



Representação de Fourier para Sinais

A representação de Fourier para sinais é realizada através da soma ponderada de funções senoidais complexas. Se este sinal for aplicado a um sistema LTI, a saída do sistema será uma superposição ponderada das respostas do sistema a cada uma das senoides complexas que compõe o sinal de entrada, procedimento similar àquele realizado para somatória ponderada dos impulsos para a integral de convolução.



Representação de Fourier para Sinais

O estudo de sinais e sistemas, usando representações senoidais é denominado de análise de Fourier em homenagem a *Joseph Fourier* (1768-1830), por sua contribuição à teoria de representação de funções através da soma ponderada de senoides complexas.



Senoides Complexas e Sistemas LTI

A entrada de uma senoide complexa em um sistema LTI gera, *em estado estacionário*, uma saída igual à entrada senoidal multiplicada pela resposta em frequência do sistema, ou seja:

$$y[n] = H(e^{j\Omega})e^{j\Omega n}$$



Senoides Complexas e Sistemas LTI

Tal relação é obtida através do equacionamento da resposta senoidal do sistema em estado estacionário. Para isso será avaliada a convolução de um sistema de tempo discreto com a resposta ao impulso $h[n]$ e uma entrada do tipo senoidal complexa de amplitude unitária $x[n] = e^{j\Omega n}$, dada por:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]$$



Senoides Complexas e Sistemas LTI

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{j\Omega(n-k)}$$

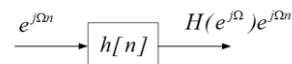
ou ainda

$$y[n] = e^{j\Omega n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-j\Omega k} = H(e^{j\Omega})e^{j\Omega n}$$



Senoides Complexas e Sistemas LTI

Consequentemente, a saída do sistema é caracterizada por uma senoide complexa multiplicada pelo termo $H(e^{j\Omega})$, definido como resposta em frequência do sistema.





Senoides Complexas e Sistemas LTI

Para o caso contínuo obtém-se um resultado análogo onde

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{j\omega(t-\tau)} d\tau$$

$$y(t) = e^{j\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau := H(j\omega) e^{j\omega t}$$



Senoides Complexas e Sistemas LTI

Por definição

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

será denominada de resposta em frequência do sistema H .



Autofunções

A fim de apresentar o conceito de autofunção será considerado inicialmente o problema do autovalor, em que

$$(\lambda I - A)v = 0$$

Tal identidade será satisfeita de forma trivial, se $v = 0$. Se a matriz $(\lambda I - A)$ for não-singular, ou seja, se $|\lambda I - A| \neq 0$ somente $v = 0$ satisfaz a identidade $(\lambda I - A)v = 0$.



Autofunções

Se $|\lambda I - A| = 0$, ou seja, se λ for uma raiz de $|\lambda I - A| = 0$, a matriz $(\lambda I - A)$ será singular e a equação $(\lambda I - A)v = 0$ será satisfeita para $v \neq 0$, e neste caso

$$Av = \lambda v$$

sendo λ definido como um autovalor da matriz A associado a um autovetor v , tal que a relação anterior seja satisfeita.



Autofunções

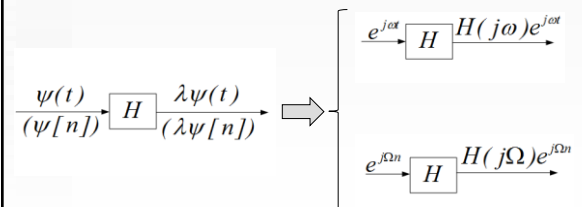
Para o caso relacionado com resposta em frequência de um dado sistema H , $\psi(t) = e^{j\omega t}$ será definida como uma autofunção do sistema H , pois

$$H\{e^{j\omega t}\} = H(j\omega)e^{j\omega t}$$

ou ainda $H\{\psi(t)\} = \lambda\psi(t)$ com $\lambda := H(j\omega)$ sendo λ o autovalor associado à autofunção $\psi(t)$.



Autofunções





Autofunções

Sinais que são autofunções de sistemas desempenham um papel importante na teoria de sistemas, pois possibilitam a representação de sinais arbitrários como superposição ponderada de autofunções, transformando a operação de convolução em multiplicação. Considere o sinal $x(t)$

$$x(t) = \sum_{k=1}^M a_k e^{j\omega_k t}$$



Autofunções

Se $e^{j\omega_k t}$ for uma autofunção do sistema com autovalor $H(j\omega_k)$, então cada termo do sinal de entrada $a_k e^{j\omega_k t}$ produz um termo na saída $a_k H(j\omega_k) e^{j\omega_k t}$, sendo assim

$$y(t) = \sum_{k=1}^M a_k H(j\omega_k) e^{j\omega_k t}$$



Representação de Fourier para 4 Classes de Sinais

Propriedade de Tempo	Periódico	Não-Periódico
Contínuo	Série de Fourier (FS)	Transformada de Fourier (FT)
Discreto	FS de Tempo Discreto	FT de Tempo Discreto



Ortogonalidade de Senoides Complexas

Diz-se que dois sinais são ortogonais se seus produtos internos forem zero. Para sinais periódicos de tempo discreto $\Phi_k[n]$ e $\Phi_m[n]$, sinais com período N , será avaliado o produto interno definido por

$$I_{k,m} = \sum_{n=-(N)} \Phi_k[n] \Phi_m^*[n]$$

sendo que * denota o complexo conjugado do sinal.



Ortogonalidade de Senoides Complexas

Admitindo que $\Phi_k[n] = e^{jk\Omega_0 n}$ e $\Phi_m[n] = e^{jm\Omega_0 n}$, representam senoides complexas de frequência $k\Omega_0$ e $m\Omega_0$ respectivamente

$$I_{k,m} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j(k-m)\Omega_0 n} = \sum_{n=-(N)} \Phi_k[n] \Phi_m^*[n]$$

sendo $\Omega_0 = 2\pi / N$.



Ortogonalidade de Senoides Complexas

Portanto

$$I_{k,m} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j(k-m)\Omega_0 n} = \begin{cases} N, & k = m \\ \frac{1 - e^{j(k-m)2\pi}}{1 - e^{j(k-m)\Omega_0}} \end{cases}$$

sendo $e^{j(k-m)2\pi} = 1 \forall k, m \in Z$, resultando em $\frac{1 - e^{j(k-m)2\pi}}{1 - e^{j(k-m)\Omega_0}} = 0$

(supondo que k e m sejam restritos a um intervalo de N valores consecutivos).



Ortogonalidade de Senoides Complexas

Para o caso contínuo tem-se uma situação análoga àquela apresentada para o caso discreto, ou seja

$$I_{k,m} = \int_0^T \Phi_k(t) \Phi_m^*(t) dt$$

sendo $\Phi_k(t) = e^{jk\omega_0 t}$ e $\Phi_m(t) = e^{jm\omega_0 t}$ senoides complexas com frequências $k\omega_0$ e $m\omega_0$ respectivamente.



Ortogonalidade de Senoides Complexas

Sendo assim tem-se

$$I_{k,m} = \int_0^T e^{j(k-m)\omega_0 t} dt$$

Para o caso em que $k=m$, resulta em

$$I_{k,m} = \int_0^T dt = T$$



Ortogonalidade de Senoides Complexas

Para o caso em que $k \neq m$

$$I_{k,m} = \int_0^T e^{j(k-m)\omega_0 t} dt = \frac{1}{j(k-m)\omega_0} (e^{j(k-m)2\pi} - 1)$$

sendo $e^{j(k-m)2\pi} = 1 \forall k, m \in \mathbb{Z}$, logo $I_{k,m} = 0 \forall k \neq m$.



Sinais Periódicos de Tempo Contínuo: A FS

Consideremos inicialmente, para representação de um sinal periódico por série de Fourier, a seguinte aproximação:

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A[k] e^{jk\omega_0 t}$$

A determinação dos coeficientes $A[k]$ será realizada utilizando a propriedade da ortogonalidade.



Sinais Periódicos de Tempo Contínuo: A FS

Inicia-se supondo que $x(t) = \hat{x}(t)$, ou seja

$$\int_{\langle T \rangle} x(t) e^{-jm\omega_0 t} dt = \int_{\langle T \rangle} \hat{x}(t) e^{-jm\omega_0 t} dt$$

Substituindo-se $\hat{x}(t)$ na expressão anterior tem-se

$$\int_{\langle T \rangle} x(t) e^{-jm\omega_0 t} dt = \int_{\langle T \rangle} \sum_{k=-\infty}^{\infty} A[k] e^{jk\omega_0 t} e^{-jm\omega_0 t} dt$$



Sinais Periódicos de Tempo Contínuo: A FS

Ou ainda

$$\int_{\langle T \rangle} x(t) e^{-jm\omega_0 t} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A[k] \int_{\langle T \rangle} e^{j(k-m)\omega_0 t} dt$$

Da propriedade da ortogonalidade, resulta que

$$\int_{\langle T \rangle} e^{j(k-m)\omega_0 t} dt = 0 \quad \forall k \neq m \in \mathbb{Z} \quad e \quad \int_{\langle T \rangle} e^{j(k-m)\omega_0 t} dt = T, \quad k = m \in \mathbb{Z}$$



Sinais Periódicos de Tempo Contínuo: A FS

Sendo assim

$$\int_{(T)} x(t) e^{-jm\omega_0 t} dt = A[m]T$$

Se de fato $x(t) = \hat{x}(t)$, os coeficientes $A[m]$ serão determinados por

$$A[m] = \frac{1}{T} \int_{(T)} x(t) e^{-jm\omega_0 t} dt$$



Convergência da Série de Fourier

Para que a série infinita

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A[k] e^{-jm\omega_0 t}$$

converja para $x(t)$, algumas condições devem ser satisfeitas. A primeira delas estabelece que $|x(t)|^2$ deve ser integrável.

Ou seja,

$$\frac{1}{T} \int_{(T)} |x(t)|^2 dt < \infty$$



Convergência da Série de Fourier

A convergência ponto a ponto é garantida em todos os valores de t , exceto naqueles que correspondem a descontinuidades, se as condições de Dirichlet forem satisfeitas:

1. $x(t)$ é limitado;
2. $x(t)$ tem um número finito de máximos e mínimos locais em um período;
3. $x(t)$ tem um número finito de descontinuidades em um período.



A Representação por Série de Fourier

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k] e^{jk\omega_0 t}$$

$$X[k] = \frac{1}{T} \int_{(T)} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

Em que $x(t)$ tem período fundamental T e $\omega_0 = 2\pi / T$.



A Representação por Série de Fourier

Diz-se que $x(t)$ e $X[k]$ são um par de série de Fourier, sendo denotada esta relação como

$$x(t) \xleftrightarrow{FS : \omega_0} X[k]$$

A representação do sinal $x(t)$ pelos coeficientes $X[k]$ também é conhecida como representação no domínio frequência, porque cada coeficiente de Fourier está associado a uma senoide complexa de frequência diferente.



Exemplo 3.5:

Determinar a representação no domínio frequência para o sinal

$$x(t) = 3 \cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{4}\right)$$

Represente graficamente $X[k]$ pelo seu módulo e argumento.



Exercício 3.3:

Determinar a representação por série de Fourier para o sinal

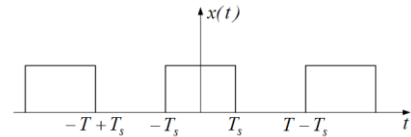
$$x(t) = 2 \operatorname{sen}(2\pi t - 3) + \operatorname{sen}(6\pi t)$$

Represente graficamente $X[k]$ pelo seu módulo e argumento.



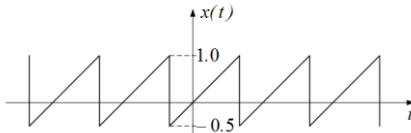
Exemplo 3.6:

Determine a representação por série de Fourier para a onda quadrada apresentada a seguir:



Exercício 3.4:

Determinar a representação por série de Fourier da onda dente de serra descrita na figura a seguir.

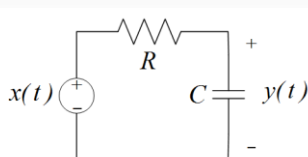


Exemplo 3.8: Circuito RC

Determinar a representação por série de Fourier para a variável de saída $y(t)$ do circuito RC apresentado na Figura a seguir, supondo $x(t)$ uma fonte de tensão com a forma de onda quadrada, conforme a do Exemplo 3.6, supondo a relação $T_s / T = 0.25$, com $T=1$ s e $RC=0.1$ s.



Exemplo 3.8: Circuito RC





Sinais Periódicos de Tempo Discreto - DTFS

Se $x[n]$ for um sinal periódico de tempo discreto de período fundamental N , então procura-se representar este sinal pela sua série de Fourier de tempo discreto – DTFS

$$\hat{x}[n] = \sum_k A[k] e^{jk\Omega_0 n}$$

onde $\Omega_0 = 2\pi / N$ é a frequência fundamental de $x[n]$.



Sinais Periódicos de Tempo Discreto - DTFS

Da mesma forma que para o caso contínuo, $A[k]$ é o peso aplicado à k -ésima senoide complexa do somatório e o “^” denota o valor aproximado de $x[n]$.

O número de termos e de pesos que deve ser utilizado em cada soma é definido, tendo por base que as senoides complexas $e^{jk\Omega_0 n}$ são N periódicas em k , ou seja

$$e^{j(N+k)\Omega_0 n} = e^{jk\Omega_0 n}$$



Sinais Periódicos de Tempo Discreto - DTFS

Sendo assim, há somente N senoides complexas distintas na forma $e^{jk\Omega_0 n}$. Um conjunto único de N senoides complexas distintas é obtido admitindo-se que a variável k assumia quaisquer N valores consecutivos, portanto

$$\hat{x}[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} A[k] e^{jk\Omega_0 n}$$

em que a notação $k = \langle N \rangle$ implica admitir que k varie ao longo de quaisquer N valores consecutivos.



Determinação dos Coeficientes $A[k]$ da DTFS

A expressão do MSE pode também ser representada na forma

$$MSE = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} |x[n] - \underbrace{\sum_{k=\langle N \rangle} A[k] e^{jk\Omega_0 n}}_{x[n]}|^2$$

Dado um número complexo $z = a + jb$, tem-se

$$|z|^2 = (a + jb)(a - jb) = a^2 + b^2$$



Determinação dos Coeficientes $A[k]$ da DTFS

Pode-se então representar a expressão do MSE como

$$MSE = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} \left\{ \left(x[n] - \sum_{k=\langle N \rangle} A[k] e^{jk\Omega_0 n} \right) \left(x[n] - \sum_{m=\langle N \rangle} A[m] e^{jm\Omega_0 n} \right)^* \right\}$$



Determinação dos Coeficientes $A[k]$ da DTFS

ou ainda

$$MSE = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} |x[n]|^2 + \sum_{m=\langle N \rangle} A^*[m] \left(\frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jm\Omega_0 n} \right) - \sum_{k=\langle N \rangle} A[k] \left(\frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x^*[n] e^{jk\Omega_0 n} \right) + \sum_{k=\langle N \rangle} \sum_{m=\langle N \rangle} A^*[m] A[k] \left(\frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} e^{j(k-m)\Omega_0 n} \right)$$



Determinação dos Coeficientes $A[k]$ da DTFS

Definindo $X[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=(N)} x[n] e^{-jk\Omega_0 n}$, a equação do

MSE pode ser reescrita na forma:

$$MSE = \frac{1}{N} \sum_{n=(N)} |x[n]|^2 - \sum_{k=(N)} A^*[k] X[k] + \sum_{k=(N)} A[k] X^*[k] + \sum_{k=(N)} |A[k]|^2$$



Determinação dos Coeficientes $A[k]$ da DTFS

Somando e subtraindo do lado direito da equação o termo $\sum_{k=(N)} |X[k]|^2$, a expressão do MSE pode ser representada como:

$$MSE = \frac{1}{N} \sum_{n=(N)} |x[n]|^2 + \sum_{k=(N)} |A[k] - X[k]|^2 - \sum_{k=(N)} |X[k]|^2$$



Determinação dos Coeficientes $A[k]$ da DTFS

Sendo assim, a dependência que o MSE tem dos coeficientes desconhecidos $A[k]$ reduz-se ao termo

$$\sum_{k=(N)} |A[k] - X[k]|^2$$

que é sempre não-negativo. Consequentemente, o MSE é minimizado quando

$$A[k] = X[k]$$



Determinação dos Coeficientes $A[k]$ da DTFS

Considerando $A[k]=X[k]$ e substituindo na expressão do MSE resulta em

$$MSE = \frac{1}{N} \sum_{n=(N)} |x[n]|^2 - \sum_{k=(N)} |X[k]|^2$$

Uma vez que foi definido

$$X[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=(N)} x[n] e^{-jk\Omega_0 n}$$



Determinação dos Coeficientes $A[k]$ da DTFS

$$\sum_{k=(N)} |X[k]|^2 = \sum_{k=(N)} \frac{1}{N^2} \sum_{n=(N)} \sum_{m=(N)} x[n] x^*[m] e^{j(m-n)\Omega_0 k}$$

A expressão anterior pode ser reescrita, permutando-se a ordem das somatórias na forma:

$$\sum_{k=(N)} |X[k]|^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=(N)} \sum_{m=(N)} x[n] x^*[m] \frac{1}{N} \sum_{k=(N)} e^{j(m-n)\Omega_0 k}$$



Determinação dos Coeficientes $A[k]$ da DTFS

Da propriedade da ortogonalidade entre as senoides

$$\frac{1}{N} \sum_{k=(N)} e^{j(m-n)\Omega_0 k} = \begin{cases} 1, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}$$

Concluindo que $\sum_{k=(N)} |X[k]|^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=(N)} |x[n]|^2$ resulta no MSE=0.

