$

Sinais de Energia e Sinais de Potência

Potência média de um sinal discreto:

$$P = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N} \sum_{n=-N}^{N} x^2[n]$$

Potência média de um sinal discreto periódico:

$$P = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x^2[n]$$

Sinais de Energia e Sinais de Potência

Um sinal é caracterizado como sinal de energia se satisfizer a condição

$$0 < E < \infty$$

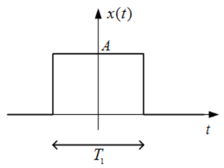
Um sinal é caracterizado como sinal de potência se satisfizer a condição

$$0 < P < \infty$$

Condições mutuamente excludentes.

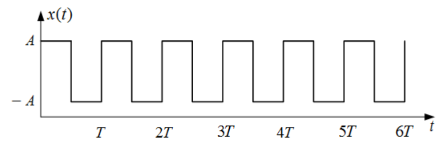
Exercício 1.5

(a) Qual a energia total do pulso retangular abaixo:



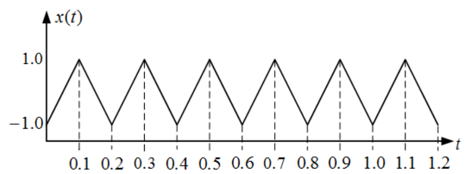
Exercício 1.5

(b) Qual a potência média da onda quadrada abaixo:



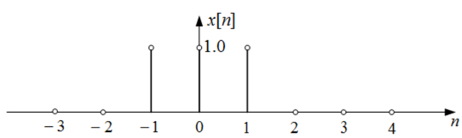
Exercício 1.6

(b) Qual a potência média da onda triangular abaixo:



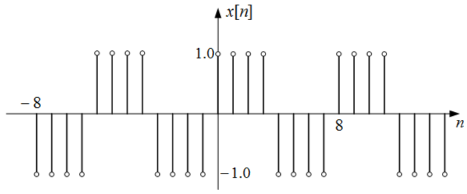
Exercício 1.7

(b) Qual é a energia total do sinal de tempo discreto abaixo:



Exercício 1.8

(b) Qual é a potência média do sinal periódico de tempo discreto abaixo:



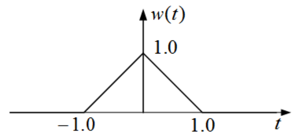
Sistemas e Sinais
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Departamento de Engenharia Elétrica

Problemas – Capítulo 1 pág. 78

1.2 – Determine se os sinais são periódicos. Se forem periódicos, determinar o período fundamental.

(a) $x(t) = (\cos(2\pi\, t))^2$

(b) $x(t) = \sum_{k=-5}^{5} w(t-2k)$



Sistemas e Sinais
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Departamento de Engenharia Elétrica

Problemas – Capítulo 1 pág. 78 (Haykin)

1.2 – Determine se os sinais são periódicos. Se forem periódicos, determinar o período fundamental.

(d) $x[n] = (-1)^n$

(h) $x[n] = \cos(2n)$

Operações Básicas em Sinais

- **Operações realizadas em variáveis dependentes**
  - **Mudança de escala de amplitude**
  - **Adição**
  - **Multiplicação**
  - **Diferenciação**
  - **Integração**

Sistemas e Sinais
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Departamento de Engenharia Elétrica

Operações Realizadas em Variáveis Dependentes

1. Mudança de escala de amplitude:

$$y(t) = cx(t)$$

$$y[n] = cx[n]$$

Sistemas e Sinais
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Departamento de Engenharia Elétrica

Operações Realizadas em Variáveis Dependentes

1. Adição:

$$y(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

$$y[n] = x_1[n] + x_2[n]$$

Sistemas e Sinais
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Departamento de Engenharia Elétrica

Operações Realizadas em Variáveis Dependentes

1. Multiplicação:

$$y(t) = x_1(t)x_2(t)$$

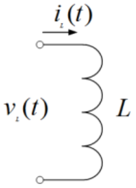
$$y[n] = x_1[n]x_2[n]$$

Sistemas e Sinais
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Departamento de Engenharia Elétrica

Operações Realizadas em Variáveis Dependentes

1. Diferenciação:

$$\lambda_L(t) = Li_L(t)$$



$$\frac{d\lambda_L(t)}{dt} = L\frac{di_L(t)}{dt}$$

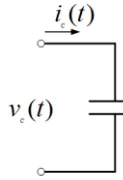
$$v(t)_L = L\frac{di_L(t)}{dt}$$

Sistemas e Sinais
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Departamento de Engenharia Elétrica

Operações Realizadas em Variáveis Dependentes

1. Integração:

$$q_c(t) = Cv_c(t)$$



$$\frac{dq_c(t)}{dt} = C\frac{dv_c(t)}{dt}$$

$$v_C(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_C(\tau)d\tau$$

Operações Básicas em Sinais

- **Operações realizadas em variáveis independentes**
  - **Mudança de escala de tempo**
  - **Reflexão**
  - **Deslocamento no tempo**
  - **Deslocamento no tempo e mudança de escala de tempo**

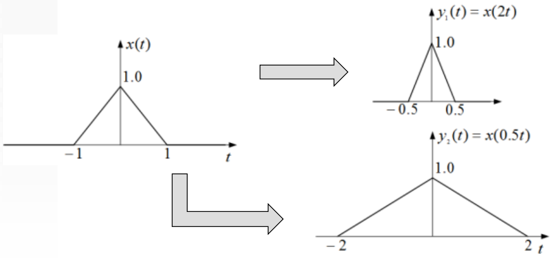
Operações Realizadas em Variáveis Independentes

Mudança de escala de tempo:

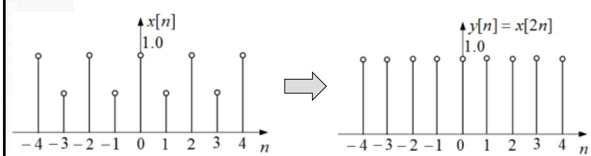
$$y(t) = x(at) \quad \begin{cases} \textit{Se } a > 1 \textit{ y(t) será a versão comprimida de x(t);} \\ \textit{Se } 0 < a < 1 \textit{ y(t) será a versão expandida de x(t);} \end{cases}$$

No caso discreto: $y[n] = x[kn]\,,\, k \in Z^{*}$

Operações Realizadas em Variáveis Independentes



Operações Realizadas em Variáveis Independentes



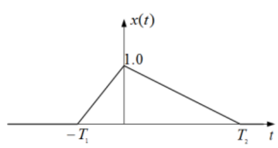
Operações Realizadas em Variáveis Independentes

Reflexão: *O sinal y(t) representará uma versão refletida do sinal x(t) em relação ao eixo das ordenadas.*

$$y(t) = x(-t)$$

Operações Realizadas em Variáveis Independentes

Exemplo 1.2: Determinar o sinal *y(t)=x(-t).*



Sistemas e Sinais
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Departamento de Engenharia Elétrica

Operações Realizadas em Variáveis Independentes

Exercício 1.9: O sinal discreto *x[n]* é definido por:

$$x[n]=\begin{cases} 1, n=1 \\ -1, n=-1 \\ 0, n=0 \; e \; |n|>1 \end{cases}$$

Determinar o sinal *y[n]=x[n]+x[-n]*.

Sistemas e Sinais
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Departamento de Engenharia Elétrica

Operações Realizadas em Variáveis Independentes

Exercício 1.10: O sinal discreto *x[n]* é definido por:

$$x[n]=\begin{cases} 1, n=-1 \; e \; n=1 \\ 0, n=0 \; e \; |n|>1 \end{cases}$$

Determinar o sinal *y[n]=x[n]+x[-n]*.

Sistemas e Sinais
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Departamento de Engenharia Elétrica

Operações Realizadas em Variáveis Independentes

Deslocamento no tempo: *Seja x(t) um sinal de tempo contínuo. A versão de x(t) deslocada no tempo é definida por:*

$$y(t)=x(t-t_o)$$

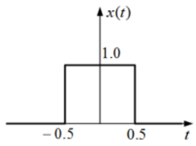
$t_o>0$ *deslocamento para a direita;*

$t_o<0$ *deslocamento para a esquerda.*

Sistemas e Sinais
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Departamento de Engenharia Elétrica

Operações Realizadas em Variáveis Independentes

Exemplo 1.3: Dado o sinal *x(t)* abaixo, determinar o sinal *y(t)=x(t-2)*.



Sistemas e Sinais
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Departamento de Engenharia Elétrica

Operações Realizadas em Variáveis Independentes

Deslocamento no tempo: $y[n]=x[n-m], m\in Z$

Exercício 1.11: *O sinal de tempo discreto x[n] é definido por*

$$x[n]=\begin{cases} 1, n=1,2 \\ -1, n=-1,-2 \\ 0, n=0 \; e \; |n|>2 \end{cases}$$

Determinar o sinal y[n]=x[n+3].

Sistemas e Sinais
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Departamento de Engenharia Elétrica

Operações Realizadas em Variáveis Independentes

Deslocamento no tempo e mudança de escala de tempo:

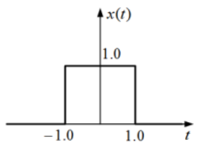
$$y[t]=x[at-b]$$

Para a obtenção deste sinal é comum a utilização de um sinal auxiliar $v[t]=x[t-b]$ (deslocamento no tempo), obtendo-se posteriormente o sinal

$$v[at]=x[at-b]$$

Operações Realizadas em Variáveis Independentes

Exemplo 1.4: Dado o sinal *x(t)* abaixo, determinar o sinal *y(t)=x(2t+3)*.



Operações Realizadas em Variáveis Independentes

Exemplo 1.5: Um sinal de tempo discreto *x[n]* é definido por:

$$x[n]=\begin{cases} 1,\ n=1,\,2 \\ -1,\ n=-1,\,-2 \\ 0,\ n=0\ e\ |\,n\,|>2 \end{cases}$$

Determinar *y[n]=x[2n+3]*.

