Representação de Fourier para Sinais

A representação de Fourier para sinais é realizada através da soma ponderada de funções senoidais complexas. Se este sinal for aplicado a um sistema LTI, a saída do sistema será uma superposição ponderada das respostas do sistema a cada uma das senoides complexas que compõe o sinal de entrada, procedimento similar àquele realizado para somatória ponderada dos impulsos para a integral de convolução.

Representação de Fourier para Sinais

O estudo de sinais e sistemas, usando representações senoidais é denominado de análise de Fourier em homenagem a *Joseph Fourier* (1768-1830), por sua contribuição à teoria de representação de funções através da soma ponderada de senoides complexas.

Senoides Complexas e Sistemas LTI

A entrada de uma senoide complexa em um sistema LTI gera, *em estado estacionário*, uma saída igual à entrada senoidal multiplicada pela resposta em frequência do sistema, ou seja:

$$y[n] = H(e^{j\Omega})e^{j\Omega n}$$

Senoides Complexas e Sistemas LTI

Tal relação é obtida através do equacionamento da resposta senoidal do sistema em estado estacionário. Para isso será avaliada a convolução de um sistema de tempo discreto com a resposta ao impulso *h[n]* e uma entrada do tipo senoidal complexa de amplitude unitária $x[n] = e^{j\Omega n}$, dada por:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]$$

Senoides Complexas e Sistemas LTI

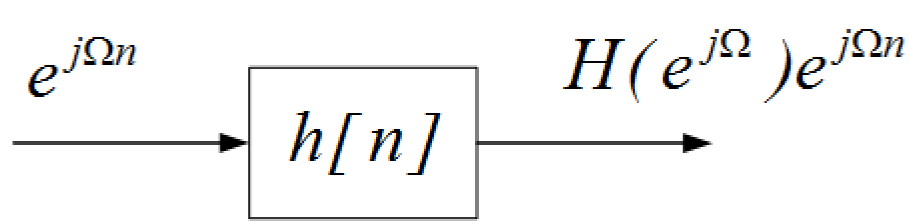
$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{j\Omega(n-k)}$$

ou ainda

$$y[n] = e^{j\Omega n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{-j\Omega k} = H(e^{j\Omega}) e^{j\Omega n}$$

Senoides Complexas e Sistemas LTI

Consequentemente, a saída do sistema é caracterizada por uma senoide complexa multiplicada pelo termo $H(e^{j\Omega})$, definido como resposta em frequência do sistema.



Senoides Complexas e Sistemas LTI

Para o caso contínuo obtém-se um resultado análogo onde

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{j\omega(t-\tau)}d\tau$$

$$y(t) = e^{j\omega t}\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau := H(j\omega)e^{j\omega t}$$

Senoides Complexas e Sistemas LTI

Por definição

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

será denominada de resposta em frequência do sistema *H*.

Autofunções

A fim de apresentar o conceito de autofunção será considerado inicialmente o problema do autovalor, em que

$$(\lambda I - A)\underline{v} = \underline{0}$$

Tal identidade será satisfeita de forma trivial, se $\underline{v} = \underline{0}$. Se a matriz $(\lambda I - A)$ for não-singular, ou seja, se $|\lambda I - A| \neq 0$ somente $\underline{v} = \underline{0}$ satisfaz a identidade $(\lambda I - A)\underline{v} = \underline{0}$.

Autofunções

Se $|\lambda I - A| = 0$, ou seja, se λ for uma raiz de $|\lambda I - A| = 0$, a matriz $(\lambda I - A)$ será singular e a equação $(\lambda I - A)\underline{v} = \underline{0}$ será satisfeita para $\underline{v} \neq \underline{0}$, e neste caso

$$A\underline{v} = \lambda \underline{v}$$

sendo λ definido como um autovalor da matriz A associado a um autovetor $\underline{v}$, tal que a relação anterior seja satisfeita.