Sendo assim, os coeficientes da DTFS são de fato obtidos pela expressão

$$X[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=(N)} x[n] e^{-jk\Omega_0 n}$$



A Representação de Sinais Discretos por DTFS

$$x[n] = \sum_{k \in \langle N \rangle} X[k] e^{jk\Omega_0 n}$$

$$X[k] = \frac{1}{N} \sum_{n \in \langle N \rangle} x[n] e^{-jk\Omega_0 n}$$

Em que $x[n]$ tem período fundamental N e $\Omega_0 = 2\pi / N$. Diz-se que $x[n]$ e $X[k]$ são um par DTFS, denotado por

$$x[n] \xleftrightarrow{\text{DTFS} : \Omega_0} X[k]$$

13



Exemplo 3.1:

Determinar a representação por DTFS para

$$x[n] = \cos\left(\frac{\pi}{8}n + \phi\right)$$

Represente também o espectro de magnitude e o espectro de argumento deste sinal.

Representação de Fourier para Sinais: DTFS

14



Exercício 3.1:

Determine os coeficientes da DTFS para o sinal

$$x[n] = 1 + \text{sen}\left(\frac{\pi}{12}n + \frac{3\pi}{8}\right)$$

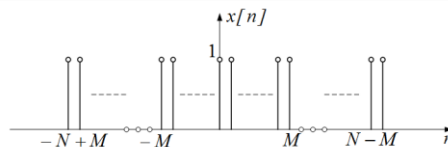
Representação de Fourier para Sinais: DTFS

15



Exemplo 3.2:

Determinar os coeficientes da DTFS para uma onda quadrada com período N descrita na Figura abaixo.



Representação de Fourier para Sinais: DTFS

16



Sinais Não-Periódicos de Tempo Contínuo - FT

A Transformada de Fourier – FT é utilizada para representar um sinal não-periódico de tempo contínuo como uma superposição de senoides complexas.

A natureza contínua não-periódica de um sinal de tempo implica que a superposição de senoides complexas envolva um *continuum* de frequências que variam de $-\infty$ a ∞ .



Sinais Não-Periódicos de Tempo Contínuo - TF

Sendo assim, a Transformada de Fourier de um sinal de tempo contínuo envolve uma integral em frequência

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

em que

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt .$$



Sinais Não-Periódicos de Tempo Contínuo - TF

A equação de $x(t)$ expressa que o sinal no tempo é a superposição ponderada de senoides, cada uma com um fator de ponderação $(1/2\pi)X(j\omega)d\omega$. Diz-se então que $x(t)$ e $X(j\omega)$ são um par de FT, ou seja:

$$x(t) \xleftrightarrow{FT} X(j\omega)$$



Sinais Não-Periódicos de Tempo Contínuo - TF

As condições de convergência apresentadas aqui para a Transformada de Fourier são similares as já utilizadas para a série de Fourier, ou seja, definindo $\hat{x}(t)$ como

$$\hat{x}(t) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

com

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$



Sinais Não-Periódicos de Tempo Contínuo - TF

Resultará em

$$MSE = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t) - \hat{x}(t)|^2 dt$$

igual a zero se $x(t)$ for integrável ao quadrado, ou seja

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty .$$



Sinais Não-Periódicos de Tempo Contínuo - TF

A convergência ponto a ponto é garantida em todos os valores de t , exceto naqueles correspondentes a descontinuidades, se $x(t)$ satisfizer as condições de Dirichlet para sinais não-periódicos, apresentadas a seguir:



Sinais Não-Periódicos de Tempo Contínuo - TF

1. $x(t)$ é absolutamente integrável:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$$

2. $x(t)$ deve ter um número finito de máximos, mínimos e descontinuidades locais em qualquer intervalo finito;

3. O tamanho de cada descontinuidade é finito.



Exemplo 3.14:

Encontrar a FT do sinal $x(t) = e^{-at}u(t)$.

A FT não converge para valores de $a \leq 0$, uma vez que $x(t)$ não seria absolutamente integrável, ou seja

$$\int_0^{\infty} e^{-at} dt \leq \infty.$$

Para $a > 0$ tem-se



Exemplo 3.14:

$$\begin{aligned} X(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}u(t)e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-(a+j\omega)t} dt = -\frac{1}{a+j\omega} [e^{-(a+j\omega)t}]_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{a+j\omega} \end{aligned}$$

$$|X(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + a^2}} \quad \arg\{X(j\omega)\} = -\arctg\left(\frac{\omega}{a}\right)$$



Exemplo 3.14:

O espectro de magnitude é obtido pela equação

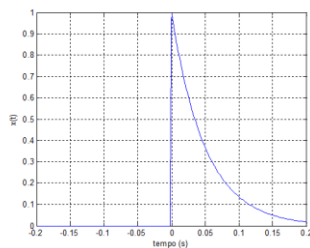
$$|X(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + a^2}}$$

e o espectro de argumento (ou de fase) é obtido por

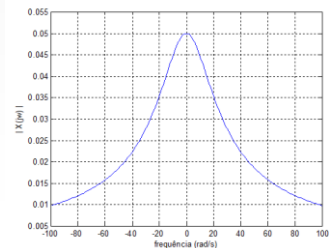
$$\arg\{X(j\omega)\} = -\arctg\left(\frac{\omega}{a}\right).$$



Representação do sinal $x(t) = e^{-at}u(t)$ no tempo

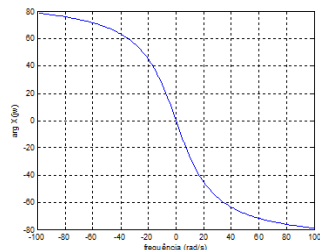


Espectro de Magnitude de $X(j\omega)$





Espectro de Argumento ou de Fase



Exercício 3.8:

Determinar a Transformada de Fourier de

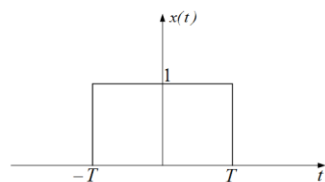
$$x(t) = e^{at}u(-t)$$

supondo $a > 0$.



Exemplo 3.15:

Considere o pulso retangular descrito na figura abaixo:



$$x(t) = \begin{cases} 1, & -T \leq t \leq T \\ 0, & |t| > T \end{cases}$$

Determinar a FT de $x(t)$.

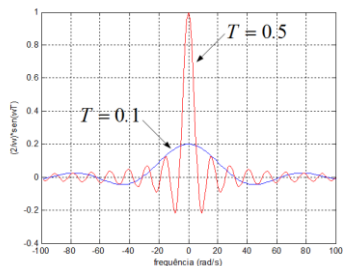


Exemplo 3.15:

Este exemplo ilustra o fato de que ao mudar T , considerando-o menor, $x(t)$ torna-se mais concentrado nas proximidades da origem do sinal representado no domínio do tempo, enquanto no domínio frequência o sinal torna-se menos concentrado em torno da origem. O inverso ocorrerá nos dois domínios se T for considerado maior.

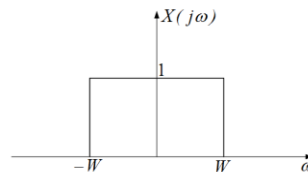


Exemplo 3.15 – Função $X(j\omega) = 2T \text{sinc}(\omega T/\pi)$



Exemplo 3.16:

Determinar a Transformada Inversa do espectro retangular apresentado na figura abaixo. Com base nos resultados encontrados faça uma análise semelhante àquela realizada para o pulso no domínio do tempo.





Exemplos 3.17 e 3.18:

Exemplo 3.17: Determinar a Transformada de Fourier do sinal

$$x(t) = \delta(t) .$$

Exemplo 3.18: Determinar a Transformada Inversa de Fourier do sinal

$$X(j\omega) = 2\pi\delta(\omega) .$$



Exercício 3.9:

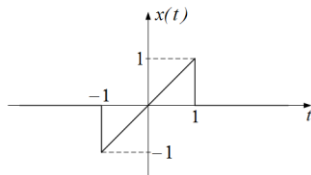
Determinar a Transformada Inversa de Fourier de

$$X(j\omega) = \begin{cases} 2 \cos \omega, & |\omega| \leq \pi \\ 0, & |\omega| > \pi \end{cases} .$$



Exercício 3.10:

Determinar a Transformada de Fourier do sinal $x(t)$ apresentado na figura a seguir:



$$x(t) = \begin{cases} t, & |t| \leq 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$$



Sinais Não-Periódicos de Tempo Discreto - DTFT

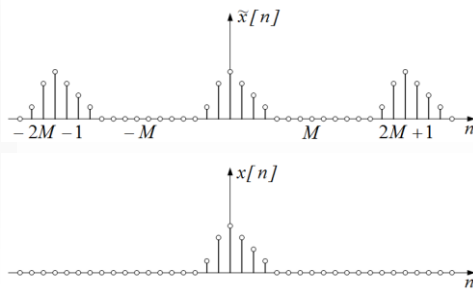
A Transformada de Fourier de Tempo Discreto será desenvolvida com base na Série de Fourier de Tempo Discreto, descrevendo um sinal não-periódico como o limite de um sinal periódico com período N aproximando-se do infinito. Considera-se então que $\tilde{x}[n]$ seja um sinal periódico, com período $N = 2M + 1$.



Sinais Não-Periódicos de Tempo Discreto - DTFT

O sinal não-periódico de duração finita $x[n]$ será então representado na forma:

$$x[n] = \begin{cases} \tilde{x}[n], & -M \leq n \leq M \\ 0, & |n| > M \end{cases}$$



Sinais Não-Periódicos de Tempo Discreto - DTFT

Conforme apresentado nas figuras anteriores, a medida em que M se eleva, as réplicas periódicas de $x[n]$, presentes em $\tilde{x}[n]$, movem-se cada vez para pontos mais afastados da origem. Finalmente, quando $M \rightarrow \infty$, as réplicas são removidas para o infinito, logo:

$$x[n] = \lim_{M \rightarrow \infty} \tilde{x}[n]$$



Sinais Não-Periódicos de Tempo Discreto - DTFT

O equacionamento de $x[n]$ é obtido então, iniciando-se pela representação da DTFS do sinal periódico $\tilde{x}[n]$

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=-M}^M X[k] e^{jk\Omega_0 n}$$

sendo

$$X[k] = \frac{1}{2M+1} \sum_{n=-M}^M \tilde{x}[n] e^{-jk\Omega_0 n}$$



Sinais Não-Periódicos de Tempo Discreto - DTFT

Uma vez que $\tilde{x}[n] = x[n]$ para $-M \leq n \leq M$, pode-se reescrever a equação anterior em termos de $x[n]$, ou seja

$$\begin{aligned} X[k] &= \frac{1}{2M+1} \sum_{n=-M}^M x[n] e^{-jk\Omega_0 n} \\ &= \frac{1}{2M+1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-jk\Omega_0 n} \end{aligned}$$

uma vez que $x[n] = 0$ para $|n| > M$.



Sinais Não-Periódicos de Tempo Discreto - DTFT

Considera-se agora a função contínua $X(e^{j\Omega})$, cujas amostras em $k\Omega_0$ são iguais aos coeficientes da DTFS normalizados por $2M+1$, ou seja

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n}$$

de forma que $X[k] = X(e^{jk\Omega_0})/(2M+1)$.



Sinais Não-Periódicos de Tempo Discreto - DTFT

Desta forma, $\tilde{x}[n]$ pode ser reescrito como

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{2M+1} \sum_{k=-M}^M X(e^{jk\Omega_0})e^{jk\Omega_0 n}$$

Uma vez que $\Omega_0 = 2\pi/(2M+1)$, o termo $\frac{1}{2M+1}$ pode ser substituído na equação anterior por $\Omega_0/2\pi$, ou seja:



Sinais Não-Periódicos de Tempo Discreto - DTFT

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-M}^M X(e^{jk\Omega_0})e^{jk\Omega_0 n}\Omega_0$$

Neste ponto, avalia-se a expressão que relaciona o sinal periódico $\tilde{x}[n]$, com o sinal não-periódico $x[n]$, o qual deseja-se obter a representação, ou seja:

$$\begin{aligned} x[n] &= \lim_{M \rightarrow \infty} \tilde{x}[n] \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2\pi} \sum_{k=-M}^M X(e^{jk\Omega_0})e^{jk\Omega_0 n}\Omega_0 \right) \end{aligned}$$



Sinais Não-Periódicos de Tempo Discreto - DTFT

A interpretação de equação anterior é a da soma de valores de uma função $X(e^{j\Omega})e^{j\Omega n}$ avaliados em $\Omega = k\Omega_0$, multiplicados pela distância entre as amostras Ω_0 . Esta é a aproximação pela regra da soma das áreas de elementos retangulares para uma integral. Sendo $\Omega = k\Omega_0$ e $d\Omega = \Omega_0$, a equação de $x[n]$ pode ser reescrita na forma

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\Omega})e^{j\Omega n} d\Omega$$



Sinais Não-Periódicos de Tempo Discreto - DTFT

Sendo os limites da integral avaliados observando que $\lim_{M \rightarrow \infty} M\Omega_0 = \pi$. Sendo assim, expressa-se $x[n]$ como a superposição ponderada de senoides cuja ponderação é

$$\frac{1}{2\pi} X(e^{j\Omega})d\Omega$$



Sinais Não-Periódicos de Tempo Discreto - DTFT

A representação por DTFT é expressa como

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\Omega})e^{j\Omega n} d\Omega$$

em que

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n}$$



Sinais Não-Periódicos de Tempo Discreto - DTFT

Diz-se então que $X(e^{j\Omega})$ e $x[n]$ são um par de DTFT,

$$x[n] \xleftrightarrow{DTFT} X(e^{j\Omega})$$

A representação de $x[n]$ foi realizada admitindo que o sinal $x[n]$ tenha duração finita. O resultado obtido pode ser aplicável a sinais de duração infinita, considerando condições sob as quais a soma infinita converge.



Sinais Não-Periódicos de Tempo Discreto - DTFT

Se $x[n]$ é absolutamente somável:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty$$

Então $X(e^{j\Omega})$ converge uniformemente para uma função contínua em Ω .



Sinais Não-Periódicos de Tempo Discreto - DTFT

Se $x[n]$ não for absolutamente somável, mas tiver energia finita, ou seja

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 < \infty$$

pode-se mostrar que $X(e^{j\Omega})$ converge num sentido de erro médio quadrático, mas não converge ponto a ponto.



Sinais Não-Periódicos de Tempo Discreto - DTFT

Exemplo 3.9: Determinar a DTFT da sequência exponencial

$$x[n] = \alpha^n u[n]$$

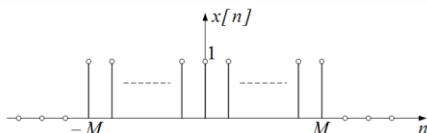
Exercício 3.5: Determine a DTFT do sinal

$$x[n] = 2(3)^n u[-n]$$



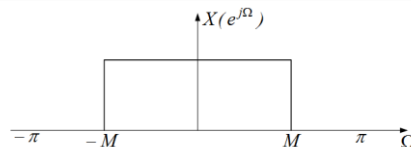
Sinais Não-Periódicos de Tempo Discreto - DTFT

Exemplo 3.10: Determinar a DTFT do pulso retangular apresentado na figura a seguir:



Sinais Não-Periódicos de Tempo Discreto - DTFT

Exemplo 3.11: Determinar a DTFT inversa do pulso retangular apresentado na figura abaixo:





Sinais Não-Periódicos de Tempo Discreto - DTFT

Exemplo 3.12: Determinar a DTFT de $x[n] = \delta[n]$.