Operações Realizadas em Variáveis Independentes

Exercício 1.12: Considere um sinal de tempo discreto *x[n]* definido por:

$$x[n]=\begin{cases} 1,\ -2\le n\le 2 \\ 0,\ |\,n\,|>2 \end{cases}$$

Determinar *y[n]=x[3n-2]*.

Sinais Elementares

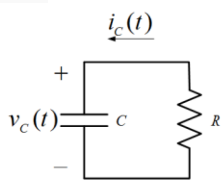
- **Sinais exponenciais**
- **Sinais senoidais**
- **Relação entre sinais senoidais e exponenciais complexos**
- **Sinal senoidal exponencialmente amortecido**
- **Funções degrau, impulso e rampa**

Sinais Exponenciais

$$x(t)=Be^{at}\quad \forall\ \ B,a\in\Re$$

B := amplitude do sinal em t=0;
a:= razão de decaimento de x(t) quando a < 0;
razão de crescimento de x(t) quando a > 0;
sinal constante com amplitude igual a B quando a = 0.

Exemplo: Circuito *RC*



$$\Rightarrow\quad RC\frac{dv_c(t)}{dt}+v_c(t)=0$$

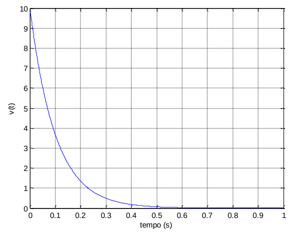
$$\frac{d}{dt}\left(v_c(t)e^{t/RC}\right)=0$$

Exemplo: Circuito *RC*

$$RC\frac{dv_c(t)}{dt}+v_c(t)=0 \qquad v_c(t)=v_c(0)e^{-t/RC}$$

$$\frac{d}{dt}\left(v_c(t)e^{t/RC}\right)=0 \Rightarrow \int_0^t \frac{1}{d\tau}(v_c(\tau)e^{\tau/RC})\,d\tau=0$$

Exemplo: Circuito *RC = 0.1, V(0)=10 .*

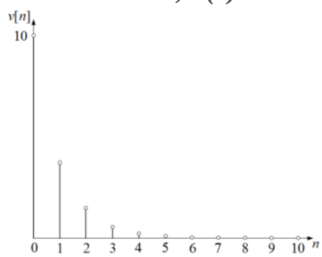


Sinais Exponenciais

$$x[n]=Br^n \;,\; r:=e^{\alpha} \quad \forall\, \alpha \in \Re$$

B := amplitude do sinal em n=0;
0 < r < 1 sinal exponencial decrescente;
r > 1 sinal exponencial crescente

Exemplo: Circuito *RC = 0.1, V(0)=10.*



Sinais Senoidais

$$x(t)=A\cos(\omega t+\phi)$$

A:= amplitude do sinal;
ω:= frequência angular em rad/s;
ϕ:= ângulo de fase.

$$T=\frac{2\pi}{\omega}$$

Periodicidade do Sinal $T=\frac{2\pi}{\omega}$

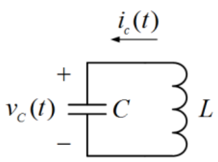
$$x(t+T)=A\cos\big(\omega(t+T)+\phi\big)$$

$$x(t+T)=A\cos\big(\omega t+2\pi+\phi\big)$$

dado que $x(t)=A\cos(\omega t+\phi)$

tem-se $x(t+T)=x(t)$

Exemplo: Circuito *LC*



$$LC\frac{d^2v_c(t)}{dt^2}+v_c(t)=0$$

$$v_c(t)=V_0\cos(\omega t)$$

Exemplo: Circuito *LC*

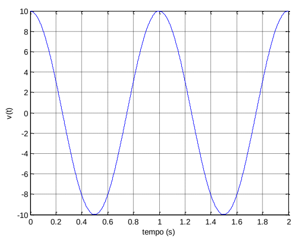
$$v_c(t)=V_0\cos(\omega t)$$

$$\frac{dv_c(t)}{dt}=-V_0\omega\, sen(\omega t)$$

$$\omega=\frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\frac{d^2v_c(t)}{dt^2}=-V_0\omega^2\cos(\omega t)$$

Exemplo: Circuito $LC = 1/4\pi^2$, V_o =10.



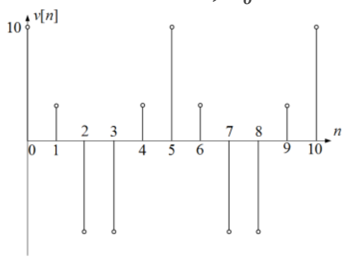
Sinais Senoidais

$$x[n]=A\cos(\Omega n+\phi)$$

$$x[n+N]=A\cos(\Omega(n+N)+\phi)$$

$$\Omega N=2\pi\, m\ \forall\ N,m\in Z$$

Exemplo: Circuito $LC = 1/4\pi^2$, V_o =10.



Exemplo 1.6:

Considere os seguintes sinais senoidais:

$$x_1[n]=sen(5\pi\, n) \qquad x_2[n]=\sqrt{3}\cos(5\pi\, n)$$

(a) Especifique a condição de *N* para que ambos os sinais sejam periódicos;

(b) Determine a amplitude e o ângulo de fase do sinal

$$y[n]=x_1[n]+x_2[n]$$

Sistemas e Sinais
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Departamento de Engenharia Elétrica

Exercício 1.13:

Considere os seguintes sinais senoidais:

$$x[n] = 5sen(2n) \qquad x[n] = 5\cos(0.2\pi n)$$

$$x[n] = 5\cos(6\pi n) \qquad x[n] = 5sen\left(6\pi n / 35\right)$$

Determinar se cada um dos sinais é periódico, e se for, determinar seu período fundamental.

Sistemas e Sinais
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Departamento de Engenharia Elétrica

Exercício 1.14:

Determine as menores frequências para que os sinais senoidais sejam periódicos dado *N:*

(a) $N = 8$;
(b) $N = 32$;

Sistemas e Sinais
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Departamento de Engenharia Elétrica

Sinais Senoidais e Exponenciais Complexos:

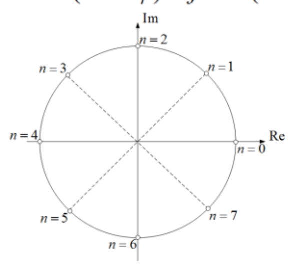
$$Be^{j\omega t} = A\cos(\omega t + \phi) + jAsen(\omega t + \phi)$$

$$e^{j\theta} = \cos(\theta) + jsen(\theta)$$

$$B = Ae^{j\phi} \quad \begin{cases} \mathrm{Re}\{Be^{j\omega t}\} = A\cos(\omega t + \phi) \\ \mathrm{Im}\{Be^{j\omega t}\} = Asen(\omega t + \phi) \end{cases}$$

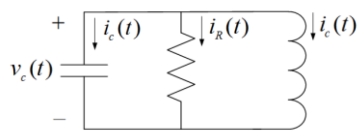
Sistemas e Sinais
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Departamento de Engenharia Elétrica

$$Be^{j\Omega n} = A\cos(\Omega n + \phi) + jAsen(\Omega n + \phi)$$



Sistemas e Sinais
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Departamento de Engenharia Elétrica

Sinais Senoidais e Exponenciais Amortecidos:



$$LCR\frac{d^2v_c}{dt^2} + L\frac{dv_c}{dt} + Rv_c = 0 \Rightarrow x(t) = e^{-\alpha t}sen(\omega t + \phi), \quad \alpha \in \Re^+$$

Sistemas e Sinais
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Departamento de Engenharia Elétrica

Sinais Senoidais e Exponenciais Amortecidos:

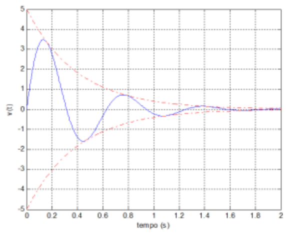
Padrão de resposta sinal contínuo:

$$x(t) = Ae^{-\alpha t}sen(\omega t + \phi), \alpha \in \Re^+$$

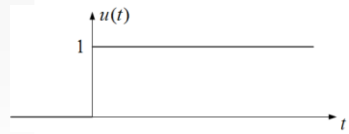
Padrão de resposta sinal discreto:

$$x[n] = Ar^n sen(\Omega n + \phi), 0 < r < 1$$

Sinais Senoidais e Exponenciais Amortecidos:

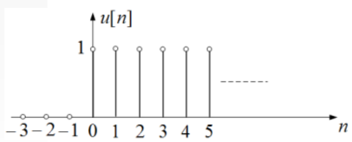


Função Degrau:



$$u(t) = \begin{cases} 1, t \geq 0 \\ 0, t < 0 \end{cases}$$

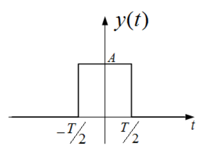
Função Degrau:



$$u[n] = \begin{cases} 1, n \geq 0 \\ 0, n < 0 \end{cases}$$

Exemplo 1.7

Considere o seguinte pulso retangular:



Expresse o sinal *y(t)* como a soma de sinais do tipo degrau.

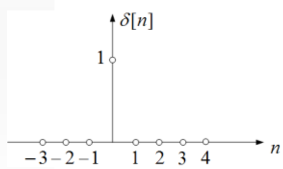
Exercício 1.16

Um sinal em tempo discreto *x[n]* é definido por:

$$x[n] = \begin{cases} 1, 0 \leq n \leq 9 \\ 0, \textit{caso contrário} \end{cases}$$

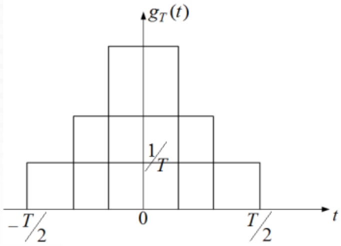
Expresse o sinal *x[n]* como a soma de sinais do tipo degrau.