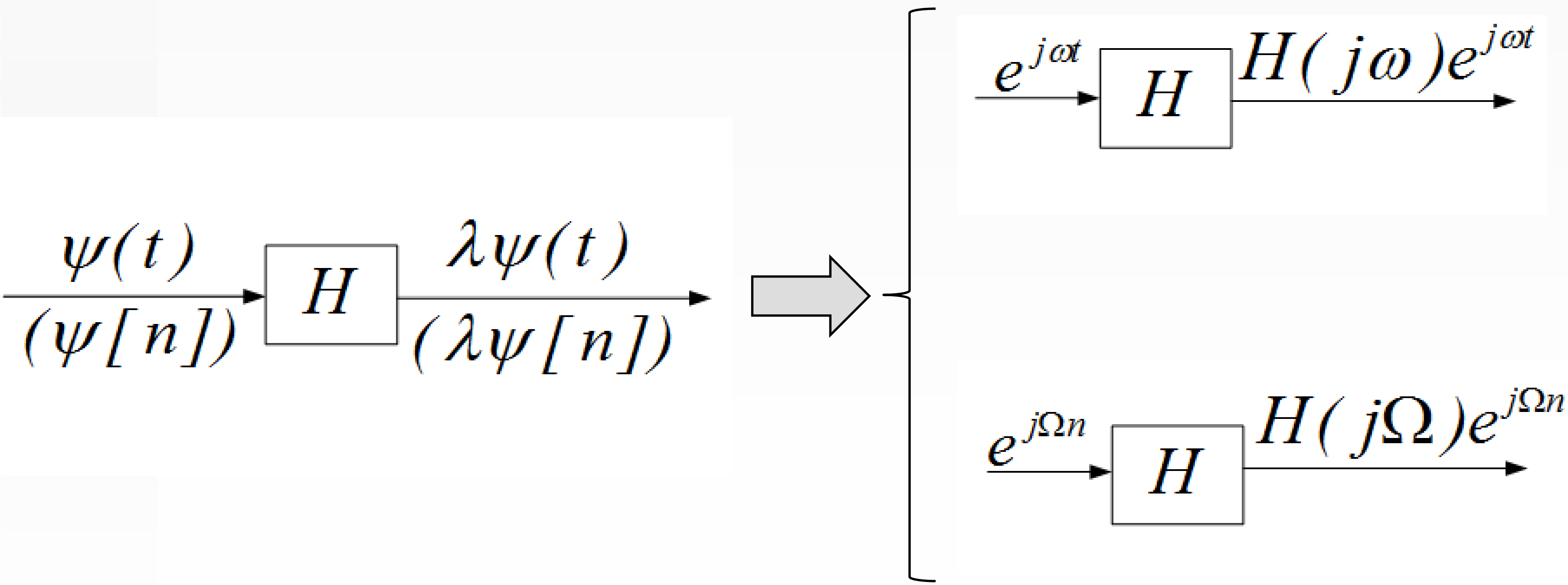
Autofunções

Para o caso relacionado com resposta em frequência de um dado sistema *H*, $\psi(t)=e^{j\omega t}$ será definida como uma autofunção do sistema *H*, pois

$$H\{e^{j\omega t}\}=H(j\omega)e^{j\omega t}$$

ou ainda $H\{\psi(t)\}=\lambda\psi(t)\ com\ \lambda:=H(j\omega)$ sendo λ o autovalor associado à autofunção $\psi(t)$.

Autofunções



Autofunções

Sinais que são autofunções de sistemas desempenham um papel importante na teoria de sistemas, pois possibilitam a representação de sinais arbitrários como superposição ponderada de autofunções, transformando a operação de convolução em multiplicação. Considere o sinal *x(t)*

$$x(t) = \sum_{k=1}^{M} a_k e^{j\omega_k t} \quad .$$

Autofunções

Se $e^{j\omega_k t}$ for uma autofunção do sistema com autovalor $H(j\omega_k)$, então cada termo do sinal de entrada $a_k e^{j\omega_k t}$ produz um termo na saída $a_k H(j\omega_k)e^{j\omega_k t}$, sendo assim

$$y(t) = \sum_{k=1}^{M} a_k H(j\omega_k)e^{j\omega_k t} \quad .$$

Representação de Fourier para 4 Classes de Sinais

Propriedade de Tempo	*Periódico*	*Não – Periódico*
Contínuo	*Série de Fourier (FS)*	*Transformada de Fourier (FT)*
Discreto	*FS de Tempo Discreto*	*FT de Tempo Discreto*

Ortogonalidade de Senoides Complexas

Diz-se que dois sinais são ortogonais se seus produtos internos forem zero. Para sinais periódicos de tempo discreto $\Phi_k[n]$ e $\Phi_m[n]$, sinais com período *N*, será avaliado o produto interno definido por

$$I_{k,m} = \sum_{n=\langle N \rangle} \Phi_k[n] \Phi_m^*[n]$$

sendo que * denota o complexo conjugado do sinal.