Exemplo 3.13: Encontre a DTFT inversa de

$$X(e^{j\Omega}) = \delta(\Omega), \quad -\pi \leq \Omega \leq \pi$$



Sinais Não-Periódicos de Tempo Discreto - DTFT

Exercício 3.6: Determinar a DTFT inversa de

$$X(e^{j\Omega}) = 2 \cos(2\Omega).$$

Exercício 3.7: Determinar a DTFT do sinal

$$x[n] = \begin{cases} 2^n, & 0 \leq n \leq 9 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

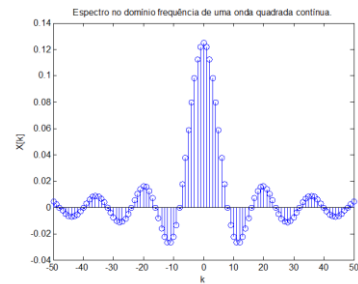
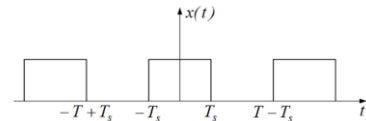
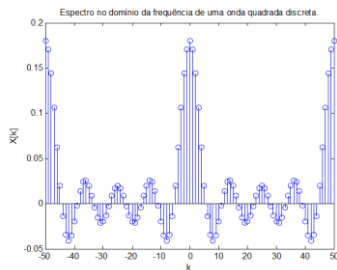
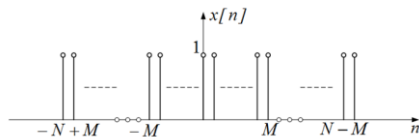
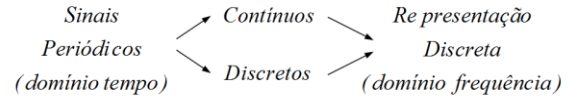


Propriedades das Representações de Fourier

Sinais periódicos de tempo contínuo ou discreto têm uma representação por série de Fourier, dada pela soma ponderada de senoides complexas com frequências múltiplas inteiras da frequência fundamental. Desta forma, um conjunto discreto de frequências está envolvido em sua representação.



Periodicidade

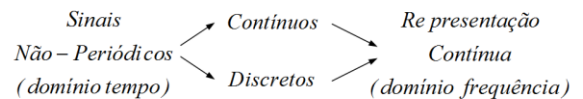


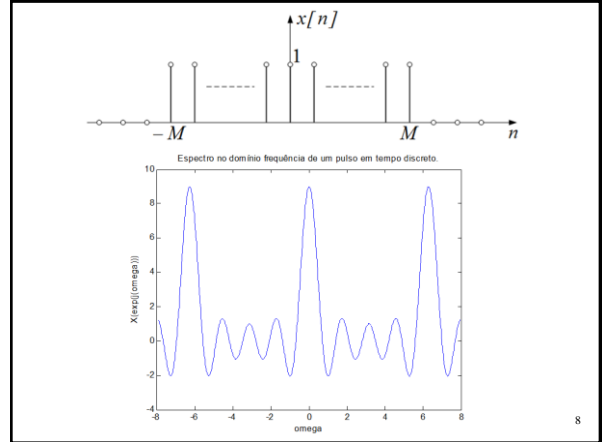
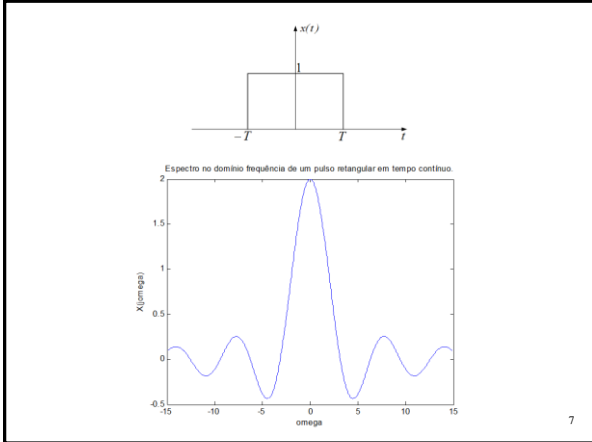
Periodicidade

Sinais não-periódicos de tempo contínuo ou de tempo discreto envolvem a ponderação de senoides complexas de um *continuum* de frequências, resultando em uma representação contínua de sinais no domínio frequência.



Periodicidade





Domínio Tempo	Periódico	Não-Periódico	
C O N T Í N U O	Série de Fourier $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k) e^{jk\omega_0 t}$ $X(k) = \frac{1}{T} \int_{(T)} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$ $x(t)$ tem período $T, \omega_0 = 2\pi / T$	Transformada de Fourier $x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$ $X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$	N A O P E R.
D I S C R E T O	DTFS $x[n] = \sum_{k=(N)} X(k) e^{jk\Omega_0 n}$ $X[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=(N)} x[n] e^{-jk\Omega_0 n}$ $x[n]$ e $X[k]$ tem período $N, \Omega_0 = 2\pi / N$	DTFT $x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\Omega}) e^{j\Omega n} d\Omega$ $X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n}$ $X(e^{j\Omega})$ tem período 2π	P E R Í O D I C O
	DISCRETO	CONTÍNUO	Domínio Frequência

Adicionalmente, as representações de Fourier para sinais de tempo discreto (DTFS e DTFT), são periódicas devido à natureza N -periódica das senoides complexas de tempo discreto. A tabela abaixo apresenta um sumário das propriedades de periodicidade das representações de Fourier.

Propriedades de Periodicidade das Representações de Fourier

Domínio Tempo	Domínio Frequência
Contínuo	Não-Periódico
Discreto	Periódico
Periódico	Discreto
Não-Periódico	Contínuo

Sistemas e Sinais
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Departamento de Engenharia Elétrica

Linearidade

Todas as quatro representações de Fourier satisfazem as propriedades de linearidade:

$$z(t) = ax(t) + by(t) \xleftrightarrow{FT} Z(j\omega) = aX(j\omega) + bY(j\omega)$$

$$z(t) = ax(t) + by(t) \xleftrightarrow{FS:\omega_0} Z[k] = aX[k] + bY[k]$$

$$z[n] = ax[n] + by[n] \xleftrightarrow{DTFT} Z(e^{j\Omega}) = aX(e^{j\Omega}) + bY(e^{j\Omega})$$

$$z[n] = ax[n] + by[n] \xleftrightarrow{DTFS:\Omega_0} Z[k] = aX[k] + bY[k]$$

Sistemas e Sinais
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Departamento de Engenharia Elétrica

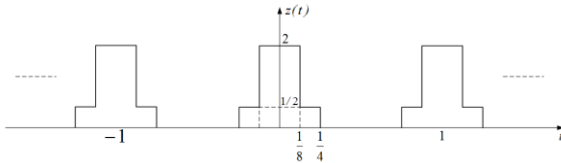
Linearidade

Nas representações anteriores, supõe-se que as variáveis em maiúsculas denotem a representação por Fourier das variáveis em minúsculas correspondentes. Nos casos da FS e da DTFS admite-se que os sinais que estão sendo somados possuem o mesmo período fundamental.



Exemplo 3.19:

Considerando o sinal periódico apresentado a seguir, obter sua representação no domínio frequência:



Propriedades das Representações de Fourier



Linearidade

A propriedade da linearidade também é base do método das frações parciais, empregado para a obtenção da transformada de Fourier inversa das representações do domínio frequência $X(j\omega)$, dada pela razão de polinômios em $j\omega$, na forma

$$X(j\omega) = \frac{b_M(j\omega)^M + \dots + b_1(j\omega) + 1}{(j\omega)^N + a_{N-1}(j\omega)^{N-1} + \dots + a_1(j\omega) + a_0}$$

Propriedades das Representações de Fourier



Linearidade

Apenas para ilustrar o procedimento empregado no método das frações parciais, será considerado $M < N$, admitindo que as raízes do polinômio do denominador em $j\omega$, representadas $\alpha_k, k = 1, 2, \dots, N$, sejam todas distintas.

A função racional $X(j\omega)$ pode então ser representada na forma:

$$X(j\omega) = \sum_{k=1}^N \frac{C_k}{j\omega - \alpha_k}$$

Propriedades das Representações de Fourier



Linearidade

Uma vez que

$$e^{\alpha t} \leftrightarrow \frac{1}{j\omega - \alpha} \quad \forall \alpha < 0$$

$$x(t) = \sum_{k=1}^N C_k e^{\alpha_k t} u(t) \leftrightarrow X(j\omega) = \sum_{k=1}^N \frac{C_k}{j\omega - \alpha_k}$$

Propriedades das Representações de Fourier



Exemplo 3.20:

Determinar a transformada de Fourier inversa de $X(j\omega)$.

$$X(j\omega) = \frac{j\omega + 1}{(j\omega)^2 + 5j\omega + 6}$$

Propriedades das Representações de Fourier



Exercício 3.11:

Utilize a expansão em frações parciais e a linearidade para determinar a transformada de Fourier inversa de

$$X(j\omega) = \frac{-j\omega}{(j\omega)^2 + 3j\omega + 2}$$

Propriedades das Representações de Fourier



Linearidade

A expansão em frações parciais também é empregada para determinar a DTFT inversa de representações em domínio frequência dada como funções racionais de polinômios em $e^{-j\Omega}$, escritos na forma

$$X(e^{j\Omega}) = \frac{b_M e^{-j\Omega M} + \dots + b_1 e^{-j\Omega} + b_0}{a_N e^{-j\Omega N} + a_{N-1} e^{-j\Omega(N-1)} + \dots + a_1 e^{-j\Omega} + 1}$$



Representações desta forma ocorrem frequentemente no estudo de sistemas descritos por meio de equações lineares de diferenças com coeficientes constantes. Conforme realizado no caso da obtenção da transformada de Fourier inversa, a função $X(e^{j\Omega})$ pode ser representada como

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{k=1}^N \frac{C_k}{1 - \alpha_k e^{-j\Omega}}$$

em que $\alpha_k, k = 1, 2, \dots, N$, são as raízes do polinômio do denominador de $X(e^{j\Omega})$, supostamente distintas.



Linearidade

Sendo assim, uma vez que

$$(\alpha_k)^n u[n] \stackrel{DTFT}{\leftrightarrow} \frac{1}{1 - \alpha_k e^{-j\Omega}}$$

empregando a propriedade da linearidade, implica

$$x[n] = \sum_{k=1}^N C_k (\alpha_k)^n u[n]$$



Exemplo 3.21:

Determinar a DTFT inversa de $X(e^{j\Omega})$.

$$X(e^{j\Omega}) = \frac{-\frac{5}{6}e^{-j\Omega} + 5}{1 + \frac{1}{6}e^{-j\Omega} - \frac{1}{6}e^{-j\Omega 2}}$$



Simetria

A propriedade da simetria será desenvolvida para a FT, sendo que para outras três representações, é obtida de maneira análoga. Supõe-se que $x(t) = x^*(t)$, considera-se então

$$\begin{aligned} X^*(j\omega) &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \right]^* = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) e^{j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j(-\omega)t} dt = X(-j\omega) \end{aligned}$$



Simetria

Portanto, se $x(t)$ for real, a parte real da transformada apresentará simetria par, enquanto a parte imaginária apresentará simetria ímpar. Isto também implica que o espectro de magnitude é uma função par, enquanto o espectro de fase é uma função ímpar.

$$X^*(j\omega) = X(-j\omega) \begin{cases} \rightarrow \text{Re}\{X(j\omega)\} = \text{Re}\{X(-j\omega)\} \\ \rightarrow \text{Im}\{X(j\omega)\} = -\text{Im}\{X(-j\omega)\} \end{cases}$$



Simetria

Supõe-se agora que $x(t)$ seja um sinal puramente imaginário, de forma que $x(t) = -x^*(t)$.

$$X^*(j\omega) = \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \right]^* = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)e^{j\omega t} dt$$

$$= - \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j(-\omega)t} dt = -X(-j\omega)$$



Simetria

Examinando as partes real e imaginária da relação $X^*(j\omega) = -X(-j\omega)$, conclui-se que se o sinal $x(t)$ for puramente imaginário, a parte real da FT apresentará simetria ímpar, enquanto a parte imaginária apresentará simetria par.

$$X^*(j\omega) = -X(-j\omega) \begin{cases} \text{Re}\{X(j\omega)\} = -\text{Re}\{X(-j\omega)\} \\ \text{Im}\{X(j\omega)\} = \text{Im}\{X(-j\omega)\} \end{cases}$$



Deslocamento no Tempo

Admite-se que $z(t) = x(t - t_0)$ seja uma versão deslocada no tempo do sinal $x(t)$. Sendo assim,

$$Z(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} z(t)e^{-j\omega t} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t - t_0)e^{-j\omega t} dt$$



Deslocamento no Tempo

Realiza-se então uma mudança de variável, onde $\tau = t - t_0$ e assim

$$Z(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-j\omega(\tau+t_0)} d\tau$$

$$= e^{-j\omega t_0} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-j\omega\tau} d\tau$$

$$= e^{-j\omega t_0} X(j\omega)$$



Deslocamento no Tempo

Resultando na seguinte conclusão:

$$|Z(j\omega)| = |X(j\omega)|$$

$$\arg\{Z(j\omega)\} = \arg\{X(j\omega)\} - \omega t_0$$



Propriedades de Deslocamento no Tempo das Representações de Fourier

$$x(t - t_0) \xleftrightarrow{FT} e^{-j\omega t_0} X(j\omega)$$

$$x(t - t_0) \xleftrightarrow{FS: \omega_0} e^{-jk\omega_0 t_0} X[k]$$

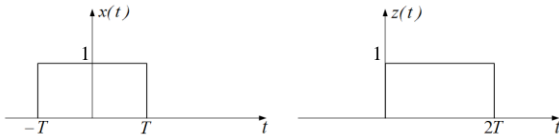
$$x[n - n_0] \xleftrightarrow{DTFT} e^{-j\Omega_0 n_0} X(e^{j\Omega})$$

$$x[n - n_0] \xleftrightarrow{DTFS: \Omega_0} e^{-jk\Omega_0 n_0} X[k]$$



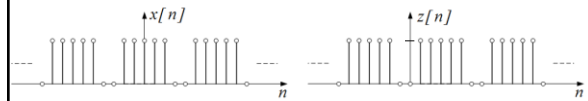
Exemplo 3.22:

Determinar a *FT* do pulso retangular $x(t)$ deslocado no tempo, representado por $z(t)$ na figura abaixo.



Exercício 3.12:

Determinar, com base na *DTFS* da onda quadrada do sinal $x[n]$, a *DTFS* do sinal $z[n]$.



Deslocamento em Frequência

Análogo ao caso do deslocamento no tempo, supõe-se agora um sinal deslocado em frequência tal que

$$Z(j\omega) = X(j(\omega - \gamma))$$

logo

$$\begin{aligned} z(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Z(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j(\omega - \gamma)) e^{j\omega t} d\omega \end{aligned}$$



Deslocamento em Frequência

Admitindo-se $\eta = \omega - \gamma$ tem-se.

$$\begin{aligned} z(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\eta) e^{j(\eta + \gamma)t} d\eta \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{j\gamma t} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\eta) e^{j\eta t} d\eta = e^{j\gamma t} x(t) \end{aligned}$$



Deslocamento em Frequência

Consequentemente, um deslocamento de γ no domínio frequência corresponde a multiplicar o sinal no domínio tempo por uma senóide complexa de frequência igual a γ .

Observa-se que o deslocamento em frequência deve ter um valor inteiro em ambos os casos da série de Fourier.