Função Impulso:



$$\delta[n] = \begin{cases} 1, n = 0 \\ 0, n \neq 0 \end{cases}$$

Função Impulso:

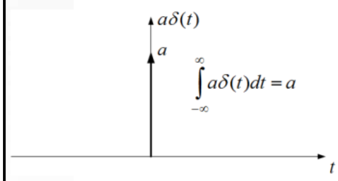


$$\delta(t) = 0, \forall\, t \neq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$$

$$\delta(t) = \lim_{T \to 0} g_T(t)$$

Função Impulso – Propriedade do Peneiramento

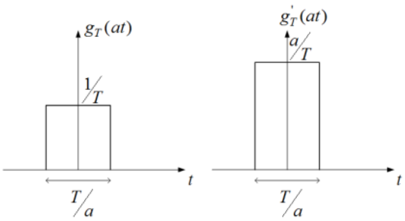


$$\int_{-\infty}^{\infty} a\delta(t)dt = a$$

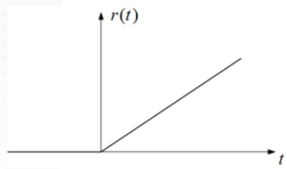
$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - t_0)dt = x(t_0)$$

Função Impulso – Mudança de Escala de Tempo

$$\delta(at) = \frac{1}{a}\delta(t)$$

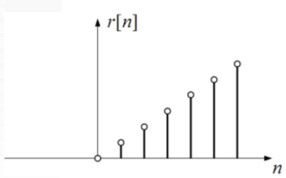


Função Rampa:



$$r(t)\begin{cases} t, t \geq 0 \\ 0, t < 0 \end{cases}$$

Função Rampa:



$$r[n]\begin{cases} n, n \geq 0 \\ 0, n < 0 \end{cases}$$

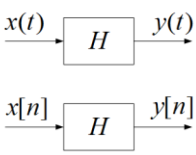
Propriedades de Sistemas

- **Estabilidade**
- **Memória**
- **Causalidade**
- **Invertibilidade**
- **Invariância no Tempo**
- **Linearidade**

Propriedades de Sistemas

"Interconexão de operações que transforma o sinal de entrada num sinal de saída com diferentes propriedades".

Propriedades de Sistemas



$$y(t) = H\{x(t)\}$$

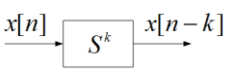
$$y[n] = H\{x[n]\}$$

Propriedades de Sistemas

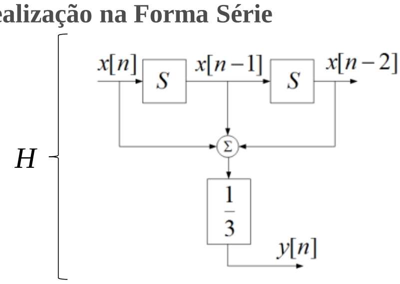
As propriedades de um sistema descrevem as características do operador H que representam o sistema.

Exemplo 1.8: Sistema de Média Móvel

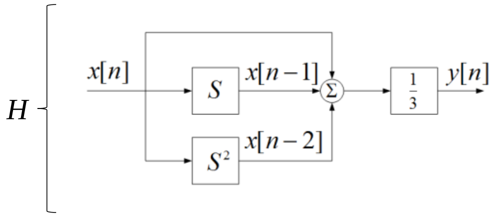
$$y[n] = \frac{1}{3}\left(x[n] + x[n-1] + x[n-2]\right)$$



Realização na Forma Série



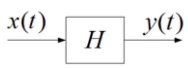
Realização na Forma Paralela



Estabilidade BIBO

O sistema será BIBO estável (Bounded Input Bounded Output) se para <u>todo</u> sinal de entrada limitado implicar em um sinal de saída limitado.

Estabilidade BIBO



$$|y(t)| \leq M_y < \infty$$

$$|x(t)| \leq M_x < \infty\,,\ M_y, M_x \in \Re^+$$

Exemplo 1.9:

Mostrar que o sistema de média móvel

$$y[n] = \frac{1}{3}\left(x[n] + x[n-1] + x[n-2]\right)$$

é BIBO estável.

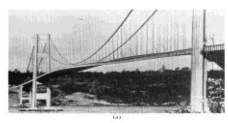
Exemplo 1.10:

Considere o sistema em tempo discreto:

$$y[n] = r^n x[n],\ \ r > 1$$

Mostrar que se trata de um sistema instável no sentido BIBO.

Exemplo de Sistema Instável



Memória

Diz-se que um sistema possui memória se sua saída depender de valores passados do sinal de entrada.

Sem memória $\left\{ i(t) = \dfrac{v(t)}{R} \right.$

$\left. i(t) = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_{-\infty}^{t} v(\tau)d\tau \right\}$ *Com memória*

Exercício 1.19:

O sistema de média móvel dado por

$$y[n] = \frac{1}{3}\left(x[n] + x[n-1] + x[n-2]\right)$$

possui memória?

Causalidade

Diz-se que um sistema é causal se o valor atual do sinal de saída depender somente dos valores presentes e/ou passados do sinal de entrada.

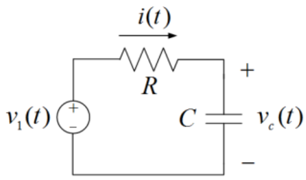
Causalidade

Causal $\left\{ y[n] = \dfrac{1}{3}\left(x[n] + x[n-1] + x[n-2]\right) \right.$

Não-causal $\left\{ y[n] = \dfrac{1}{3}\left(x[n+1] + x[n] + x[n-1]\right) \right.$

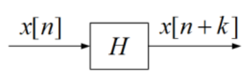
Causalidade

Causal ou não-causal? Por quê?



Causalidade

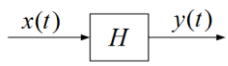
Causal ou não-causal? Por quê?



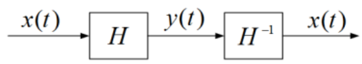
Invertibilidade

Diz-se que um sistema é invertível se a entrada do sistema puder ser recuperada através do sinal de saída do sistema.

Invertibilidade



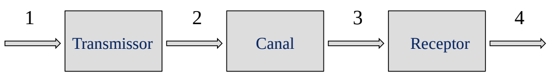
$$y(t) = H\{x(t)\}$$



$$x(t) = H^{-1}\{H\{x(t)\}\} \Rightarrow H^{-1}H = HH^{-1} = I$$

Invertibilidade

Exemplo: sistemas de comunicação



1. Informação
2. Sinal transmitido
3. Sinal recebido
4. Estimativa da informação

Invertibilidade

Uma característica importante associada aos sistemas invertíveis é que entradas distintas devem produzir saídas distintas.

Exemplo 1.11:

Considere um sistema de deslocamento no tempo descrito pela relação entrada-saída

$$y(t) = x(t - t_0) = S^{t_0}\{x(t)\}$$

Avaliar se é ou não um sistema invertível.

Exemplo 1.12:

Avaliar se o sistema responsável pela relação quadrática entre o sinal de saída y(t) e o sinal de entrada x(t), descrito por

$$y(t) = x^2(t)$$

trata-se ou não de um sistema invertível.

Invariância no Tempo

Um sistema é dito invariante no tempo se um deslocamento no tempo do sinal de entrada (retardo ou avanço) implicar em um deslocamento temporal idêntico no sinal de saída.

Invariância no Tempo

$$y(t) = H\{x(t)\}$$

$$x(t-t_0) = S^{t_0}\{x(t)\}$$

$$\xrightarrow{x(t)} \boxed{S^{t_0}} \xrightarrow{x(t-t_0)} \boxed{H} \xrightarrow{y_i(t)}$$

$$y_i(t) = H\{x(t-t_0)\} = H\{S^{t_0}\{x(t)\}\} = HS^{t_0}\{x(t)\}$$

Invariância no Tempo

$$y_0(t) = y(t-t_0)$$

$$y_0(t) = S^{t_0}\{y(t)\} = S^{t_0}H\{x(t)\}$$

$$\xrightarrow{x(t)} \boxed{H} \xrightarrow{y(t)} \boxed{S^{t_0}} \xrightarrow{y(t-t_0)}$$

Invariância no Tempo

$$\left.\begin{array}{l} \xrightarrow{x(t)} \boxed{S^{t_0}} \xrightarrow{x(t-t_0)} \boxed{H} \xrightarrow{y_i(t)} \\ \\ \xrightarrow{x(t)} \boxed{H} \xrightarrow{y(t)} \boxed{S^{t_0}} \xrightarrow{y(t-t_0)} \end{array}\right\} S^{t_0}H = HS^{t_0}$$

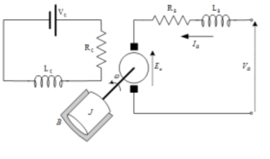
Exemplo 1.14: Termistor

$$i(t) = \frac{v(t)}{R(t)}$$

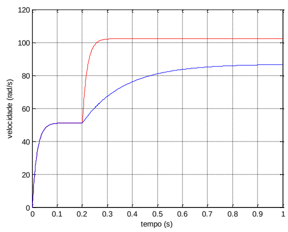
$$v(t-t_0) = v(t) \Rightarrow i_0(t) = \frac{v(t-t_0)}{R(t-t_0)}$$

$$R(t) \neq R(t-t_0) \Rightarrow i(t) \neq i(t-t_0)$$

Exemplo: Motor DC



Motor DC com variação nos parâmetros J e B.



Linearidade

Uma função *f(x)* é dita linear se satisfizer as seguintes condições:

$$f(\alpha\, x) = \alpha\; f(x)$$

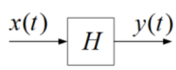
$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$$

Linearidade

Tal propriedade também aplica-se aos sistemas, caracterizando-os como lineares. Sendo assim, a resposta de um sistema linear a uma soma ponderada de sinais de entrada é igual à mesma soma ponderada dos sinais de saída associados a cada um dos respectivos sinais de entrada.