Ortogonalidade de Senoides Complexas

Admitindo que $\Phi_k[n] = e^{jk\Omega_0 n}$ e $\Phi_m[n] = e^{jm\Omega_0 n}$, representam senoides complexas de frequência $k\Omega_0$ e $m\Omega_0$ respectivamente

$$I_{k,m} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j(k-m)\Omega_0 n} = \sum_{n=\langle N \rangle} \Phi_k[n]\Phi_m^*[n]$$

sendo $\Omega_0 = 2\pi / N$.

Ortogonalidade de Senoides Complexas

Portanto

$$I_{k,m} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j(k-m)\Omega_0 n} = \begin{cases} N, \ k = m \\ \dfrac{1 - e^{j(k-m)2\pi}}{1 - e^{j(k-m)\Omega_0}} \end{cases}$$

sendo $e^{j(k-m)2\pi} = 1 \ \forall \ k, m \in Z$, resultando em $\dfrac{1 - e^{j(k-m)2\pi}}{1 - e^{j(k-m)\Omega_0}} = 0$

(supondo que k e m sejam restritos a um intervalo de N valores consecutivos).

Ortogonalidade de Senoides Complexas

Para o caso contínuo tem-se uma situação análoga àquela apresentada para o caso discreto, ou seja

$$I_{k,m} = \int_0^T \Phi_k(t)\Phi_m^*(t)\,dt$$

sendo $\Phi_k(t) = e^{jk\omega_0 t}$ e $\Phi_m(t) = e^{jm\omega_0 t}$ senoides complexas com frequências $k\omega_0$ e $m\omega_0$ respectivamente.

Ortogonalidade de Senoides Complexas

Sendo assim tem-se

$$I_{k,m} = \int_0^T e^{j(k-m)\omega_0 t}\, dt \;.$$

Para o caso em que *k*=*m*, resulta em

$$I_{k,m} = \int_0^T dt = T \;.$$

Ortogonalidade de Senoides Complexas

Para o caso em que $k \neq m$

$$I_{k,m} = \int_0^T e^{j(k-m)\omega_0 t}\, dt = \frac{1}{j(k-m)\omega_0}\left(e^{j(k-m)2\pi} - 1\right)$$

sendo $e^{j(k-m)2\pi} = 1 \;\forall\, k, m \in Z$, logo $I_{k,m} = 0 \;\forall\, k \neq m$.

Sinais Periódicos de Tempo Contínuo: A FS

Consideremos inicialmente, para representação de um sinal periódico por série de Fourier, a seguinte aproximação:

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A[k]\, e^{jk\omega_0 t}$$

A determinação dos coeficientes *A[k]* será realizada utilizando a propriedade da ortogonalidade.

Sinais Periódicos de Tempo Contínuo: A FS

Inicia-se supondo que $x(t) = \hat{x}(t)$, ou seja

$$\int_{\langle T \rangle} x(t) e^{-jm\omega_0 t} dt = \int_{\langle T \rangle} \hat{x}(t) e^{-jm\omega_0 t} dt \; .$$

Substituindo-se $\hat{x}(t)$ na expressão anterior tem-se

$$\int_{\langle T \rangle} x(t) e^{-jm\omega_0 t} dt = \int_{\langle T \rangle} \sum_{k=-\infty}^{\infty} A[k] e^{jk\omega_0 t} e^{-jm\omega_0 t} dt$$

Sinais Periódicos de Tempo Contínuo: A FS

Ou ainda

$$\int_{\langle T\rangle} x(t)e^{-jm\omega_0 t}dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A[k]\int_{\langle T\rangle} e^{j(k-m)\omega_0 t}dt \, .$$

Da propriedade da ortogonalidade, resulta que

$$\int_{\langle T\rangle} e^{j(k-m)\omega_0 t}dt = 0 \;\; \forall\, k \neq m \in Z \quad \text{e} \quad \int_{\langle T\rangle} e^{j(k-m)\omega_0 t}dt = T\,,\, k = m \in Z \, .$$