Propriedades de Deslocamento em Frequência das Representações de Fourier

$$\begin{aligned} e^{j\gamma t} x(t) &\overset{FT}{\leftrightarrow} X(j(\omega - \gamma)) \\ e^{jk_0 \omega_0 t} x(t) &\overset{FS: \omega_0}{\leftrightarrow} X[k - k_0] \\ e^{j\Omega_0 n} x[n] &\overset{DTFT}{\leftrightarrow} X(e^{j(\Omega - \Omega_0)}) \\ e^{jk_0 \Omega_0 n} x[n] &\overset{DTFS: \Omega_0}{\leftrightarrow} X[k - k_0] \end{aligned}$$



Exemplo 3.23:

Determinar a FT do pulso senoidal complexo dado por

$$z(t) = \begin{cases} e^{j10t}, & |t| \leq \pi \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$



Mudança de Escala

Avalia-se inicialmente o efeito da mudança de escala na variável transformada para o domínio frequência. Assim, seja $z(t) = x(at)$:

$$\begin{aligned} Z(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} z(t)e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(at)e^{-j\omega t} dt \end{aligned}$$



Admite-se então a variável auxiliar $\tau = at$, logo:

$$\begin{aligned} Z(j\omega) &= \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-j(\omega/a)\tau} d\tau \\ &= \frac{1}{a} X\left(j\frac{\omega}{a}\right), \quad a > 0 \end{aligned}$$

Portanto, a mudança de escala do sinal no domínio tempo introduz uma mudança de escala inversa na representação no domínio frequência, em conjunto com uma alteração na escala de amplitude.



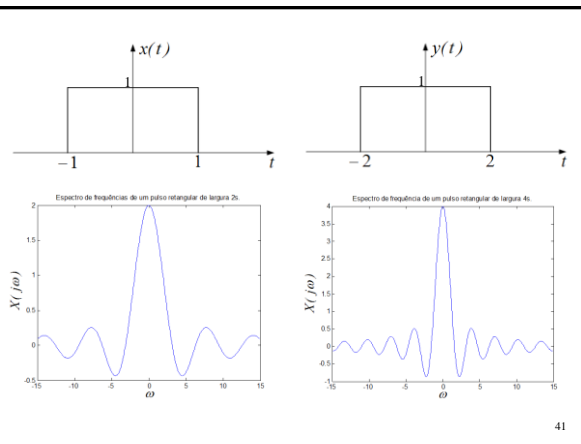
Exemplo 3.24:

Admita que $x(t)$ seja um pulso retangular

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$$

Use a propriedade de mudança de escala para obter a FT do pulso retangular alterado na forma

$$y(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq 2 \\ 0, & |t| > 2 \end{cases}$$



Diferenciação e Integração

As operações de diferenciação e integração aplicam-se a funções contínuas, e serão definidas para a classe de sinais contínuos no tempo ou em frequência, neste último caso com respeito apenas à FT e à DTFT.



Diferenciação no Tempo

Considera-se a diferenciação no tempo de um sinal contínuo e não-periódico $x(t)$,

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega .$$

Diferenciando ambos os lados da equação anterior com relação ao tempo obtém-se

$$\frac{d}{dt} x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} j\omega X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega .$$



Diferenciação no Tempo

$$\frac{d}{dt} x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} j\omega X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$



$$\frac{d}{dt} x(t) \stackrel{FT}{\leftrightarrow} j\omega X(j\omega)$$



Exemplo 3.25:

Obter a representação em frequência do sinal

$$\frac{d}{dt} (e^{-\alpha} u(t))$$



Diferenciação no Tempo

Se $x(t)$ for um sinal periódico, tem-se a representação por FS

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k] e^{jk\omega_0 t}$$

Diferenciando esta última equação em ambos os lados resulta em

$$\frac{d}{dt} x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} jk\omega_0 X[k] e^{jk\omega_0 t} .$$



Diferenciação no Tempo

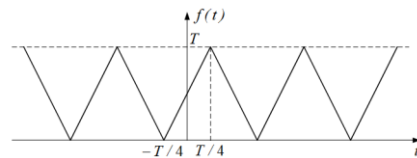
Sendo assim, tem-se a representação por série de Fourier da derivada temporal de um sinal periódico dada por

$$\frac{d}{dt} x(t) \stackrel{FS:\omega_0}{\leftrightarrow} jk\omega_0 X[k] .$$



Exemplo 3.26:

Determine a representação por FS da onda triangular apresentada a seguir:





Diferenciação em Frequência

Considera-se agora a operação de diferenciação no domínio da frequência de um sinal:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$$

Resultando em

$$\frac{d}{d\omega} X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} -jtx(t)e^{-j\omega t} dt \Rightarrow -jtx(t) \stackrel{FT}{\leftrightarrow} \frac{d}{d\omega} X(j\omega)$$



Exercício 3.15:

Use a propriedade da diferenciação em frequência para determinar a Transformada de Fourier do sinal

$$x(t) = te^{-at}u(t)$$



Integração e Somatório:

A operação de integração aplica-se somente a variáveis independentes contínuas. Consequentemente, para o domínio tempo, esta operação seria aplicável à Transformada de Fourier - FT ou à Série de Fourier - FS.



Integração:

Considera-se então o sinal não-periódico $x(t)$, tal que

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$$

$$\frac{d}{dt} y(t) = x(t)$$



Integração:

Uma vez que

$$\frac{d}{dt} y(t) \stackrel{FT}{\leftrightarrow} j\omega Y(j\omega)$$

e
$$x(t) \stackrel{FT}{\leftrightarrow} X(j\omega)$$

resultaria em
$$j\omega Y(j\omega) = X(j\omega) \Rightarrow Y(j\omega) = \frac{1}{j\omega} X(j\omega)$$



Integração e Somatório:

Desta forma

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \stackrel{FT}{\leftrightarrow} \frac{1}{j\omega} X(j\omega)$$

O análogo em tempo discreto da integração é o somatório, ou seja

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]$$



Somatório

O análogo em tempo discreto da diferenciação é a diferença. A operação de diferença recupera $x[n]$ de $y[n]$, ou seja

$$x[n] = y[n] - y[n-1] .$$

Isto resulta na propriedade da diferença. Supondo $x[n]$ um sinal não-periódico

$$x[n] \stackrel{DIFT}{\leftrightarrow} X(e^{j\Omega}) = Y(e^{j\Omega}) - e^{-j\Omega} Y(e^{j\Omega}) .$$

Propriedades da Diferenciação, Integração e Somatório Comumente Usadas

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &\stackrel{FT}{\leftrightarrow} j\omega X(j\omega) \\ \frac{d}{dt}x(t) &\stackrel{FS:\omega_0}{\leftrightarrow} jk\omega_0 X[k] \\ -jtx(t) &\stackrel{FT}{\leftrightarrow} \frac{d}{d\omega} X(j\omega) \\ -jnx[n] &\stackrel{DFT}{\leftrightarrow} \frac{d}{d\Omega} X(e^{j\Omega}) \\ \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau &\stackrel{FT}{\leftrightarrow} \frac{1}{j\omega} X(j\omega) \\ \sum_{k=-\infty}^n x[k] &\stackrel{DFT}{\leftrightarrow} \frac{X(e^{j\Omega})}{1 - e^{-j\Omega}} \end{aligned}$$



Exemplo 3.28:

Determinar $x(t)$ dado:

$$X(j\omega) = j \frac{d}{d\omega} \left\{ \frac{e^{j2\omega}}{1 + j\omega/3} \right\}$$



Exercício 3.16:

Mostrar que a DTFT de

$$x[n] = ne^{j(\pi/8)n} \alpha^{n-3} u[n-3]$$

é dada por

$$X(j\omega) = j \frac{d}{d\omega} \left\{ \frac{e^{-j3(\Omega - \pi/8)}}{1 - \alpha e^{-j(\Omega - \pi/8)}} \right\} .$$



Convolução e Modulação

Das duas propriedades mais importantes de representações de Fourier são a Convolução e a Modulação. Uma forma de Modulação refere-se à multiplicação de dois sinais: um destes sinais muda, ou modula, a amplitude do outro sinal. Será apresentado que a Convolução no domínio tempo será transformada em Modulação no domínio frequência, e vice-versa.



Convolução Não-Periódica

Considere a convolução de dois sinais de tempo contínuo não-periódicos $x(t)$ e $h(t)$. Admitindo $y(t)$ como o sinal resultante da operação de convolução entre estes sinais, ou seja:

$$\begin{aligned} y(t) &= h(t) * x(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t - \tau) d\tau \end{aligned}$$



Convolução Não-Periódica

Reescrevendo $x(t - \tau)$ na forma

$$x(t - \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega(t-\tau)} d\omega$$

e substituindo esta expressão na integral de convolução anterior obtém-se:



Convolução Não-Periódica

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} e^{-j\omega\tau} d\omega d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \end{aligned}$$



Convolução Não-Periódica

Sendo

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

tem-se

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(j\omega) X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$



Convolução Não-Periódica

Logo, $y(t)$ é a transformada de Fourier inversa de

$$H(j\omega) X(j\omega)$$

ou seja

$$Y(j\omega) = H(j\omega) X(j\omega)$$

resultando em

$$\begin{aligned} y(t) &\stackrel{FT}{\leftrightarrow} Y(j\omega) \\ h(t) * x(t) &\stackrel{FT}{\leftrightarrow} H(j\omega) X(j\omega) \end{aligned}$$



Convolução Não-Periódica

Exemplo 3.29: Admitindo $x(t) = \frac{1}{\pi} \text{sen}(\pi t)$ e

$h(t) = \frac{1}{\pi} \text{sen}(2\pi t)$, determinar $y(t) = x(t) * h(t)$.

Exemplo 3.30: Use a propriedade da convolução para determinar $x(t)$, em

$$x(t) \stackrel{FT}{\leftrightarrow} X(j\omega) = \frac{4}{\omega^2} \text{sen}^2(\omega)$$



Convolução Não-Periódica

Exercício 3.17: Dada a resposta ao impulso de um sistema $h(t) = 2e^{-2t}u(t)$ com entrada $x(t) = 3e^{-t}u(t)$, determinar a saída $y(t)$.

Exemplo 3.31: Considere um sinal $y[n]$, como sendo um sinal $x[n]$, mais uma distorção na forma

$$y[n] = x[n] + \alpha x[n-1], |a| < 1$$

Determinar um sistema inverso que recupere o sinal original $x[n]$.



Convolução Não-Periódica

Exercício 3.18: Considere um sistema discreto cuja resposta ao impulso é

$$h[n] = \frac{1}{m} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}n\right).$$

Determinar a saída $y[n]$ às entradas:

a) $x[n] = \frac{1}{m} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{8}n\right)$ e b) $x[n] = \frac{1}{m} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}n\right)$.



Modulação Não-Periódica

Se $x(t)$ e $z(t)$ forem sinais não-periódicos, a transformada de Fourier do sinal $y(t) = x(t)z(t)$, produto dos sinais no tempo, será obtida admitindo que

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\nu)e^{j\nu t} d\nu$$

$$z(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Z(j\eta)e^{j\eta t} d\eta$$



Modulação Não-Periódica

Sendo assim, o produto $y(t) = x(t)z(t)$ pode ser escrito na forma:

$$y(t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\nu)Z(j\eta)e^{j(\nu+\eta)t} d\eta d\nu$$

Realiza-se então a seguinte mudança de variáveis, $\eta = \omega - \nu$. Reescrevendo a equação anterior, obtém-se



Modulação Não-Periódica

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\nu)Z(j(\nu-\omega))d\nu e^{j\omega t} d\omega$$

A integral interna de ν representa a convolução de $Z(j\omega)$ e $X(j\omega)$, enquanto a integral externa está na forma da representação de Fourier para $y(t)$, ou seja

$$y(t) = x(t)z(t) \stackrel{FT}{\leftrightarrow} \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * Z(j\omega).$$



Modulação Não-Periódica

Similarmente, se $x[n]$ e $z[n]$ forem sinais não periódicos de tempo discreto, a DTFT do produto $y[n] = x[n]z[n]$ será dada pela convolução de $X(e^{j\Omega})$ e $Z(e^{j\Omega})$, levando-se em conta a periodicidade dos sinais, portanto

$$y[n] = x[n]z[n] \stackrel{DTFT}{\leftrightarrow} Y(e^{j\Omega}) = \frac{1}{2\pi} X(e^{j\Omega}) \otimes Z(e^{j\Omega})$$

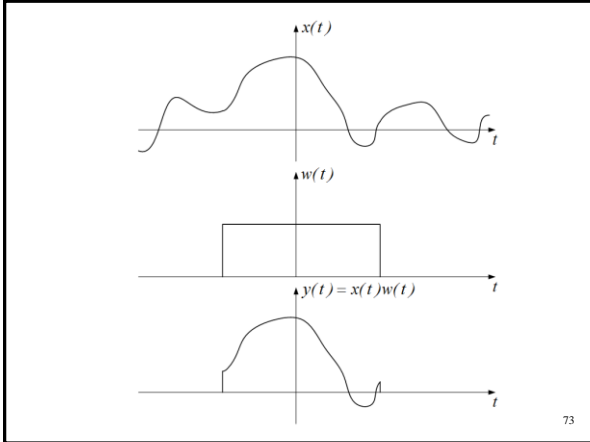


Modulação Não-Periódica

onde o símbolo \otimes denota convolução periódica, que deve ser realizada ao longo de um único período do sinal, isto é:

$$X(e^{j\Omega}) \otimes Z(e^{j\Omega}) = \int_{(2\pi)} X(e^{j\Omega}) \otimes Z(e^{j(\Omega-\theta)}) d\theta$$

Uma aplicação da propriedade da Modulação é o ajanelamento (*windowing*), que corresponde a visualizar o sinal através de uma janela.



73

Sistemas e Sinais
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Departamento de Engenharia Elétrica

Modulação Não-Periódica

Exercício 3.19: Utilize a propriedade da Modulação para encontrar a *FT* do sinal

$$x(t) = \frac{4}{(\pi t)^2} \sin^2(2t)$$

Propriedades das Representações de Fourier

74

Sistemas e Sinais
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Departamento de Engenharia Elétrica

Convolução para Sinais Periódicos

A Convolução periódica de dois sinais de tempo contínuo $x(t)$ e $z(t)$, com período fundamental igual a T , será definida como

$$y(t) = x(t) \otimes z(t) = \int_{(T)} x(\tau) z(t - \tau) d\tau$$

onde o símbolo \otimes denota que a integração é executada ao longo de um único período dos sinais envolvidos.

Propriedades das Representações de Fourier

75

Sistemas e Sinais
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Departamento de Engenharia Elétrica

Convolução para Sinais Periódicos

O sinal resultante $y(t)$ também é periódico com período T . Consequentemente, a série de Fourier é a representação apropriada para todos os três sinais envolvidos, logo:

$$y(t) = x(t) \otimes z(t) \stackrel{FS: 2\pi/T}{\leftrightarrow} Y[k] = TX[k]Z[k]$$

Propriedades das Representações de Fourier

76

Sistemas e Sinais
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Departamento de Engenharia Elétrica

Convolução para Sinais Periódicos

A convolução periódica para sinais de tempo discreto de duas seqüências $x[n]$ e $z[n]$ com período N é definida como

$$y[n] = x[n] \otimes z[n] = \sum_{k=(N)} x[k] z[n-k]$$

O sinal resultante $y[n]$ tem período N , de forma que a representação apropriada de todos os três sinais é dada por

$$y[n] = x[n] \otimes z[n] \stackrel{DFS: 2\pi/N}{\leftrightarrow} Y[k] = NX[k]Z[k]$$

77

Sistemas e Sinais
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Departamento de Engenharia Elétrica

Modulação para Sinais Periódicos

A propriedade da Modulação para sinais periódicos é análoga a de sinais não-periódicos, ou seja, a multiplicação de sinais no tempo corresponde à convolução das representações dos sinais em frequência. Para sinais de tempo contínuo tem-se

$$y(t) = x(t)z(t) \stackrel{FS: 2\pi/T}{\leftrightarrow} Y[k] = X[k] * Z[k]$$

onde

$$X[k] * Z[k] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} X[m]Z[k-m]$$

78



Modulação para Sinais Periódicos

é a convolução não-periódica dos coeficientes da *FS*. Todos os três sinais no domínio tempo tem o mesmo período fundamental T . Em tempo discreto

$$y[n] = x[n]z[n] \stackrel{DTFS: 2\pi/N}{\leftrightarrow} Y[k] = X[k] \otimes Z[k]$$

em que

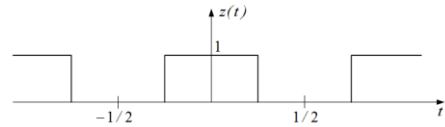
$$x[k] \otimes z[k] = \sum_{m=-N}^{N} X[m]Z[k-m]$$

é a convolução periódica dos coeficientes da *DTFS*. Novamente, todos os três sinais têm período fundamental N .