Linearidade

$$x(t) = \sum_{i=1}^{N} a_i x_i(t) \quad \begin{cases} x_i, i = 1,2,\cdots,N, \\ a_i, i = 1,2,\cdots,N, \end{cases}$$



$$y(t) = H\{x(t)\} = H\{\sum_{i=1}^{N} a_i x_i(t)\}$$

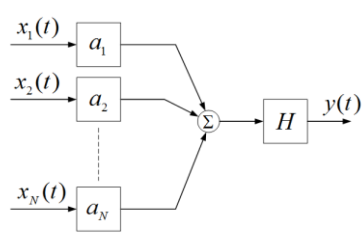
Linearidade

Se o sistema for linear

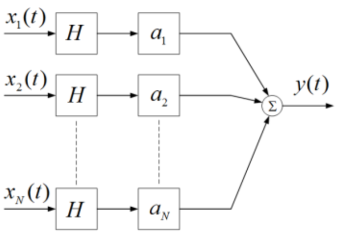
$$y(t) = \sum_{i=1}^{N} a_i y_i(t) \qquad y_i(t) = H\{a_i x_i(t)\}$$

$$H\{\sum_{i=1}^{N} a_i x_i(t)\} = \sum_{i=1}^{N} a_i H\{x_i(t)\}$$

Linearidade



Linearidade



Exemplo 1.15:

Considere o seguinte sistema discreto:

$$y[n] = n\, x[n]$$

Avaliar se é um sistema linear.

Exemplo 1.15:

Considere o seguinte sistema contínuo:

$$y(t) = x^2(t)$$

Avaliar se é um sistema linear.

Exemplo 1.15:

Mostrar que o sistema de média móvel descrito por

$$y[n] = \frac{1}{3}\left(x[n] + x[n-1] + x[n-2]\right)$$

é linear.

Representação em Domínio de Tempo para Sistemas Lineares Invariantes no Tempo

- **Resposta impulsiva: convolução**
- **Representação por equações diferenciais e de diferenças**
- **Diagrama de blocos**
- **Espaço de estados**

Resposta ao Impulso

Para sistemas Lineares e Invariantes no Tempo - LTI, pode-se determinar a resposta temporal a uma entrada arbitrária através da superposição de respostas ao impulso deslocadas no tempo.

Resposta ao Impulso

O sinal de entrada é amostrado de forma impulsiva, ponderando o impulso com o valor instantâneo do sinal de entrada. Para sistemas LTI, cada impulso ponderado pode ser considerado como um sinal de entrada independente no sistema (superposição).

Resposta ao Impulso

Esta superposição das respostas ao impulso ponderadas pelo sinal de entrada é chamada de Soma de Convolução para sistemas de tempo discreto, e de Integral de Convolução para sistemas de tempo contínuo.

Soma de Convolução

Considere o sinal $x[n]$ amostrado por uma sequência de impulsos deslocados no tempo $\delta[n-k]$.

$$x[n]\delta[n-k] = x[k]\delta[n-k]$$

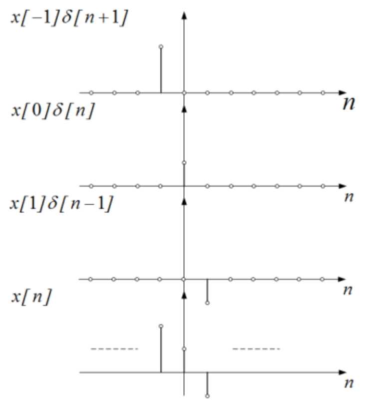
Soma de Convolução

Sendo assim, $x[n]$ pode ser representado na forma:

$$x[n] = \ldots + x[-1]\delta[n+1] + x[0]\delta[n] + \\ + x[1]\delta[n-1] + \ldots$$

ou ainda como:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$$



Soma de Convolução

Definindo um operador *H* que representa o sistema ao qual a entrada *x[n]* é aplicada:

$$y[n]=H\{x[n]\}=H\{\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]\delta[n-k]\}$$

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]H\{\delta[n-k]\}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]h_k[n]$$

Soma de Convolução

onde $h_k=H\{\delta[n-k]\}$ representa a resposta ao impulso do sistema *H* para um impulso aplicado no instante *k*. A equação anterior também pode ser escrita na forma:

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]h[n-k]$$

Soma de Convolução

Tal operação é chamada de Soma de Convolução e também pode ser expressa na forma:

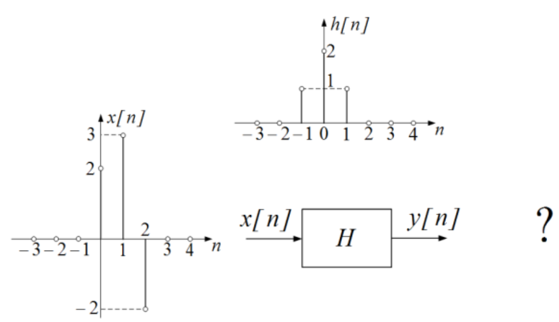
$$x[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]h[n-k]$$

Soma de Convolução

Exemplo 2.1: Suponha que a um sistema *H* do tipo LTI com resposta ao impulso *h[n]* é aplicado um sinal *x[n]*.

$$h[n]=\begin{cases}1, n=\pm1\\2, n=0\\0, caso\ contrário\end{cases}\qquad x[n]=\begin{cases}2, n=0\\3, n=1\\-2, n=2\\0, caso\ contrário\end{cases}$$

Obtenha graficamente o sinal de saída *y[n]*.



O sinal $y[n]$ também pode ser obtido escrevendo o sinal de entrada na forma

$$x[n] = 2\delta[n] + 3\delta[n-1] - 2\delta[n-2]$$

determinando a saída $y[n]$ do sistema para este sinal na forma

$$y[n] = 2h[n] + 3h[n-1] - 2h[n-2]$$

Determinar, variando n, os valores da variável de saída do sistema, conferindo-os com os obtidos anteriormente.

Soma de Convolução

Da forma com que foi resolvido graficamente o exemplo anterior, pode-se generalizar a expressão da variável de saída $y[n]$ para um determinado instante n_o como:

$$y[n_o] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_k[n_o]$$

Pode-se ainda definir uma nova variável

$$w_{n_o}[k] = v_k[n_o]$$

reescrevendo $y[n_o]$ como

$$y[n_o] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} w_{n_o}[k]$$

Resolver graficamente o exemplo anterior, utilizando a relação apresentada.

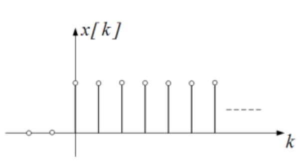
Exemplo 2.2

Considere um sistema LTI com a seguinte resposta ao impulso:

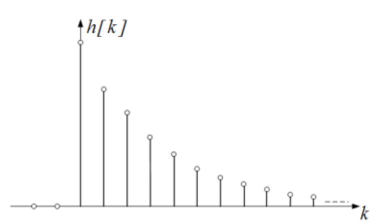
$$h[n] = \left(\frac{3}{4}\right)^n u[n]$$

Determinar a saída do sistema $y[n]$ para $n=-5, 5$ e 10, quando o sinal de entrada for $x[n]=u[n]$.

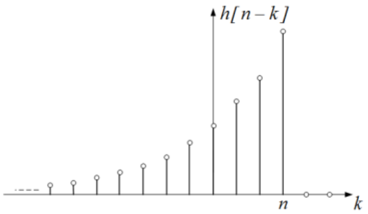
Exemplo 2.2: Sinal de Entrada



Exemplo 2.2: Resposta ao Impulso

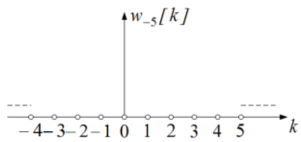


Exemplo 2.2: Resposta ao impulso refletida e deslocada de *n*



Sistemas e Sinais
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Departamento de Engenharia Elétrica

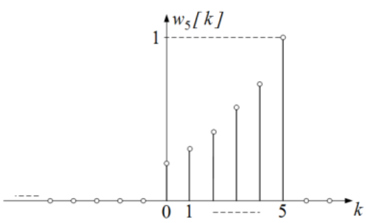
Exemplo 2.2:



Sistemas e Sinais
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Departamento de Engenharia Elétrica

Exemplo 2.2:

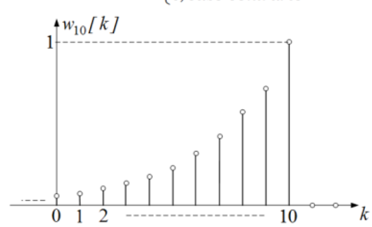
$$w_5[k] = \begin{cases} \left(\frac{3}{4}\right)^{5-k}, & 0 \le k \le 5 \\ 0, & caso\ contrário \end{cases}$$



Sistemas e Sinais
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Departamento de Engenharia Elétrica

Exemplo 2.2:

$$w_{10}[k] = \begin{cases} \left(\frac{3}{4}\right)^{10-k}, & 0 \le k \le 10 \\ 0, & caso\ contrário \end{cases}$$



Sistemas e Sinais
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Departamento de Engenharia Elétrica

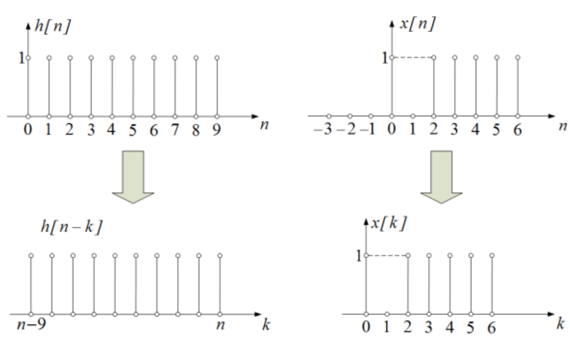
Exemplo 2.3

Considere um sistema *LTI* com a seguinte resposta ao impulso:

$$h[n] = u[n] - u[n-10]$$

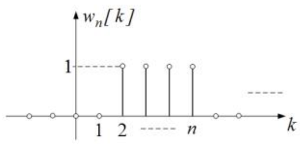
Determinar a saída do sistema *y[n]* quando o sinal de entrada for um pulso retangular definido por:

$$x[n] = u[n-2] - u[n-7]$$



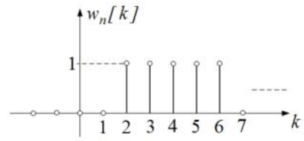
$2 \le n \le 6$

$$w_n[k] = \begin{cases} 1, & 2 \le k \le n \\ 0, & caso\ contrário \end{cases} \Longrightarrow y[n] = \sum_{k=2}^{n} 1 = n - 1$$