Convolução para Sinais Periódicos

Exemplo 3.33: Avalie a convolução periódica do sinal senoidal $x(t) = 2\cos(2\pi t) + \sin(4\pi t)$ com uma onda quadrada $z(t)$, de período igual a $T = 1$ s, apresentada na figura a seguir:



Convolução e Modulação

Exemplo 3.34: Determinar a transformada de Fourier do sinal:

$$x(t) = \frac{d}{dt} \left\{ (e^{-3t}u(t)) * (e^{-2t}u(t-2)) \right\}$$

Exercício 3.20: Determinar $x[n]$ dado

$$X(e^{j\Omega}) = \left(\frac{e^{-j3\Omega}}{1+1/2e^{-j\Omega}} \right) \otimes \left(\frac{\text{sen}(2\Omega/2)}{\text{sen}(\Omega/2)} \right)$$



Propriedades da Convolução e Modulação

Convolução	Modulação
$x(t) * z(t) \stackrel{FT}{\leftrightarrow} X(j\omega)Z(j\omega)$	$x(t)z(t) \stackrel{FT}{\leftrightarrow} \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * Z(j\omega)$
$x(t) \otimes z(t) \stackrel{FS: \omega_0}{\leftrightarrow} TX[k]Z[k]$	$x(t)z(t) \stackrel{FS: \omega_0}{\leftrightarrow} X[k] * Z[k]$
$x[n] * z[n] \stackrel{DTFT}{\leftrightarrow} X(e^{j\Omega})Z(e^{j\Omega})$	$x[n]z[n] \stackrel{DTFT}{\leftrightarrow} \frac{1}{2\pi} X(e^{j\Omega}) \otimes Z(e^{j\Omega})$
$x[n] \otimes z[n] \stackrel{DTFS: \Omega_0}{\leftrightarrow} NX[k]Z[k]$	$x[n]z[n] \stackrel{DTFS: \Omega_0}{\leftrightarrow} X[k] \otimes Z[k]$



Relações de Parseval

As relações de Parseval afirmam que a energia ou potência na representação de domínio tempo de um sinal é igual à representação de energia ou potência do mesmo sinal no domínio frequência. O resultado será apresentado para a *FT*, seguindo o mesmo procedimento para as outras três representações.



Relações de Parseval

A energia para um sinal não-periódico de tempo contínuo é:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

Uma vez que $x(t)$ pode ser complexo, $|x(t)|^2 = x(t)x^*(t)$, sendo $x^*(t)$ expresso em função da representação por *FT* como

$$x^*(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X^*(j\omega) e^{-j\omega t} d\omega$$



Relações de Parseval

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X^*(j\omega) e^{-j\omega t} d\omega dt$$

ou ainda

$$E_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X^*(j\omega) \underbrace{\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \right\}}_{X(j\omega)} d\omega$$

resultando em

$$E_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega .$$



Relações de Parseval

Sendo assim, a representação de energia no domínio tempo é igual à representação de energia no domínio frequência normalizada por 2π , ou seja:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$$

Relações de Parseval para as Quatro Representações de Fourier

$$FT \quad \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$$

$$FS \quad \frac{1}{T} \int_{(T)} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |X[k]|^2$$

$$DTFT \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{(2\pi)} |X(e^{j\Omega})|^2 d\Omega$$

$$DTFS \quad \frac{1}{N} \sum_{n=(N)} |x[n]|^2 = \sum_{k=(N)} |X[k]|^2$$



Relações de Parseval

Exemplo 3.35: Utilizar as relações de Parseval para avaliar

$$\chi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen}^2(Wn)}{\pi^2 n^2} .$$

Exercício 3.21: Utilize as relações de Parseval para avaliar

$$\chi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{|j\omega + 2|^2} d\omega .$$



Resposta em Frequência de Sistemas LTI

A resposta em frequência de um sistema LTI fornece a caracterização intuitiva do comportamento entrada-saída do sistema. Isto ocorre porque a convolução no domínio tempo transforma-se em multiplicação no domínio frequência. Sendo assim, a saída do sistema representada no domínio frequência é obtida multiplicando-se a representação em frequência do sinal de entrada pela resposta em frequência do sistema.



Resposta ao Impulso

Conforme visto anteriormente, a resposta ao impulso e a resposta em frequência de um sistema contínuo ou discreto constituem um par *FT* ou *DTFT*, respectivamente:

$$h(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} H(j\omega)$$

$$h[n] \overset{DTFT}{\leftrightarrow} H(e^{j\Omega})$$



Resposta em Frequência de Sistemas LTI

Para que as duas representações sejam possíveis, as condições de Dirichlet devem ser satisfeitas, especificamente aquela condição em que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$$

caracterizando a resposta ao impulso do sistema de tempo contínuo como absolutamente integrável.



Resposta ao Impulso

De forma análoga, para o caso de tempo discreto, a condição a ser satisfeita é

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$$

que caracteriza a resposta ao impulso do sistema como sendo absolutamente somável. Para ambos os casos, constata-se que a obtenção da resposta em frequência somente será possível se o sistema de interesse for ESTÁVEL.



Sendo assim, para o caso de sistemas de tempo contínuo tem-se a seguinte representação:

$$x(t) \rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

$$X(j\omega) \rightarrow \boxed{H(j\omega)} \rightarrow Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega)$$



Resposta em Frequência de Sistemas LTI

Ou ainda

$$y(t) = x(t) * h(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega)$$

para o caso de tempo contínuo, e

$$y[n] = x[n] * h[n] \overset{DTFT}{\leftrightarrow} Y(e^{j\Omega}) = H(e^{j\Omega})X(e^{j\Omega})$$

para o caso de tempo discreto.



Resposta em Frequência de Sistemas LTI

A multiplicação entre as representações do sinal e do sistema no domínio frequência auxilia no entendimento do processo de filtragem, ou seja, o sistema pode apresentar diferentes ponderações ao sinal de entrada em função da frequência.

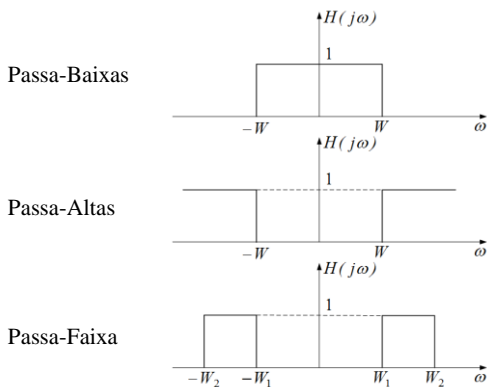


Filtro Passa-Baixas: Neste caso, o sistema atenua as frequências altas do sinal de entrada, deixando passar apenas as componentes de frequências mais baixas.

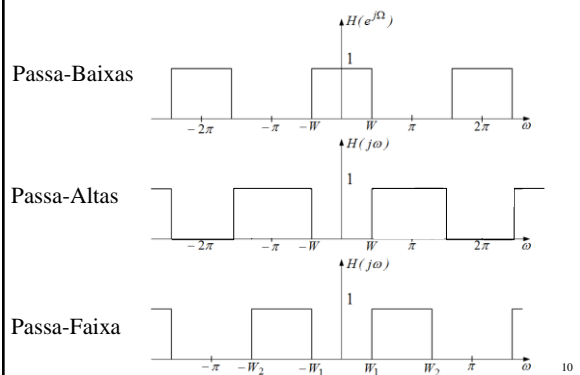
Filtro Passa-Altas: Neste caso, o sistema atenua as frequências baixas do sinal de entrada, deixando passar apenas as componentes de frequências mais altas.

Filtro Passa-Faixa: Neste caso, o sistema deixa passar sinais dentro de uma faixa de frequências, atenuando as componentes do sinal fora desta faixa.

Caso contínuo, resposta em frequência de filtros ideais.



Caso discreto, resposta em frequência de filtros ideais.



Para o caso de tempo discreto, a caracterização do filtro ocorrerá para a faixa de frequência $-\pi < \Omega < \pi$, conforme apresentado na figura anterior.

Ainda para o caso dos filtros, são definidos os seguintes termos:

Faixa de passagem: Intervalo de frequências que o filtro (sistema) permite que passe e estejam presentes no sinal de saída.



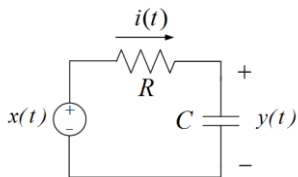
Faixa de Rejeição: Intervalo de frequências que são atenuadas pelo filtro (sistema).

Faixa de Transição: Diferentemente dos filtros ideais, entre as faixas de passagem e de rejeição existe um intervalo intermediário de frequências que compõe a faixa de frequências de transição.



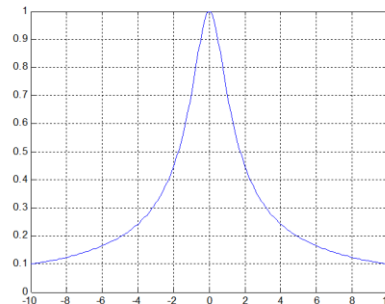
Exemplo 4.1:

Obter a resposta em frequência do circuito RC apresentado a seguir:



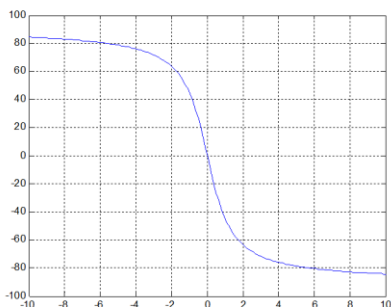
Resposta em Frequência de Sistemas LTI

Diagrama de Magnitude



Resposta em Frequência de Sistemas LTI

Diagrama de Fase



Resposta em Frequência de Sistemas LTI



Utilizando a propriedade da convolução no tempo e sua representação equivalente no domínio frequência tem-se

$$y(t) = x(t) * h(t) \xleftrightarrow{FT} Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega)$$

sendo então $H(j\omega)$ também determinado na forma

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}$$

Resposta em Frequência de Sistemas LTI



O mesmo ocorrendo para o caso de tempo discreto, ou seja

$$y[n] = x[n] * h[n] \xleftrightarrow{DTFT} Y(e^{j\Omega}) = H(e^{j\Omega})X(e^{j\Omega})$$

sendo então $H(e^{j\Omega})$ também determinado na forma

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{Y(e^{j\Omega})}{X(e^{j\Omega})}$$

Resposta em Frequência de Sistemas LTI



Exemplo 4.2:

Dado $x(t) = e^{-2t}u(t)$ e $y(t) = e^{-t}u(t)$ determinar a resposta em frequência e a resposta ao impulso do sistema resultante:

Resposta em Frequência de Sistemas LTI



Descrições por Equações Diferenciais e de Diferenças

A representação por equações diferenciais de um sistema LTI pode ser realizada na forma:

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k}{dt^k} y(t) = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k}{dt^k} x(t)$$



Utilizando a propriedade de diferenciação e sua representação no domínio frequência tem-se:

$$\frac{d}{dt} g(t) \stackrel{FT}{\leftrightarrow} j\omega G(j\omega)$$

Daí

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k}{dt^k} y(t) \stackrel{FT}{\leftrightarrow} \sum_{k=0}^N a_k (j\omega)^k Y(j\omega)$$

e

$$\sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k}{dt^k} x(t) \stackrel{FT}{\leftrightarrow} \sum_{k=0}^M b_k (j\omega)^k X(j\omega)$$



Desta forma, a resposta em frequência do sistema $H(j\omega)$ pode ser escrita como

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^N a_k (j\omega)^k}$$



De forma semelhante pode-se obter a função de resposta em frequência para sistemas de tempo discreto, ou seja:

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

Uma vez que pela propriedade do deslocamento no tempo

$$g[n-k] \stackrel{FT}{\leftrightarrow} e^{-jk\Omega} G(e^{j\Omega})$$



Pode-se reescrever a equação de diferenças com a sua representação no domínio frequência como

$$\sum_{k=0}^N a_k e^{-jk\Omega} Y(e^{j\Omega}) = \sum_{k=0}^M b_k e^{-jk\Omega} X(e^{j\Omega})$$

obtendo, a partir desta relação, a função $H(e^{j\Omega})$

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{Y(e^{j\Omega})}{X(e^{j\Omega})} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k e^{-jk\Omega}}{\sum_{k=0}^N a_k e^{-jk\Omega}}$$



Exemplo 4.3:

Determinar a resposta em frequência e a resposta ao impulso do sistema descrito pela seguinte equação diferencial:

$$\frac{d^2}{dt^2} y(t) + 3 \frac{d}{dt} y(t) + 2y(t) = 2 \frac{d}{dt} x(t) + x(t)$$



Exercício 4.1:

Determinar a resposta em frequência e a resposta ao impulso do sistema descrito pela seguinte equação de diferenças:

$$6y[n] + 5y[n - 1] + y[n - 2] = 18x[n] + 8x[n - 1]$$



Diagramas de Bode

- Introdução
- Diagramas de Bode
- Escala Logarítmica de Amplitude
- Escala Logarítmica de Frequência
- Análise dos Termos das Funções de Resposta em Frequência
- Composição do Diagrama de Bode



Diagramas de Bode

- ◆ Introduzido em 1940
- ◆ H.W. Bode
- ◆ Análise de Amplificadores Eletrônicos
 - Análise de sistemas de diferentes naturezas
 - Termos de primeira e segunda ordem
 - Traçado rápido e manual
 - Curvas de Magnitude $|H(j\omega)|$ e fase de $H(j\omega)$



Obtenção do Diagrama de Bode:

- ◆ Regime Permanente Senoidal
- ◆ Curva de Magnitude de $H(j\omega)$
 - Traçada em função da frequência escala log-log
- ◆ Curva de Fase de $H(j\omega)$
 - Traçada em função da frequência escala linear-log



Escala Logarítmica de Amplitude

- ◆ Eixo das ordenadas em Decibéis
 - Alexander Graham Bell
 - Relação de dois níveis de potência
 - Elementos Dissipativos
 - Relação quadrática entre as variáveis e os elementos




Exemplo:

- ◆ 100 rad/s
 - 2 oitavas (2^2) acima de 25 rad/s
- ◆ 100 rad/s
 - 3 décadas abaixo (10^{-3}) de 100.000 rad/s



$$\begin{array}{ccc}
 x(t) & \xrightarrow{\quad} & \boxed{h(t)} & \xrightarrow{\quad} & y(t) \\
 \\
 x(t) = A \operatorname{sen}(\omega t) & & & & y(t) = B \operatorname{sen}(\omega t + \phi) \\
 \\
 X(j\omega) & \xrightarrow{\quad} & \boxed{H(j\omega)} & \xrightarrow{\quad} & Y(j\omega) \\
 \\
 B = A |H(j\omega)| & & & & \\
 \phi = \arg\{H(j\omega)\} & & & &
 \end{array}$$

Sistemas e Sinais
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Departamento de Engenharia Elétrica




Razão Entre Amplitudes:

- ◆ Amplitude do Sinal de Saída - $|Y(j\omega)|$
- ◆ Amplitude do Sinal de Entrada - $|X(j\omega)|$

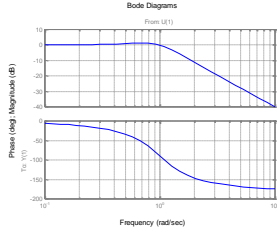
$$20 \log_{10} |H(j\omega)| = 20 \log_{10} \left(\frac{|Y(j\omega)|}{|X(j\omega)|} \right)$$

Diagramas de Bode 7

Sistemas e Sinais
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Departamento de Engenharia Elétrica




Exemplo de um Diagrama de Bode:



Diagramas de Bode 8

Sistemas e Sinais
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Departamento de Engenharia Elétrica



Exemplo:


$$H(j\omega) = \frac{j\omega + z}{j\omega + p}$$

$$|H(j\omega)| = \frac{\sqrt{\omega^2 + z^2}}{\sqrt{\omega^2 + p^2}}$$

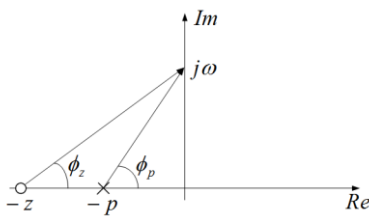
$$\phi = \text{atan}\left(\frac{\omega}{z}\right) - \text{atan}\left(\frac{\omega}{p}\right)$$

Diagramas de Bode 9

Sistemas e Sinais
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Departamento de Engenharia Elétrica




Exemplo - Representação Gráfica



Diagramas de Bode 10

Sistemas e Sinais
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Departamento de Engenharia Elétrica



Caso em que as raízes do numerador e do denominador de $H(j\omega)$ são reais e negativas.


$$|H(j\omega)| = |K| \frac{\prod_{i=1}^m \sqrt{z_i^2 + \omega^2}}{\prod_{j=1}^n \sqrt{p_j^2 + \omega^2}}$$

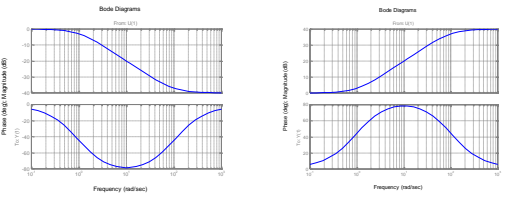
$$20 \log_{10} |H(j\omega)| = 20 \left(\log |K| + \sum_{i=1}^m \log_{10} \sqrt{z_i^2 + \omega^2} - \sum_{j=1}^n \log_{10} \sqrt{p_j^2 + \omega^2} \right)$$

$$\phi(H(j\omega)) = \sum_{i=1}^m \text{atan}\left(\frac{\omega}{z_i}\right) - \sum_{j=1}^n \text{atan}\left(\frac{\omega}{p_j}\right)$$

11

Sistemas e Sinais
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Departamento de Engenharia Elétrica



$$H(j\omega) = k \frac{j\omega + z}{j\omega + p}, \quad k = \frac{p}{z}$$


Diagramas de Bode 12



Resposta em Frequência

A forma mais comum de representação da resposta em frequência de um sistema é dada por uma função racional em $j\omega$, na forma

$$\begin{aligned} X(j\omega) &= \frac{b_m(j\omega)^M + b_{M-1}(j\omega)^{M-1} + \dots + b_1j\omega + b_0}{(j\omega)^N + a_{N-1}(j\omega)^{N-1} + \dots + a_1j\omega + a_0} \\ &= K \frac{\prod_{k=1}^M (j\omega - z_k)}{\prod_{k=1}^N (j\omega - p_k)} \end{aligned}$$

Diagrama de Bode

13



Resposta em Frequência

- z_k são as raízes do polinômio do numerador, denominados de *zeros finitos* de $X(j\omega)$.
- p_k são as raízes do polinômio do denominador de $X(j\omega)$, e são definidos como sendo os *polos* de $X(j\omega)$.
- a diferença entre os graus dos polinômios do denominador e do numerador, $N-M$, é definido como sendo o *grau relativo* de $X(j\omega)$.

Diagrama de Bode

14



Diagrama de Polos e Zeros

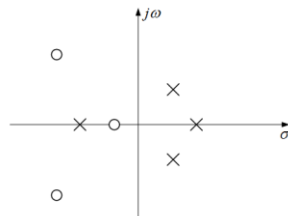


Diagrama de Bode

15



Análise dos Termos da Resposta em Frequência

$$H(j\omega) = K_o \frac{(j\omega\tau_{11} + 1)(j\omega\tau_{12} + 1) \dots (j\omega\tau_{1m} + 1)}{(j\omega\tau_{21} + 1)(j\omega\tau_{22} + 1) \dots (j\omega\tau_{2n} + 1)}$$

Uma vez que

$$\log_{10}[A \cdot B] = \log_{10}[A] + \log_{10}[B]$$

pode-se avaliar o efeito de cada um dos termos individualmente.

Diagramas de Bode

16



Primeira Classe de Termos

$$K_o(j\omega)^\gamma$$

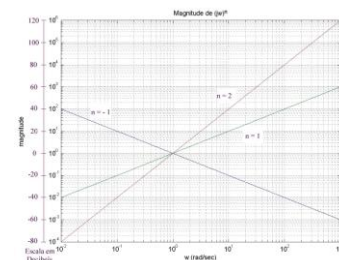
$$20 \log_{10} |K_o(j\omega)^\gamma| = 20 \log_{10} K_o + 20\gamma \log_{10} |j\omega|$$

Diagramas de Bode

17




Primeira Classe de Termos $K_o(j\omega)^\gamma$



18

Sistemas e Sinais
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Departamento de Engenharia Elétrica



Segunda Classe de Termos


$$(j\omega\tau + 1)^{\pm 1}$$

$$\omega\tau \ll 1, j\omega\tau + 1 \cong 1$$

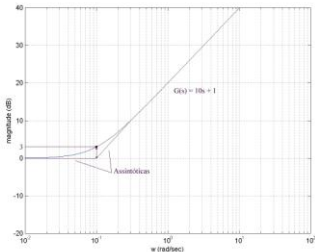
$$\omega\tau \gg 1, j\omega\tau + 1 \cong j\omega\tau$$

Diagramas de Bode 19

Sistemas e Sinais
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Departamento de Engenharia Elétrica




Segunda Classe de Termos $(j\omega\tau + 1)^{\pm 1}$

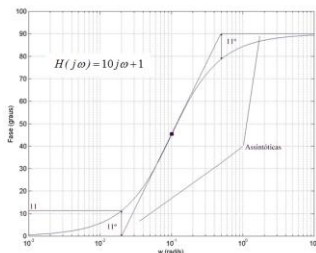


Diagramas de Bode 20

Sistemas e Sinais
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Departamento de Engenharia Elétrica




Segunda Classe de Termos – Curva de Fase



Diagramas de Bode 21

Sistemas e Sinais
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Departamento de Engenharia Elétrica




Exercício: Mostrar que para esta classe de termos

- No ponto de interseção das assintotas de baixa e alta frequências, assintotas diferem da curva real de magnitude em 3.0 dB, para o caso de termos do numerador e em -3.0 dB para o caso de termos do denominador.
- A curva assintótica tem contribuição de fase de 45° na frequência de cada raiz do numerador e de -45° na frequência de cada raiz do denominador, isto é, quando $\omega\tau = 1$
- As curvas real e assintótica diferem de +11° e -11° para $\omega\tau = 0.2$ e $\omega\tau = 5$, no caso de termos do denominador.
- Frequências uma década abaixo do ponto de quebra praticamente não exercem influência nas curvas de magnitude e fase.

Diagramas de Bode 22

Sistemas e Sinais
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Departamento de Engenharia Elétrica




Terceira Classe de Termos

$$\left[\left(\frac{j\omega}{\omega_n} \right)^2 + 2\xi \frac{j\omega}{\omega_n} + 1 \right]^{\pm 1}$$

$$H(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2 + 2\xi\omega_n(j\omega) + \omega_n^2}$$

Diagramas de Bode 23

Sistemas e Sinais
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Departamento de Engenharia Elétrica

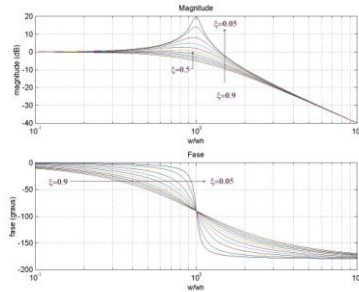


Características de Magnitude e de Fase

$$\omega \ll \omega_n, H(j\omega) \approx 1$$

$$\omega \gg \omega_n, H(j\omega) \approx \left(j \frac{\omega}{\omega_n} \right)^{\pm 2} \begin{cases} \pm 2 \times 20 \log \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right) \\ \pm 2 \times 90^\circ \end{cases}$$

Diagramas de Bode 24



25



Exercício 1: Considere um sistema com a seguinte resposta em frequência, com $0 < \xi < 1$

$$H(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2 + 2\xi\omega_n(j\omega) + \omega_n^2}$$

Obter as equações de magnitude e fase, justificando as curvas apresentadas anteriormente.

Diagramas de Bode

26

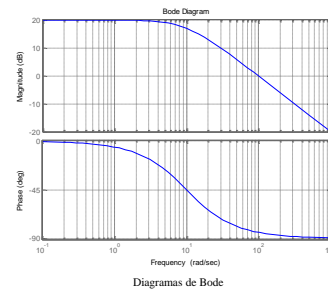


Exercício 2: Obtenha as equações de magnitude e de fase e trace os diagramas de Bode *assintótico* e *real* para um sistema com a seguinte resposta em frequência.

$$H(j\omega) = \frac{100}{j\omega + 10}$$

Diagramas de Bode

27



Diagramas de Bode

28

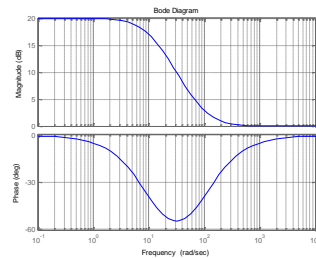


Exercício 3: Obtenha as equações de magnitude e de fase e trace os diagramas de Bode *assintótico* e *real* para um sistema com a seguinte resposta em frequência.

$$H(j\omega) = \frac{j\omega + 100}{j\omega + 10}$$

Diagramas de Bode

29



Diagramas de Bode

30

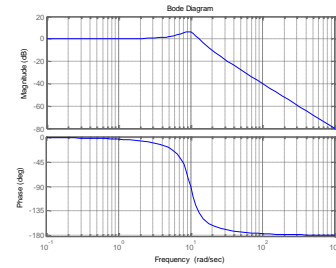


Exercício 4: Obtenha as equações de magnitude e de fase e trace os diagramas de Bode assintótico e real para um sistema com a seguinte resposta em frequência.

$$H(j\omega) = \frac{100}{(j\omega)^2 + 5(j\omega) + 100}$$

Diagramas de Bode

31



Diagramas de Bode

32



Para todos os exercícios apresentados a seguir, determinar o ganho DC, grau relativo e a expressão do sinal de saída $y(t)$, em regime permanente de operação, considerando como sinal de entrada do sistema

$$x(t) = 10 \operatorname{sen}(20t) + 5 \cos\left(100t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Diagramas de Bode

33

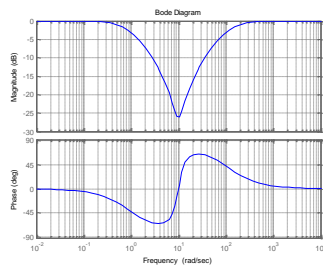


Exercício 5: Obtenha as equações de magnitude e de fase e trace os diagramas de Bode assintótico e real para um sistema com a seguinte resposta em frequência.

$$H(j\omega) = \frac{(j\omega)^2 + 5(j\omega) + 100}{(j\omega + 1)(j\omega + 100)}$$

Diagramas de Bode

34



Diagramas de Bode

35

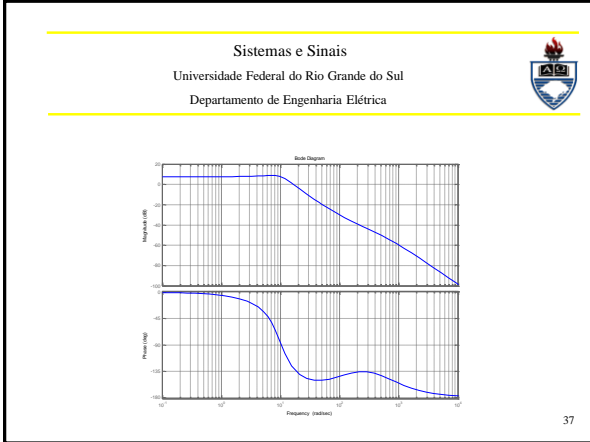


Exercício 6: Obtenha as equações de magnitude e de fase e trace os diagramas de Bode assintótico e real para um sistema com a seguinte resposta em frequência.

$$H(j\omega) = \frac{1200(j\omega + 120)}{[(j\omega)^2 + 10j\omega + 100](j\omega + 600)}$$

Diagramas de Bode

36



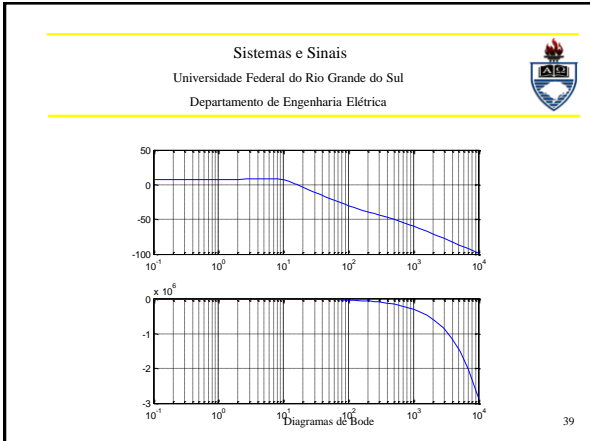
Sistemas e Sinais
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Departamento de Engenharia Elétrica

Exercício 7: Obtenha as equações de magnitude e de fase e trace os diagramas de Bode assintótico e real para um sistema com a resposta em frequência abaixo. Para este sistema, determine o sinal de entrada na forma $x(t) = A \text{sen}(\omega t)$ admitindo que o sinal de saída em regime permanente de operação é dado por

$$y(t) = 10 \text{sen}(\omega t - \frac{\pi}{2})$$

$$H(j\omega) = \frac{1200 e^{-j\omega 5} (j\omega + 120)}{[(j\omega)^2 + 10j\omega + 100](j\omega + 600)}$$

Diagramas de Bode 38

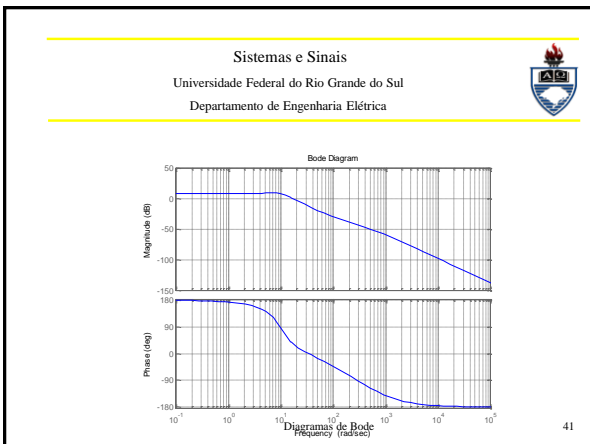


Sistemas e Sinais
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Departamento de Engenharia Elétrica

Exercício 8: Obtenha as equações de magnitude e de fase e trace os diagramas de Bode, assintótico e real para um sistema com a seguinte resposta em frequência.

$$H(j\omega) = \frac{1200(j\omega - 120)}{[(j\omega)^2 + 10j\omega + 100](j\omega + 600)}$$

Diagramas de Bode 40

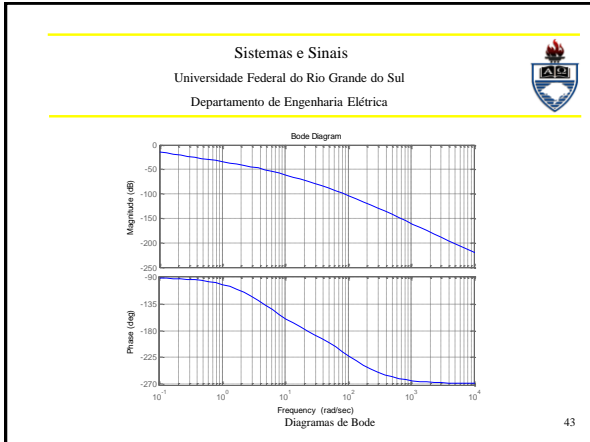


Sistemas e Sinais
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Departamento de Engenharia Elétrica

Exercício 9: Obtenha as equações de magnitude e de fase e trace os diagramas de Bode, assintótico e real para um sistema com a seguinte resposta em frequência.

$$H(j\omega) = \frac{10}{[(j\omega)^2 + 105j\omega + 500]j\omega}$$

Diagramas de Bode 42



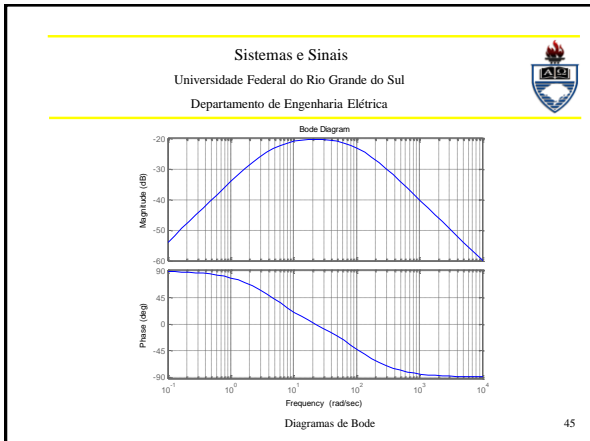
Sistemas e Sinais
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Departamento de Engenharia Elétrica