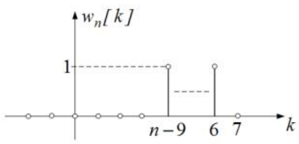
$6 < n \le 11$

$$w_n[k] = \begin{cases} 1, & 2 \le k \le 6 \\ 0, & caso\ contrário \end{cases} \Longrightarrow y[n] = \sum_{k=2}^{6} 1 = 5$$

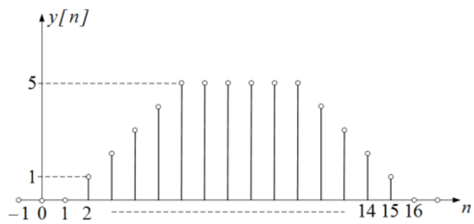


$11 < n \le 15$

$$w_n[k] = \begin{cases} 1, & n-9 \le k \le 6 \\ 0, & caso\ contrário \end{cases} \Longrightarrow y[n] = \sum_{k=n-9}^{6} 1 = 16 - n$$



Resposta completa da variável *y[n]*



Integral de Convolução

De forma similar à Soma de Convolução para o caso dos sistemas de tempo discreto, a Integral de Convolução descreve o sinal de saída de um sistema *LTI* como a superposição ponderada das respostas ao impulso deslocadas no tempo.

Integral de Convolução

Para a Soma de Convolução o sinal de entrada foi representado na forma:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$$

Pode-se expressar o sinal de tempo contínuo de forma análoga:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau$$

Integral de Convolução

Segue portanto que

$$y(t) = H\{x(t)\} = H\left\{\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau\right\}$$

ou ainda

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)H\{\delta(t-\tau)\}d\tau$$

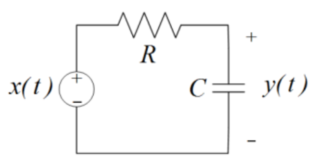
$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau$$

Integral de Convolução

Onde $H\{\delta(t-\tau)\} = h(t-\tau)$ é a resposta do sistema a uma entrada do tipo impulso aplicado no instante t=τ. A operação de convolução também pode ser representada na forma

$$x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau$$

Exemplo 2.7: Considere o circuito RC apresentado a seguir:



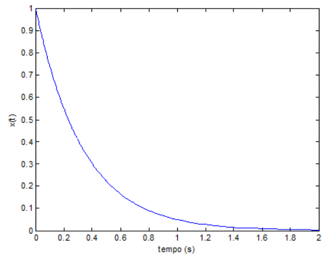
Admitindo que a constante de tempo deste circuito seja igual a 1.0 segundo, determinar a tensão *y(t)* no capacitor, resultante da aplicação de um sinal de entrada

$$x(t) = e^{-3t}(u(t) - u(t-2))$$

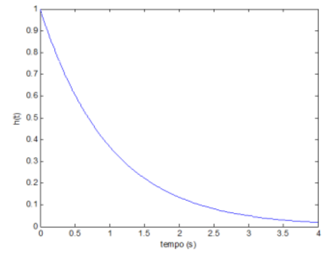
Uma vez que a constante de tempo do circuito é RC=1.0 s, tem-se

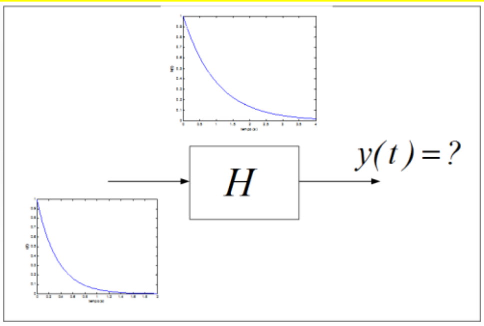
$$h(t) = e^{-t}u(t)$$

Sinal de entrada x(t)



Resposta ao impulso h(t)

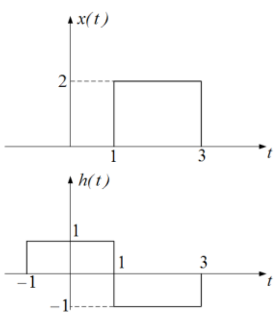


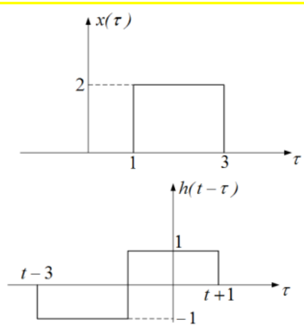


Exemplo 2.8: Suponha que a entrada *x(t)* e a resposta ao impulso *h(t)* de um sistema *LTI* sejam dadas por:

$$x(t) = 2u(t-1) - 2u(t-3)$$

$$h(t) = u(t+1) - 2u(t-1) + u(t-3)$$





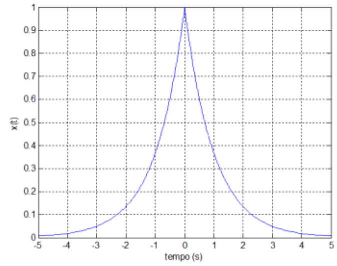
Exercício 2.4: Considere a resposta ao impulso de um dado sistema dada por

$$h(t) = e^{-2(t+1)}u(t+1)$$

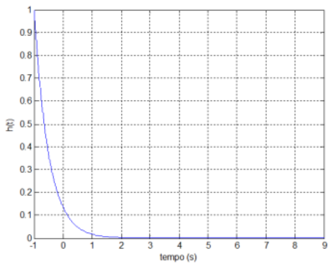
Determinar o sinal de saída do sistema, *y(t)*, para o sinal de entrada

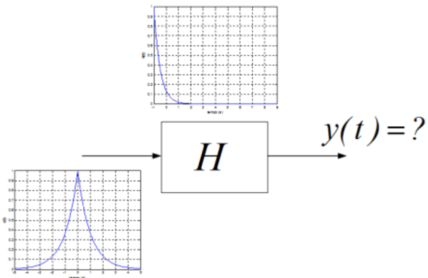
$$x(t) = e^{-|t|}$$

Sinal de entrada x(t)



Resposta ao impulso h(t)



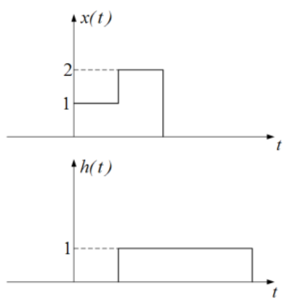


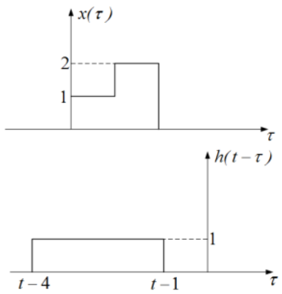
Exercício 2.5: Considere um sistema *LTI* cuja resposta ao impulso é dada por

$$h(t) = u(t-1) - u(t-4)$$

Determinar o sinal de saída do sistema *y(t)* para o sinal de entrada

$$x(t) = u(t) + u(t-1) - 2u(t-2)$$

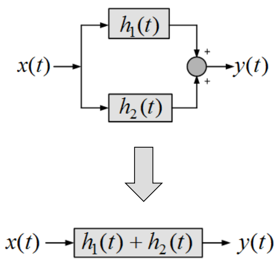




Propriedades da Representação da Resposta ao Impulso

Conexão paralela de sistemas *(prop. distributiva)*

$$\begin{aligned} y(t) &= y_1(t) + y_2(t) \\ &= x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t) \\ &= x(t) * (h_1(t) + h_2(t)) \\ &= x(t) * h(t) \end{aligned}$$

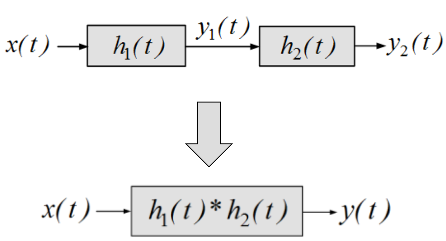


Propriedades da Representação da Resposta ao Impulso

Conexão série de sistemas *(prop. associativa)*

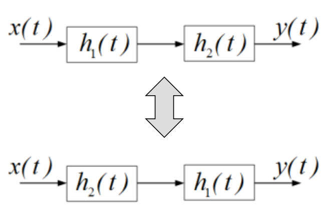
$$y_1(t) = x(t) * h_1(t) \qquad y_2(t) = y_1(t) * h_2(t)$$

$$\begin{aligned} y_2(t) &= \{x(t) * h_1(t)\} * h_2(t) \\ &= x(t) * \{h_1(t) * h_2(t)\} \end{aligned}$$



Propriedade comutativa

$$h_1(t) * h_2(t) = h_2(t) * h_1(t)$$



Sistemas sem memória

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]$$

$$h[k] = 0 \ \forall \ k \neq 0$$

Sistemas discretos $\quad h[n] = c\delta[n]$

Sistemas contínuos $\quad h(\tau) = c\delta(\tau)$

Sistemas causais

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] \qquad \forall \ k < 0 \Rightarrow h[k] = 0$$

Sistemas discretos $\quad y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]x[n-k]$

Sistemas contínuos $\quad y(t) = \int_{0}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$

Sistemas BIBO-estáveis

$$|x[n]| \leq M_x < \infty \ \Rightarrow \ |y[n]| \leq M_y < \infty$$

$$|y[n]| = |h[n] * x[n]| = \left|\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]\right|$$

$$|y[n]| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| \, |x[n-k]| \leq M_x \sum_{k-\infty}^{\infty} |h[k]|$$

Sistemas BIBO-estáveis

$$|y[n]| < \infty \ \Rightarrow \begin{cases} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty \\ \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| \, d\tau < \infty \end{cases}$$

Caso discreto: h[k] absolutamente somável

Caso contínuo: h(t) absolutamente integrável

Sistemas invertíveis e desconvolução

$$\xrightarrow{x(t)} \boxed{h(t)} \xrightarrow{y(t)} \boxed{h^{-1}(t)} \xrightarrow{x(t)}$$

$$\{x(t) * h(t)\} * h^{-1}(t) = x(t)$$
$$x(t) * \{h(t) * h^{-1}(t)\} = x(t)$$

Caso discreto $\quad h[n]h^{-1}[n] = \delta[n]$

Caso contínuo $\quad h(t)h^{-1}(t) = \delta(t)$

Representação de Sistemas *LTI* por Equações Diferenciais e de Diferenças

Equações diferenciais e de diferenças de coeficientes constantes e lineares fornecem outra representação das características entrada-saída de sistemas *LTI*.

Representação de Sistemas *LTI* por Equações Diferenciais e de Diferenças

Para o caso contínuo, a forma geral de uma equação diferencial de coeficientes constantes e linear é a seguinte:

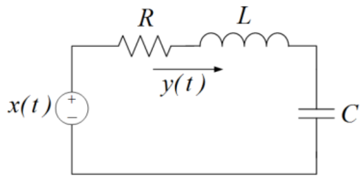
$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k}{dt^k} y(t) = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k}{dt^k} x(t)$$

Representação de Sistemas *LTI* por Equações Diferenciais e de Diferenças

Para o caso de tempo discreto, a equação de diferenças para um sistema *LTI* apresenta um formato similar, ou seja:

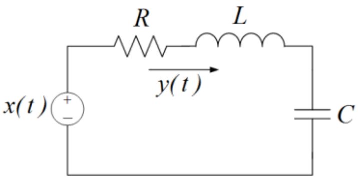
$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

Exemplos: Equações Diferenciais



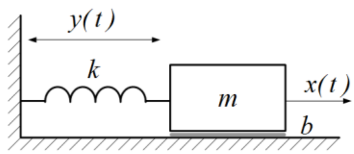
$$Ry(t) + L\frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} y(\tau)d\tau = x(t)$$

Exemplos: Equações Diferenciais



$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} = \frac{1}{L}\left(-R\frac{dy(t)}{dt} - \frac{1}{C}y(t) + \frac{dx(t)}{dt}\right)$$

Exemplos: Equações Diferenciais



$$x(t) = m\frac{d^2y(t)}{dt^2} + b\frac{dy(t)}{dt} + ky(t)$$

Exemplos: Equações de Diferenças

$$y[n]+y[n-1]+\frac{1}{4}y[n-2]=x[n]+2x[n-1]$$

$$y[n]=x[n]+2x[n-1]-y[n-1]-\frac{1}{4}y[n-2]$$

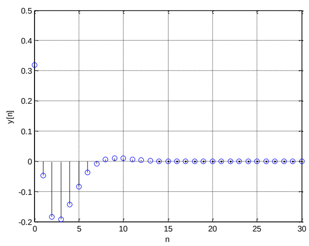
$$y[n]=\frac{1}{a_0}\sum_{k=0}^{M}b_k x[n-k]-\frac{1}{a_0}\sum_{k=1}^{N}a_k y[n-k]$$

Exemplo 2.16:

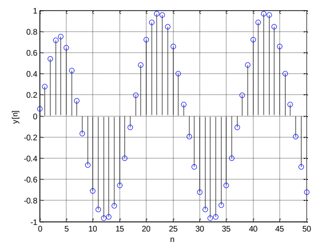
Considere o sistema representado pela seguinte equação de diferenças:

$$y[n]-1.143\,y[n-1]+0.4118\,y[n-2]=$$
$$=0.0675\,x[n]+0.1349\,x[n-1]+0.0675\,x[n-2]$$

Exemplo 2.16: Resposta para y[-1]=1 e y[-2]=2



Exemplo 2.16: Resposta para *x[n]=cos((π /10)n)*



Resolvendo equações - Resposta Natural

Equação diferencial $\sum_{k=0}^{N}a_k\frac{d^k}{dt^k}y^{(n)}(t)=0$

Padrão de resposta $y^{(n)}(t)=\sum_{i=1}^{N}c_i e^{r_i t}$

Equação característica $\sum_{k=0}^{N}a_k r^k=0$

Resolvendo equações – Resposta Natural

Equação de diferenças $\sum_{k=0}^{N}a_k y^{(n)}[n-k]=0$

Padrão de resposta $y^{(n)}[n]=\sum_{i=1}^{N}c_i r_i^n$

Equação característica $\sum_{k=0}^{N}a_k r^{N-k}=0$

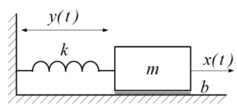
Natureza das Raízes

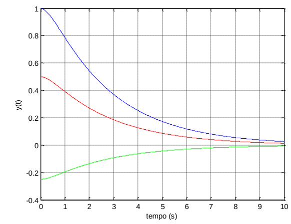
Reais ⇒ Exponenciais reais

Imaginárias ⇒ Senoidais

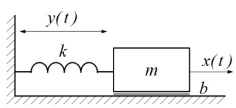
Complexas ⇒ Senoides com envoltória exponencial

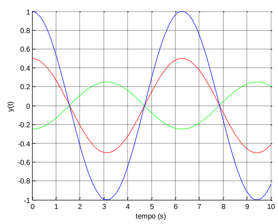
Resposta Natural: raízes reais



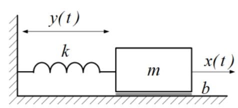


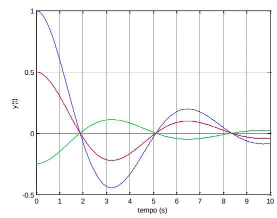
Resposta Natural: raízes imaginárias





Resposta Natural: raízes complexas





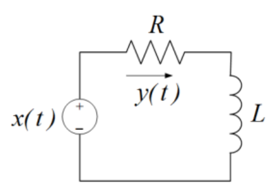
Caso de raízes repetidas *p* vezes

Caso contínuo $e^{r_j t}, te^{r_j t}, t^2 e^{r_j t}, \ldots, t^{p-1} e^{r_j t}$

Caso discreto $r_j^n, nr_j^n, n^2 r_j^n, \ldots, n^{p-1} r_j^n$

Exemplo 2.17:

Determinar a resposta natural para $t > 0$ sabendo que $y(0)=2A$.



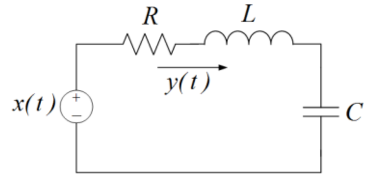
Exercício 2.10:

Determinar a resposta natural para o sistema descrito pela equação de diferenças

$$y[n]+\frac{1}{4}y[n-2]=x[n]+2x[n-2]$$

Exercício 2.11:

Determinar a forma da resposta natural para o circuito *RLC:*



Resposta Forçada

É a solução da equação diferencial ou de diferenças correspondente a uma dada entrada, supondo condições iniciais nulas. Consiste na soma de dois termos: um termo que tem a mesma forma da resposta natural e um outro termo associado à solução particular, $y^{(p)}(t)$ ou $y^{(p)}[n]$.

Resposta Forçada

Normalmente a solução particular é obtida admitindo que a saída do sistema apresenta a mesma forma geral que a entrada.

$$x[n] = \alpha^n \;\Rightarrow\; y^{(p)}[n] = c\alpha^n$$

$$x[n] = A\cos(\Omega n + \phi)$$

$$\Downarrow$$

$$y^{(p)}[n] = c_1 \cos(\Omega n) + c_2\, sen(\Omega n)$$

Resposta Forçada

Tabela com sinais de entrada normalmente utilizados.

Tempo Contínuo	
Entrada	*Solução Particular*
1	c
e^{-at}	$c\,e^{-at}$
$\cos(\omega t + \phi)$	$c_1 \cos(\omega t) + c_2\, sen(\omega t)$

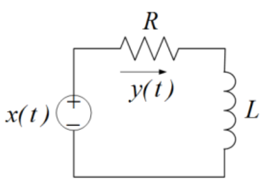
Resposta Forçada

Tabela com sinais de entrada normalmente utilizados.

Tempo Discreto	
Entrada	*Solução Particular*
1	c
α^n	$c\,\alpha^n$
$\cos(\Omega n + \phi)$	$c_1 \cos(\Omega n) + c_2\, sen(\Omega n)$

Exemplo 2.18:

Considere o circuito *RL* apresentado a seguir, com



$$x(t) = \cos(\omega_0 t)\,V$$

Determinar a solução particular.

Exemplo 2.19:

Para o circuito *RL* apresentado no exemplo anterior, determinar a resposta forçada para uma entrada

$$x(t) = \cos(t)\,V$$

supondo $R=1\Omega$ e $L=1H$.

$$y^{(f)}(t) = y^{(nf)}(t) + y^{(p)}(t)$$

Exercício 2.12:

Considere um sistema descrito pela seguinte equação de diferenças

$$y[n]-\frac{1}{4}y[n-2]=2x[n]+x[n-1]$$

sendo $x[n]=u[n]$. Determinar a resposta forçada

$$y^{(f)}[n]=y^{(nf)}[n]+y^{(p)}[n]$$

Resposta Completa

É a resposta do sistema obtida através da soma das respostas naturais e forçada, considerando condições iniciais quaisquer. O procedimento para obtenção da resposta é idêntico ao da obtenção da resposta forçada.