Exercício 10: Obtenha as equações de magnitude e de fase e trace os diagramas de Bode assintótico e real para um sistema com a seguinte resposta em frequência.

$$H(j\omega) = \frac{10j\omega}{(j\omega)^2 + 105j\omega + 500}$$

Diagramas de Bode

44



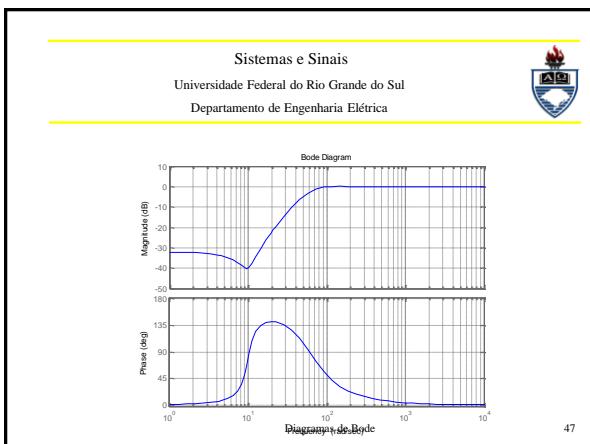
Sistemas e Sinais
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Departamento de Engenharia Elétrica

Exercício 11: Obtenha as equações de magnitude e de fase e trace os diagramas de Bode assintótico e real para um sistema com a seguinte resposta em frequência.

$$H(j\omega) = \frac{(j\omega)^2 + 4j\omega + 100}{(j\omega)^2 + 80j\omega + 4000}$$

Diagramas de Bode

46



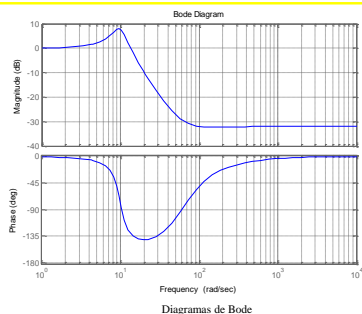
Sistemas e Sinais
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Departamento de Engenharia Elétrica

Exercício 12: Obtenha as equações de magnitude e de fase e trace os diagramas de Bode, assintótico e real para um sistema com a seguinte resposta em frequência.

$$H(j\omega) = \frac{\frac{1}{4000}(j\omega)^2 + \frac{1}{50}j\omega + 1}{\frac{1}{100}(j\omega)^2 + \frac{1}{25}j\omega + 1}$$

Diagramas de Bode

48



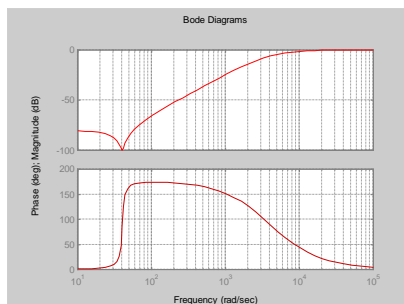
49



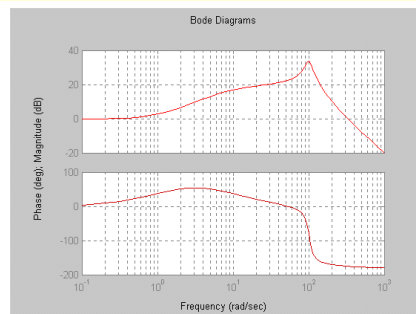
Exercício 13: Para os sistemas representados pelos diagramas de Bode apresentados a seguir, determinar suas respectivas funções resposta em frequência, justificando a escolha de cada um dos termos que as compõe.

Diagrams de Bode

50




51



52

Sistemas e Sinais
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Departamento de Engenharia Elétrica




Amostragem

- ↻ Representação com *FT* para Sinais Periódicos
- ↻ Relacionando a *FT* com a *FS*
- ↻ Amostragem
- ↻ Amostrando Sinais de Tempo Contínuo

Amostragem 1

Sistemas e Sinais
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Departamento de Engenharia Elétrica




Representação com *FT* para Sinais Periódicos

A representação de sinais periódicos no domínio frequência foi realizada empregando a *FS* e a *DTFS*, pois nem a *FT* nem a *DTFT* convergem para sinais periódicos. Porém, ao incorporar impulsos na *FT* e *DTFT* de maneira apropriada, pode-se obter representações destas transformadas para sinais periódicos.

Amostragem 2

Sistemas e Sinais
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Departamento de Engenharia Elétrica



Relacionando a *FT* com a *FS*


A representação de um sinal periódico $x(t)$ por *FS* é

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k] e^{jk\omega_0 t}$$

onde ω_0 é a frequência fundamental do sinal $x(t)$. Observa-se também que a *FT* inversa de um impulso deslocado em frequência, $\delta(\omega - k\omega_0)$, é uma senoide complexa com frequência $k\omega_0$, ou seja

Amostragem 3

Sistemas e Sinais
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Departamento de Engenharia Elétrica



Relacionando a *FT* com a *FS*


$$\frac{1}{2\pi} e^{jk\omega_0 t} \stackrel{FT}{\leftrightarrow} \delta(\omega - k\omega_0)$$

Desta forma, empregando a propriedade da linearidade da *FT*, obtém-se a representação em frequência do sinal $x(t)$ na forma

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k] e^{jk\omega_0 t} \stackrel{FT}{\leftrightarrow} X(j\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k] \delta(\omega - k\omega_0)$$

Amostragem 4

Sistemas e Sinais
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Departamento de Engenharia Elétrica




Relacionando a *FT* com a *FS*

Sendo assim, a transformada de Fourier de um sinal periódico é uma série de impulsos espaçados pela frequência fundamental ω_0 do sinal. O k -ésimo impulso tem intensidade $2\pi X[k]$, em que $X[k]$ é o k -ésimo coeficiente de Fourier do sinal.

Amostragem 5

Sistemas e Sinais
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Departamento de Engenharia Elétrica




Relacionando a *FT* com a *FS*

Exemplo 4.6: Determinar a representação por *FT* do sinal

$$x(t) = \cos \omega_0 t .$$

Amostragem 6

Sistemas e Sinais
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Departamento de Engenharia Elétrica




Relacionando a FT com a FS

Exemplo 4.7: Determinar a FT do trem de impulsos

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)$$

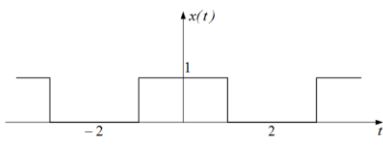
Amostragem 7

Sistemas e Sinais
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Departamento de Engenharia Elétrica




Relacionando a FT com a FS

Exercício 4.4: Determinar a representação por FT para a onda quadrada periódica descrita na figura abaixo:



Amostragem 8

Sistemas e Sinais
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Departamento de Engenharia Elétrica




Amostragem

A representação por FT de sinais de tempo discreto será utilizada para analisar o efeito de amostrar uniformemente um sinal. A operação de amostragem gera um sinal de tempo discreto a partir de um sinal de tempo contínuo. A amostragem de sinais de tempo contínuo muitas vezes é executada para manipular o sinal com um computador ou microprocessador, comuns em sistemas de comunicação, controle e processamento de sinais.

Amostragem 9

Sistemas e Sinais
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Departamento de Engenharia Elétrica




Amostrando Sinais de Tempo Contínuo

Seja $x(t)$ um sinal de tempo contínuo. Define-se $x[n]$ como um sinal de tempo discreto cujos valores são iguais aos do sinal $x(t)$ nas amostras em intervalos múltiplos inteiros de T_s ou seja, $x[n] = x[nT_s]$. O sinal de tempo contínuo relacionado a cada uma das amostras $x[n]$ pode ser escrito na forma:

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \delta(t - nT_s)$$

Amostragem 10

Sistemas e Sinais
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Departamento de Engenharia Elétrica



Amostrando Sinais de Tempo Contínuo

ou ainda $x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \delta(t - nT_s)$.

Uma vez que $x(t) \delta(t - nT_s) = x(nT_s) \delta(t - nT_s)$, tem-se


$$x_s(t) = x(t) p(t)$$

com

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)$$

Amostragem 11

Sistemas e Sinais
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Departamento de Engenharia Elétrica



Amostrando Sinais de Tempo Contínuo

Ou seja, representa-se matematicamente o sinal amostrado através do produto do sinal de tempo contínuo original por um trem de impulsos. Assim,

$$X_s(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * P(j\omega)$$

ou ainda

$$X_s(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * \frac{2\pi}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s)$$

Amostragem 12

Sistemas e Sinais
 Universidade Federal do Rio Grande do Sul
 Departamento de Engenharia Elétrica

Amostrando Sinais de Tempo Contínuo

onde $\omega_s = 2\pi / T_s$ é a frequência em que o sinal é amostrado. A convolução de $X(j\omega)$ com cada um dos impulsos deslocados resultará em

$$X_s(j\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(\omega - k\omega_s))$$

que é a soma infinita de versões deslocadas da FT do sinal original, espaçadas de ω_s .

Amostragem 13

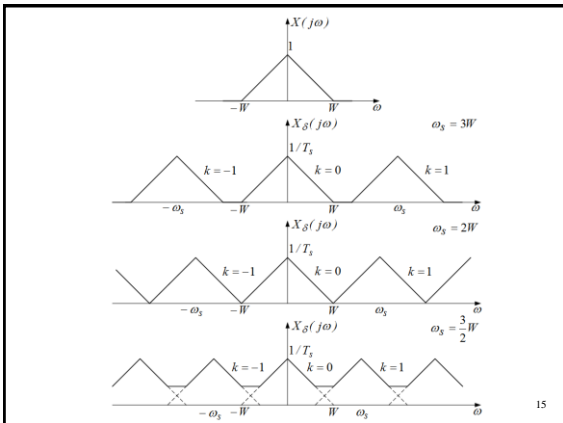
Sistemas e Sinais
 Universidade Federal do Rio Grande do Sul
 Departamento de Engenharia Elétrica

Amostrando Sinais de Tempo Contínuo

Se ω_s não for suficientemente grande em comparação com a extensão do espectro de $X(j\omega)$, poderá haver uma sobreposição dos espectros das versões deslocadas de $X(j\omega)$. A figura a seguir ilustra o efeito da amostragem considerando diferentes valores de ω_s . Assume-se que o espectro $X(j\omega)$ se situa dentro da faixa de frequências

$$-W < \omega < W$$

Amostragem 14



Sistemas e Sinais
 Universidade Federal do Rio Grande do Sul
 Departamento de Engenharia Elétrica

Aliasing

A superposição das réplicas deslocadas do espectro original é denominada de *aliasing*, que se refere ao fenômeno de um componente de alta frequência assumir a identidade de um de baixa frequência. Nestes casos, o espectro do sinal amostrado deixa de ter uma correspondência biunívoca com o sinal original, não sendo possível reconstruir de forma única o sinal de tempo contínuo original.

Amostragem 16

Sistemas e Sinais
 Universidade Federal do Rio Grande do Sul
 Departamento de Engenharia Elétrica

Aliasing

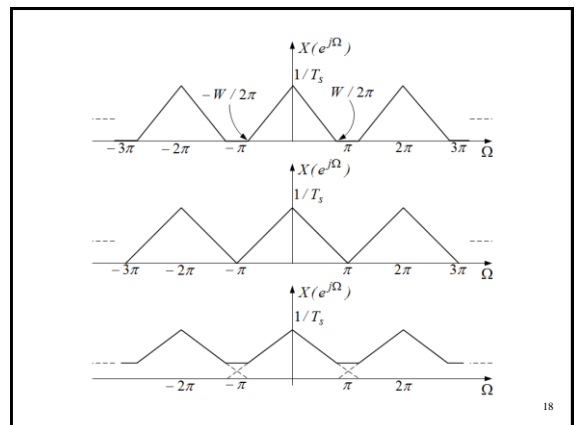
Evita-se o fenômeno do *aliasing* escolhendo um intervalo de amostragem T_s de forma que $\omega_s > 2W$, em que W representa a componente de frequência mais elevada do sinal, ou seja, satisfazendo a condição $T_s < \pi / W$.

A DTFT do sinal amostrado é obtida de $X_s(j\omega)$ usando-se a relação $\Omega = \omega T_s$, ou seja,

$$x[n] \overset{FT}{\leftrightarrow} X(e^{j\Omega}) = X_s(j\omega) \Big|_{\omega=\Omega/T_s}$$

Esta mudança de escala da variável independente implica $\omega = \omega_s$ corresponder a $\Omega = 2\pi$.

17



Sistemas e Sinais

Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Departamento de Engenharia Elétrica

Amostrando Sinais de Tempo Contínuo


Exemplo 4.13: Considere o efeito de extrair amostras do sinal senoidal

$$x(t) = \cos(\pi t)$$

Determinar a FT do sinal amostrado para os seguintes períodos de amostragem:

$$(a)T_s = 1/4 \text{ s}, (b)T_s = 1 \text{ s}, (c)T_s = 3/2 \text{ s}$$

Sistemas e Sinais
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Departamento de Engenharia Elétrica




Reconstrução de Sinais de Tempo Contínuo

- ↻ Teorema da Amostragem
- ↻ Reconstrução Ideal
- ↻ Reconstrução Prática – Retentor de Ordem Zero
- ↻ Filtro Anti-Imagem

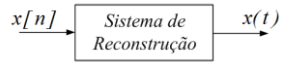
Reconstrução de Sinais de Tempo Contínuo a partir de Amostras 1

Sistemas e Sinais
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Departamento de Engenharia Elétrica




Reconstrução de Sinais de Tempo Contínuo

O problema de se reconstruir um sinal de tempo contínuo a partir de amostras envolve uma combinação de sinais de tempo contínuo e discreto. Um sistema que executa esta operação tem um sinal de entrada de tempo discreto e um sinal de saída de tempo contínuo.



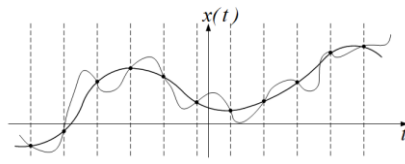
Reconstrução de Sinais de Tempo Contínuo a partir de Amostras 2

Sistemas e Sinais
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Departamento de Engenharia Elétrica




Teorema da Amostragem

Amostras de um sinal nem sempre determinam de maneira única o sinal de tempo contínuo correspondente.



Reconstrução de Sinais de Tempo Contínuo a partir de Amostras 3

Sistemas e Sinais
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Departamento de Engenharia Elétrica




Teorema da Amostragem

Apenas com o conhecimento das amostras de um sinal não é possível determinar o comportamento do sinal entre as amostras. Uma forma de minimizar este problema ocorre quando o sinal a ser amostrado apresenta transições suaves entre as amostras. A “suavidade”, ou taxa com o qual o sinal no domínio do tempo varia está diretamente relacionada com a frequência máxima presente no sinal.

Reconstrução de Sinais de Tempo Contínuo a partir de Amostras 4

Sistemas e Sinais
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Departamento de Engenharia Elétrica




Teorema da Amostragem

Para reconstruir de maneira única um sinal de tempo contínuo a partir de suas amostras, deve haver uma correspondência única entre as FTs do sinal de tempo contínuo e o sinal amostrado. Estas FTs se relacionam de forma única se o processo de amostragem não introduzir “aliasing”. Tal exigência é formalmente estabelecida da seguinte maneira:

Reconstrução de Sinais de Tempo Contínuo a partir de Amostras 5

Sistemas e Sinais
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Departamento de Engenharia Elétrica




Teorema da Amostragem

Teorema da Amostragem: Admite-se que $x(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} X(j\omega)$ represente um sinal de faixa limitada, de forma que $X(j\omega) = 0$ para $|\omega| > \omega_m$. Se $\omega_s > 2\omega_m$, em que $\omega_s = 2\pi/T_s$ e ω_m é a máxima frequência presente no sinal, então $x(t)$ é determinado de maneira única por suas amostras $x(nT_s)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

Reconstrução de Sinais de Tempo Contínuo a partir de Amostras 6

Sistemas e Sinais
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Departamento de Engenharia Elétrica




Teorema da Amostragem

A frequência mínima de amostragem, $\omega_s > 2\omega_m$, é muitas vezes denominada de taxa de amostragem de Nyquist. Em muitas situações é conveniente expressar a frequência de amostragem em Hertz. Assim $f_m = \omega_m / 2\pi$ e $f_s > 2f_m$ satisfazem o teorema da amostragem, sendo que $f_s = 1/T_s$.