Exemplo 2.20:

Para o circuito *RL* apresentado no exemplo anterior, determinar a resposta completa da corrente $y(t)$, admitindo

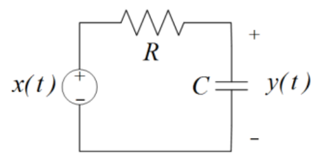
$$x(t)=cos(t)\,V$$

e $y(0)=2A$, supondo $R=1\Omega$ e $L=1H$.

Exercício 2.13:

Considere o circuito *RC* apresentado a seguir, com $x(t)=u(t)$ e $y(0)=-1$ volt.

Determinar a solução completa para a tensão no capacitor $y(t)$.



Resposta ao Impulso

Dado um sistema contínuo com resposta ao degrau $s(t)$, a resposta ao impulso $h(t)$ é obtida fazendo-se

$$h(t)=\frac{d}{dt}s(t)\;.$$

Resposta ao Impulso

Para o caso discreto, admitindo a resposta ao degrau $s[n]$, obtém-se a resposta ao impulso

$$h[n]=s[n]-s[n-1]\;.$$

Observa-se então, tanto para o caso contínuo quanto para o caso discreto, que na resposta ao impulso permanecem apenas os termos associados à resposta natural do sistema.

Característica dos Sistemas *LTI* Descritos por Equações Diferenciais e de Diferenças

Linearidade com relação à entrada *(resposta forçada)*:

$y_1^{(f)}$ resposta forçada devido à entrada x_1

$y_2^{(f)}$ resposta forçada devido à entrada x_2

então $\alpha\, x_1 + \beta\, x_2 \;\Rightarrow\; \alpha\, y_1^{(f)} + \beta\, y_2^{(f)}$.

Característica dos Sistemas *LTI* Descritos por Equações Diferenciais e de Diferenças

Linearidade com relação às condições iniciais *(resposta natural)*:

$y_1^{(n)}$ resposta natural associada à condição inicial I_1

$y_2^{(n)}$ resposta natural associada à condição inicial I_2

então $\alpha\, I_1 + \beta\, I_2 \;\Rightarrow\; \alpha\, y_1^{(n)} + \beta\, y_2^{(n)}$.

Característica dos Sistemas *LTI* Descritos por Equações Diferenciais e de Diferenças

Estabilidade *BIBO*:

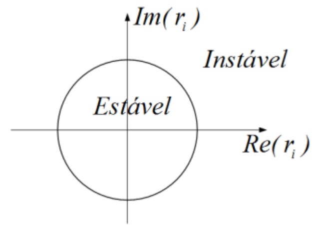
Caso de tempo discreto: $|\, r_i \,| < 1$

Caso de tempo contínuo: $|e^{r_i t}| < 1 \Rightarrow \Re\{r_i\} < 0$

Estabilidade de Sistemas Lineares Discretos:

Limite da estabilidade:

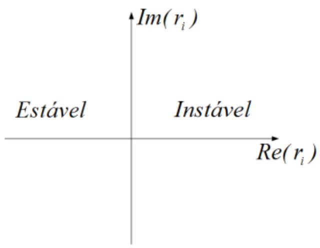
$|\, r_i \,| = 1$



Estabilidade de Sistemas Lineares Contínuos:

Limite da estabilidade:

$Re\{ r_i \} = 0$



Tempo de Resposta – Sistemas *LTI* Estáveis:

Assim que a resposta natural dos sistemas *LTI* contínuos ou discretos estáveis decresce até zero, o comportamento do sistema é regido pela sua solução particular.
- Para sistemas de tempo discreto, o tempo da resposta transitória é caracterizado pela raiz r_i^d que apresentar maior módulo.
- Para sistemas de tempo contínuo, o tempo da resposta transitória é caracterizado pela raiz r_i^c que apresentar a menor parte real em módulo.

Diagramas de Blocos

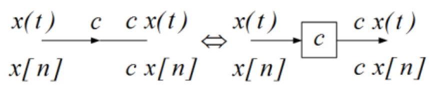
Um diagrama de blocos é uma forma de representação de sistemas através de interconexões de operações elementares que agem no sinal de entrada.

Operações Elementares

1. Multiplicação por escalar;
2. Adição;
3. Integração *(para sistemas de tempo contínuo)*;
4. Deslocamento no tempo *(para sistemas de tempo discreto)*.

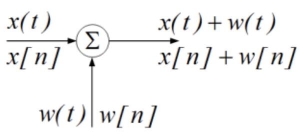
Diagramas de Blocos

1. Multiplicação por escalar:



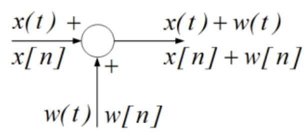
Diagramas de Blocos

2. Adição:



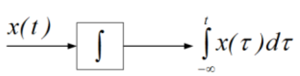
Diagramas de Blocos

2. Adição:



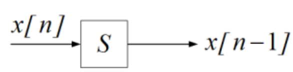
Diagramas de Blocos

3. Integração *(para sistemas de tempo contínuo)*:



Diagramas de Blocos

3. Deslocamento no tempo *(para sistemas de tempo discreto)*:



Diagramas de Blocos

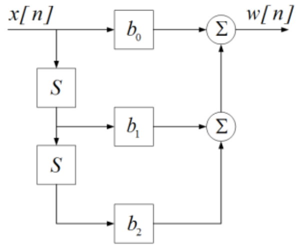
Considere o sistema descrito pela seguinte equação de diferenças:

$$y[n]+a_1y[n-1]+a_2y[n-2]=$$
$$=b_0x[n]+b_1x[n-1]+b_2x[n-2]$$

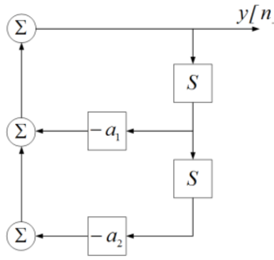
A saída *y[n]* do sistema pode ser ainda representada na forma:

$$y[n]=-a_1y[n-1]-a_2y[n-2]+$$
$$+b_0x[n]+b_1x[n-1]+b_2x[n-2]$$

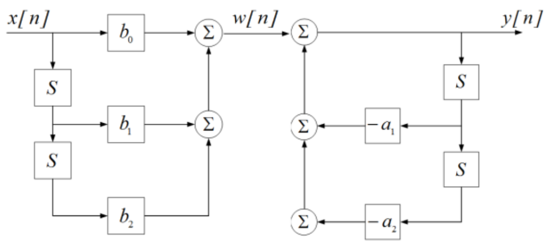
A parte relacionada à variável de entrada *x[n]* pode ser representada em nível de blocos como:



O mesmo procedimento pode ser empregado para representar em nível de blocos a parte da equação de diferenças relacionada à variável de saída:



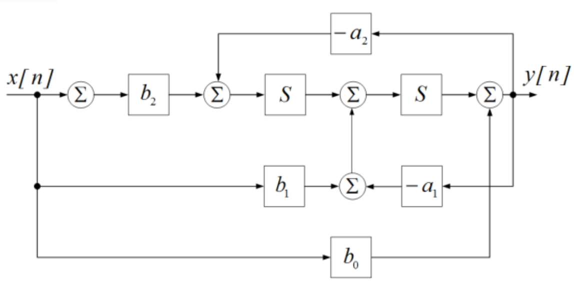
A forma final deste sistema representado através de diagrama de blocos é obtida unindo os dois diagramas anteriores, conforme apresentado a seguir:



Diagramas de Blocos

Existem outras formas de representação deste mesmo sistema em nível de blocos. O diagrama apresentado a seguir mostra a forma de realização deste mesmo sistema com apenas dois elementos de deslocamento no tempo.

Representação do sistema anterior com dois blocos de deslocamento no tempo.



Diagramas de Blocos

Exercício 2.14:
Obter a representação em diagrama de blocos do sistema descrito pela seguinte equação de diferenças:

$$y[n]+\frac{1}{2}y[n-1]-\frac{1}{3}y[n-3]=$$
$$=x[n]+2x[n-2]$$

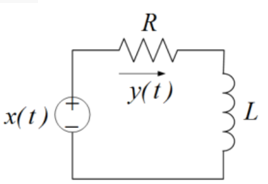
Repetir o mesmo exemplo empregando o menor número possível de elementos de deslocamento no tempo.

Diagramas de Blocos

A representação por diagramas de blocos para sistemas de tempo contínuo é análoga à apresentada para sistemas de tempo discreto, utilizando blocos de integradores no lugar dos blocos de deslocamento no tempo.

Diagramas de Blocos

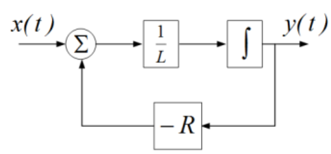
Considere o circuito *RL* apresentado a seguir:



$$x(t)=Ry(t)+L\frac{dy(t)}{dt}$$

Diagramas de Blocos

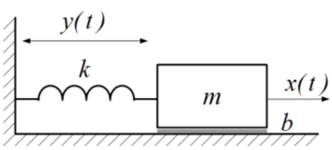
Que pode ser representado pelo seguinte diagrama de blocos:



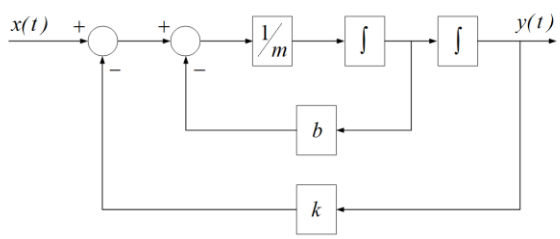
Diagramas de Blocos

Considere o sistema massa, mola e amortecedor apresentado a seguir. Faça a sua representação por diagrama de blocos.

x(t) = força *(entrada)*
y(t) = deslocamento *(saída)*

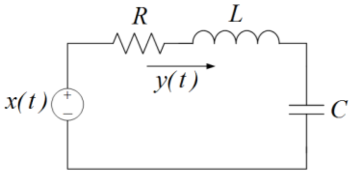


$$x(t)=m\frac{d^2y(t)}{dt^2}+b\frac{dy(t)}{dt}+ky(t)$$



Diagramas de Blocos

Exercício: Obter a representação por diagrama de blocos do circuito *RLC* série, considerando como entrada uma fonte de tensão *x(t)* e como sinal de saída a corrente *y(t)* do circuito.



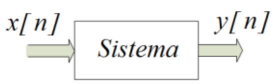
Descrição de Sistemas LTI por Variáveis de Estado

Os estados de um sistema podem ser definidos como o conjunto mínimo de sinais que descrevem o comportamento dinâmico do sistema. Sendo assim, dado o valor dos estados em um instante n_0 (ou t_0) e a entrada para $n \geq n_0$ (ou $t \geq t_0$), pode-se determinar os valores de todos os estados para $n \geq n_0$ (ou $t \geq t_0$).

Descrição de Sistemas LTI por Variáveis de Estado

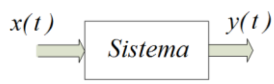
A descrição por variáveis de estado para um sistema *LTI* consiste em uma série de equações diferenciais ou de diferenças de primeira ordem que descrevem como os estados do sistema e a entrada se relacionam, e uma equação que descreve a saída do sistema como função das variáveis de estado e de entrada do sistema no instante atual.

Descrição de Sistemas LTI por Variáveis de Estado



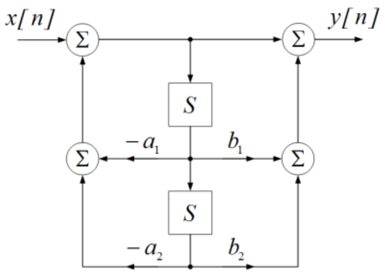
$$q[n+1] = Aq[n] + Bx[n]$$
$$y[n] = Cq[n] + Dx[n]$$

Descrição de Sistemas LTI por Variáveis de Estado



$$\frac{dq(t)}{dt} = Aq(t) + Bx(t)$$
$$y(t) = Cq(t) + Dx(t)$$

Para o sistema de tempo discreto representado pelo diagrama de blocos abaixo, obter a representação por variáveis de estado.



Descrição de Sistemas LTI por Variáveis de Estado

Admitindo como estados do sistema os sinais de saída de cada elemento de deslocamento no tempo, $q_1[n]$ e $q_2[n]$.

$$q_1[n+1] = -a_1 q_1[n] - a_2 q_2[n] + x[n]$$
$$q_2[n+1] = q_1[n]$$
$$y[n] = (b_1 - a_1) q_1[n] + (b_2 - a_2) q_2[n] + x[n]$$

Descrição de Sistemas LTI por Variáveis de Estado

Representação do sistema na forma matricial de equações de estado.

$$\begin{bmatrix} q_1[n+1] \\ q_2[n+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1[n] \\ q_2[n] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} x[n]$$

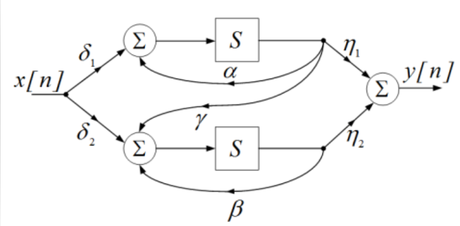
$$y[n] = [(b_1 - a_1) \quad (b_2 - a_2)] \begin{bmatrix} q_1[n] \\ q_2[n] \end{bmatrix} + [1]x[n]$$

Descrição de Sistemas LTI por Variáveis de Estado

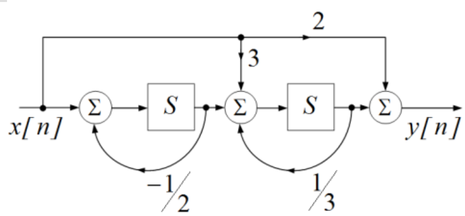
$$q[n+1] = Aq[n] + Bx[n]$$
$$y[n] = Cq[n] + Dx[n]$$

$$A = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$
$$C = [(b_1 - a_1) \quad (b_2 - a_2)], D = [1]$$

Exemplo 2.21: Para o sistema de tempo discreto representado pelo diagrama de blocos abaixo, obter a representação por variáveis de estado.



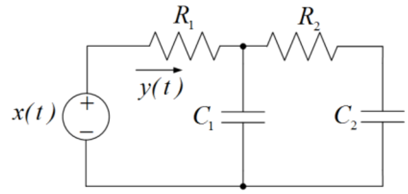
Exercício 2.15: Encontre a descrição por variáveis de estado correspondente ao diagrama de blocos apresentado a seguir.



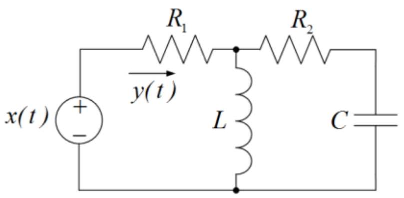
Para sistemas de tempo contínuo, a forma de representação por variáveis de estado é análoga àquela de tempo discreto, e é representada na forma

$$\frac{dq(t)}{dt} = Aq(t) + Bx(t)$$
$$y(t) = Cq(t) + Dx(t)$$

Para o circuito elétrico apresentado a seguir obter a representação por variáveis de estado. Após obter esta representação, obter o diagrama de blocos equivalente.



Para o circuito elétrico apresentado a seguir obter a representação por variáveis de estado. Após obter esta representação, obter o diagrama de blocos equivalente.



Transformação de Estados

Suponha que um mesmo sistema possa ser descrito por um outro conjunto de variáveis de estado tal que

$$\bar{q} = Tq \Rightarrow q = T^{-1}\bar{q}$$

$$\begin{aligned} \dot{q} &= Aq + Bx \\ y &= Cq + Dx \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} \dot{\bar{q}} &= TAT^{-1}\bar{q} + TBx \\ y &= CT^{-1}\bar{q} + Dx \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} \dot{\bar{q}} &= \bar{A}\bar{q} + \bar{B}x \\ y &= \bar{C}\bar{q} + Dx \end{aligned}$$

Exemplo 2.24: Um sistema LTI de tempo discreto é representado pelas seguintes matrizes:

$$A = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$C = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}, D = [2]$$

Admitindo que este sistema vai ser representado por novos estados

$$\bar{q}_1 = -\frac{1}{2}q_1 + \frac{1}{2}q_2$$

$$\bar{q}_2 = \frac{1}{2}q_1 + \frac{1}{2}q_2$$

determinar as matrizes $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ e $\bar{D}$.

Exercício 2.21: Um sistema LTI de tempo contínuo é descrito pelas seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix}, D = [1]$$

Admitindo que este sistema vai ser representado por novos estados

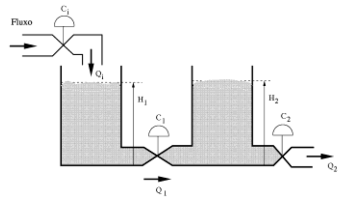
$$\bar{q}_1 = 2q_1 + q_2$$

$$\bar{q}_2 = q_1 - q_2$$

determinar as matrizes $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ e $\bar{D}$.

Para os dois circuitos elétricos anteriores, determinar as matrizes de transformação de similaridade – T, de forma que as novas variáveis de estado sejam as cargas nos capacitores e os fluxos nos indutores. Obter as novas realizações na forma de espaço de estados.

Exercícios:



- Hipóteses:
  - Relação Linear
    - Vazões $Q_1(t)$ e $Q_2(t)$
    - Alturas das colunas de líquido $H_1(t)$ e $H_2(t)$
  - R_1 e R_2 resistências ao fluxo
  - A_1 e A_2 áreas uniformes

Equações fundamentais do processo:

$$Q_1(t) = \frac{H_1(t) - H_2(t)}{R_1}$$

$$Q_2(t) = \frac{H_2(t)}{R_2}$$

Equações dinâmicas do processo:

$$A_1 \frac{dH_1(t)}{dt} = Q_i(t) - \left[\frac{H_1(t) - H_2(t)}{R_1}\right]$$

$$A_2 \frac{dH_2(t)}{dt} = \left[\frac{H_1(t) - H_2(t)}{R_1}\right] - \frac{H_2(t)}{R_2}$$

Mostre que a equação diferencial homogênea de ordem n:

$$\frac{d^n y}{dt_n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt_{n-1}} + \ldots + a_{n-1} \frac{dy}{dt} + a_n y = 0$$

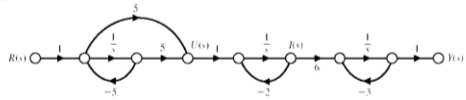
Pode ser representada na forma de espaço de estados por:

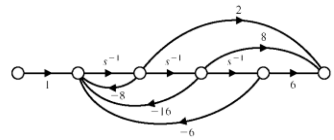
$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & . & 0 \\ 0 & 0 & 1 & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & . & -a_1 \end{bmatrix} x$$

Determine a representação na forma de espaço de estados do seguinte sistema multivariável:

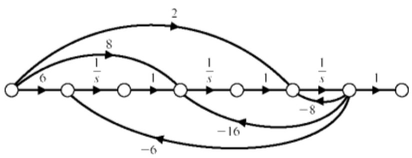
$$\ddot{y}_1 + a_1\dot{y}_1 + a_2 y_1 + c_3\dot{y}_2 + c_4 y_2 = b_1u_1 + d_1u_2$$
$$\ddot{y}_2 + c_1\dot{y}_2 + c_2 y_2 + a_3\dot{y}_1 + a_4 y_1 = b_2u_1 + d_2u_2$$

A partir dos diagramas de fluxo, obter as representações por variáveis de estados.





A partir dos diagramas de fluxo, obter as representações por variáveis de estados.



A partir dos diagramas de fluxo, obter as representações por variáveis de estados.