Reconstrução de Sinais de Tempo Contínuo a partir de Amostras 7

Sistemas e Sinais
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Departamento de Engenharia Elétrica




Teorema da Amostragem

Exemplo 4.14: Dado $x(t) = \text{sen}(10\pi t) / \pi$, determinar o máximo valor de T_s de forma que $x(t)$ seja representado de maneira única pela sequência de tempo discreto $x[n] = x(nT_s)$.

Reconstrução de Sinais de Tempo Contínuo a partir de Amostras 8

Sistemas e Sinais
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Departamento de Engenharia Elétrica



Teorema da Amostragem


Exercício 4.12: Determinar as condições no intervalo T_s de forma que o sinal

$$x(t) = \cos(2\pi t) \text{sen}(\pi t) / \pi + 3 \text{sen}(6\pi t) \text{sen}(2\pi t) / \pi$$

seja representado de forma única pela sequência de tempo discreto $x[n] = x(nT_s)$.

Reconstrução de Sinais de Tempo Contínuo a partir de Amostras 9

Sistemas e Sinais
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Departamento de Engenharia Elétrica




Filtros anti-aliasing

No caso em que existe o interesse somente em componentes de baixas frequências do sinal, pode-se empregar um filtro passa-baixas de tempo contínuo antes de amostrar o sinal. Tais filtros são denominados de *filtros anti-aliasing* e são determinados com base nas frequências de interesse do sinal e na frequência com que se pretende amostrar o sinal.

Reconstrução de Sinais de Tempo Contínuo a partir de Amostras 10

Sistemas e Sinais
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Departamento de Engenharia Elétrica



Reconstrução Ideal


Considera-se agora o problema de reconstruir o sinal de tempo contínuo a partir de amostras. Seja

$$X_\delta(j\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j\omega - jk\omega_s)$$

a representação em frequência do sinal $x(t)$ amostrado de forma impulsiva.

Reconstrução de Sinais de Tempo Contínuo a partir de Amostras 11

Sistemas e Sinais
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Departamento de Engenharia Elétrica

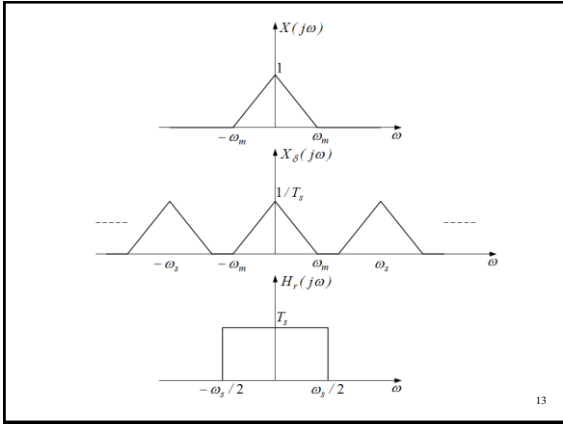


Reconstrução Ideal

A operação de reconstrução é tal que $X_\delta(j\omega)$ seja convertido novamente em $X(j\omega)$, eliminando réplicas de $X(j\omega)$ que aparecem nas frequências $k\omega_s$. Tal operação pode ser realizada multiplicando-se $X_\delta(j\omega)$ por $H_r(j\omega)$, em que

$$H_r(j\omega) = \begin{cases} T_s, & |\omega| \leq \omega_s / 2 \\ 0, & |\omega| > \omega_s / 2 \end{cases}$$

Reconstrução de Sinais de Tempo Contínuo a partir de Amostras 12



13

Sistemas e Sinais
 Universidade Federal do Rio Grande do Sul
 Departamento de Engenharia Elétrica

Reconstrução Ideal

Observa-se que as condições do Teorema da Amostragem devem ser satisfeitas para que possa ocorrer a recuperação do sinal $X(j\omega)$. Uma vez que a multiplicação no domínio frequência transforma-se em convolução no domínio tempo tem-se

$$X(j\omega) = X_\delta(j\omega)H_r(j\omega) \Rightarrow x(t) = x_\delta(t) * h_r(t)$$

onde $h_r(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} H(j\omega)$.

Reconstrução de Sinais de Tempo Contínuo a partir de Amostras

14

Sistemas e Sinais
 Universidade Federal do Rio Grande do Sul
 Departamento de Engenharia Elétrica

Reconstrução Ideal

Logo:

$$x(t) = h_r(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\delta(t - nT_s)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]h_r(t - nT_s)$$

Reconstrução de Sinais de Tempo Contínuo a partir de Amostras

15

Sistemas e Sinais
 Universidade Federal do Rio Grande do Sul
 Departamento de Engenharia Elétrica

Reconstrução Ideal

Uma vez que $h_r(t) = \frac{T_s \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega_s t}{2}\right)}{\pi}$

reescreve-se o sinal $x(t)$ na forma:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega_s}{2\pi}(t - nT_s)\right)$$

Reconstrução de Sinais de Tempo Contínuo a partir de Amostras

16

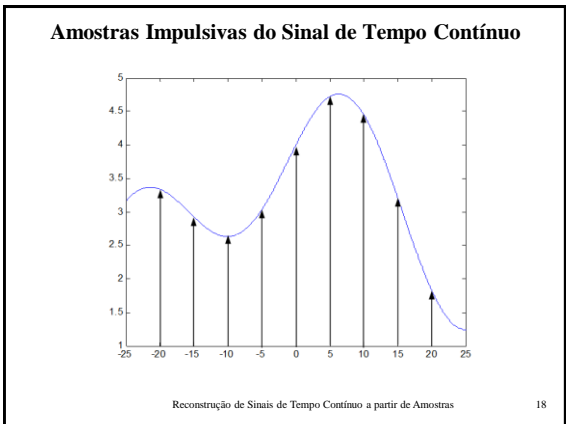
Sistemas e Sinais
 Universidade Federal do Rio Grande do Sul
 Departamento de Engenharia Elétrica

Reconstrução Ideal

Ou seja, no domínio do tempo, o sinal é reconstruído através da soma ponderada de funções “sinc” deslocadas pelo período de amostragem, com os pesos de cada uma das funções correspondendo aos valores da sequência de tempo discreto em cada um dos instantes de amostragem.

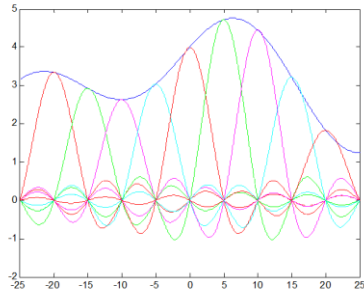
Reconstrução de Sinais de Tempo Contínuo a partir de Amostras

17



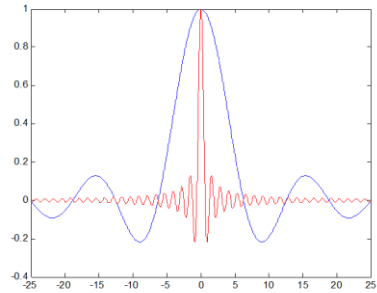
18

Aproximação pela Soma Ponderada de Funções Sinc



Reconstrução de Sinais de Tempo Contínuo a partir de Amostras

Relação entre Largura de Faixa do Filtro de Janela com a Função Sinc



Reconstrução Ideal

O valor de $x(t)$ em $t = nT_s$ é igual a $x[n]$ porque todas as outras funções sinc deslocadas cruzam por zero em $t = nT_s$, exceto a n -ésima, e seu valor é $x[n]$. O valor de $x(t)$ entre múltiplos inteiros de T_s é determinado a partir de todos os valores da sequência $x[n]$.

Reconstrução de Sinais de Tempo Contínuo a partir de Amostras



Reconstrução Ideal

A operação descrita por

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega_s}{2\pi}(t - nT_s)\right)$$

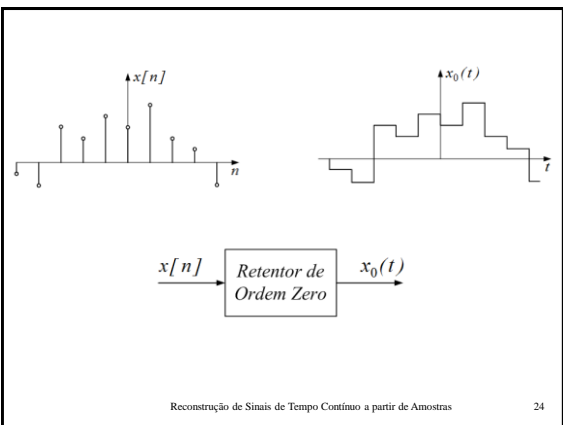
é denominada de *interpolação ideal limitada em faixa*. Praticamente este interpolador não pode ser implementado pois representa um sistema não-causal, ou seja, a saída $x(t)$ depende de valores passados e futuros de $x[n]$. Além disso, a influência de cada amostra estende-se ao longo de um intervalo infinito de tempo.



Reconstrução Prática – Retentor de Ordem Zero


A reconstrução prática de sinais de tempo contínuo muitas vezes é implementada com um dispositivo conhecido como retentor de ordem zero, o qual mantém o valor de $x[n]$ durante T_s segundos.

Reconstrução de Sinais de Tempo Contínuo a partir de Amostras



Reconstrução de Sinais de Tempo Contínuo a partir de Amostras

Sistemas e Sinais
 Universidade Federal do Rio Grande do Sul
 Departamento de Engenharia Elétrica




Reconstrução Prática – Retentor de Ordem Zero

Sendo assim, o sinal $x_0(t)$ caracteriza-se por uma aproximação em degraus do sinal de tempo contínuo $x(t)$. O retentor de ordem zero é representado matematicamente como a soma ponderada de pulsos retangulares deslocados de múltiplos inteiros do intervalo de amostragem.

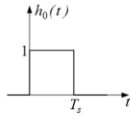
$$h_0(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < T_s \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Reconstrução de Sinais de Tempo Contínuo a partir de Amostras 25

Sistemas e Sinais
 Universidade Federal do Rio Grande do Sul
 Departamento de Engenharia Elétrica



Reconstrução Prática – Retentor de Ordem Zero




O sinal de saída do retentor de ordem zero, expresso em função de $h_0(t)$ é dado por

$$x_0(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] h_0(t - nT_s)$$

Reconstrução de Sinais de Tempo Contínuo a partir de Amostras 26

Sistemas e Sinais
 Universidade Federal do Rio Grande do Sul
 Departamento de Engenharia Elétrica



Reconstrução Prática – Retentor de Ordem Zero


Ou ainda $x_0(t) = h_0(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \delta(t - nT_s)$
 $= h_0(t) * x_\delta(t)$

sendo $h_0(t) * x_\delta(t) \xleftrightarrow{FT} H_0(j\omega) X_\delta(j\omega)$

com $h_0(t) \xleftrightarrow{FT} H_0(j\omega) = 2e^{-j\omega T_s/2} \frac{\text{sen}\left(\omega \frac{T_s}{2}\right)}{\omega}$

Reconstrução de Sinais de Tempo Contínuo a partir de Amostras 27

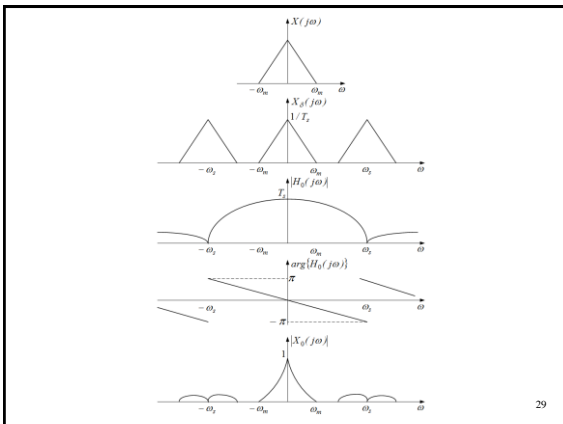
Sistemas e Sinais
 Universidade Federal do Rio Grande do Sul
 Departamento de Engenharia Elétrica




Efeitos da Retenção de Ordem Zero

1. Defasamento linear correspondente ao atraso de $T_s/2$ segundos;
2. A parte de $X_\delta(j\omega)$ entre $-\omega_m$ e ω_m é distorcida pela curvatura do lóbulo principal de $H_0(j\omega)$;
3. Versões distorcidas e atenuadas de $X(j\omega)$ permanecem centralizadas em múltiplos diferentes de zero de ω_s .

Reconstrução de Sinais de Tempo Contínuo a partir de Amostras 28



Sistemas e Sinais
 Universidade Federal do Rio Grande do Sul
 Departamento de Engenharia Elétrica




Filtro Anti-Imagem

Em algumas aplicações as modificações associadas ao efeito do elemento de retenção de ordem zero são aceitáveis. Em outras faz-se necessário um processamento adicional de $x_0(t)$ de forma a minimizar os efeitos da retenção de ordem zero. Desta forma pode-se utilizar um filtro com as seguintes características:

$$H_c(j\omega) = \begin{cases} \frac{\omega T_s}{2 \text{sen}(\omega T_s/2)}, & |\omega| \leq \omega_m \\ 0, & |\omega| > \omega_s - \omega_m \end{cases}$$

30

Sistemas e Sinais
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Departamento de Engenharia Elétrica




Filtro Anti-Imagem

- $|\omega| \leq \omega_m$ O filtro compensa a distorção introduzida pelo lóbulo principal de $H_0(j\omega)$;
- $|\omega| > \omega_s - \omega_m$ O filtro remove a energia de $X_0(j\omega)$ centralizada em múltiplos diferentes de zero de ω_s .

Na faixa de frequência em que $\omega_m < |\omega| < \omega_s - \omega_m$, $H_c(j\omega)$ não interfere pois $X_0(j\omega)$ é nulo.

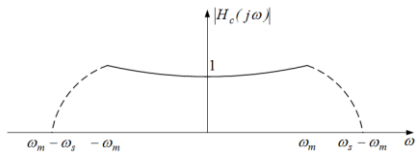
Reconstrução de Sinais de Tempo Contínuo a partir de Amostras 31

Sistemas e Sinais
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Departamento de Engenharia Elétrica

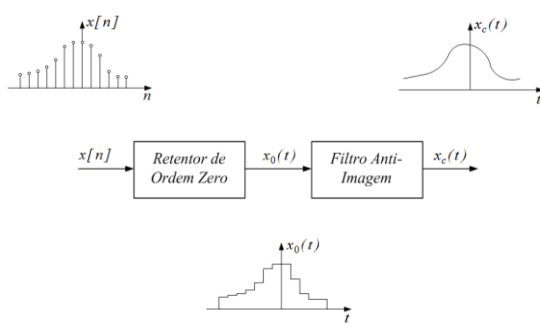


Filtro Anti-Imagem

Tal filtro é denominado de filtro anti-imagem porque elimina as imagens distorcidas de $X(j\omega)$.




Reconstrução de Sinais de Tempo Contínuo a partir de Amostras 32



Reconstrução de Sinais de Tempo Contínuo a partir de Amostras 33

Sistemas e Sinais
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Departamento de Engenharia Elétrica




Filtro Anti-Imagem

Em muitos casos a fase linear na faixa de passagem, $|\omega| \leq \omega_m$ é aceitável uma vez que a distorção de fase linear corresponde a um retardo adicional. A dificuldade de aproximar $|H_c(j\omega)|$ depende da separação entre ω_m e $\omega_s - \omega_m$. Se a distância for grande a curvatura do lóbulo principal de $H_0(j\omega)$ será pequena e uma aproximação muito boa será obtida para $|H_c(j\omega)| = 1$.

Reconstrução de Sinais de Tempo Contínuo a partir de Amostras 34

Sistemas e Sinais
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Departamento de Engenharia Elétrica



Filtro Anti-Imagem

Na faixa $\omega_m < \omega < \omega_s - \omega_m$ ocorre a transição da faixa de passagem para a faixa de rejeição. Se $\omega_s - 2\omega_m$ for grande, a faixa de transição será grande, facilitando o projeto do filtro. Conseqüentemente, as exigências de um filtro anti-imagem são significativamente menores escolhendo-se T_s suficientemente pequeno, tipicamente $\omega_s \gg 2\omega_m$.

Reconstrução de Sinais de Tempo Contínuo a partir de Amostras 35