Sinais Periódicos de Tempo Contínuo: A FS

Sendo assim

$$\int_{\langle T\rangle} x(t)e^{-jm\omega_0 t}\,dt = A[m]T \quad .$$

Se de fato $x(t) = \hat{x}(t)$, os coeficientes $A[m]$ serão determina-dos por

$$A[m] = \frac{1}{T}\int_{\langle T\rangle} x(t)e^{-jm\omega_0 t}\,dt \quad .$$

Convergência da Série de Fourier

Para que a série infinita

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A[k] e^{-jm\omega_0 t}$$

convirja para *x(t)*, algumas condições devem ser satisfeitas. A primeira delas estabelece que $|x(t)|^2$ deve ser integrável.

Ou seja,

$$\frac{1}{T}\int_{\langle T\rangle} |x(t)|^2 dt < \infty$$

Convergência da Série de Fourier

A convergência ponto a ponto é garantida em todos os valores de *t*, exceto naqueles que correspondem a descontinuidades, se as condições de Dirichlet forem satisfeitas:

1. *x(t) é limitado;*
2. *x(t) tem um número finito de máximos e mínimos locais em um período;*
3. *x(t) tem um número finito de descontinuidades em um período.*

A Representação por Série de Fourier

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k] e^{jk\omega_0 t}$$

$$X[k] = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

Em que *x(t)* tem período fundamental *T* e $\omega_0 = 2\pi / T$.

A Representação por Série de Fourier

Diz-se que *x(t)* e *X[k]* são um par de série de Fourier, sendo denotada esta relação como

$$x(t) \xleftrightarrow{FS;\,\omega_0} X[k] \quad .$$

A representação do sinal *x(t)* pelos coeficientes *X[k]* também é conhecida como representação no domínio frequência, porque cada coeficiente de Fourier está associado a uma senoide complexa de frequência diferente.

Exemplo 3.5:

Determinar a representação no domínio frequência para o sinal

$$x(t) = 3\cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{4}\right)$$

Represente graficamente *X[k]* pelo seu módulo e argumento.

Exercício 3.3:

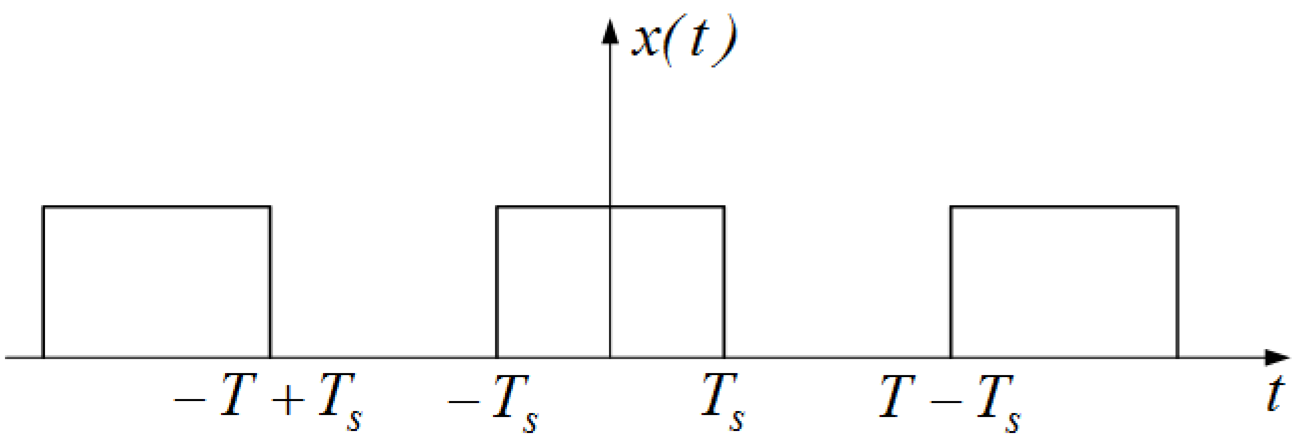
Determinar a representação por série de Fourier para o sinal

$$x(t) = 2\,sen(2\pi t - 3) + sen(6\pi t)$$

Represente graficamente *X[k]* pelo seu módulo e argumento.

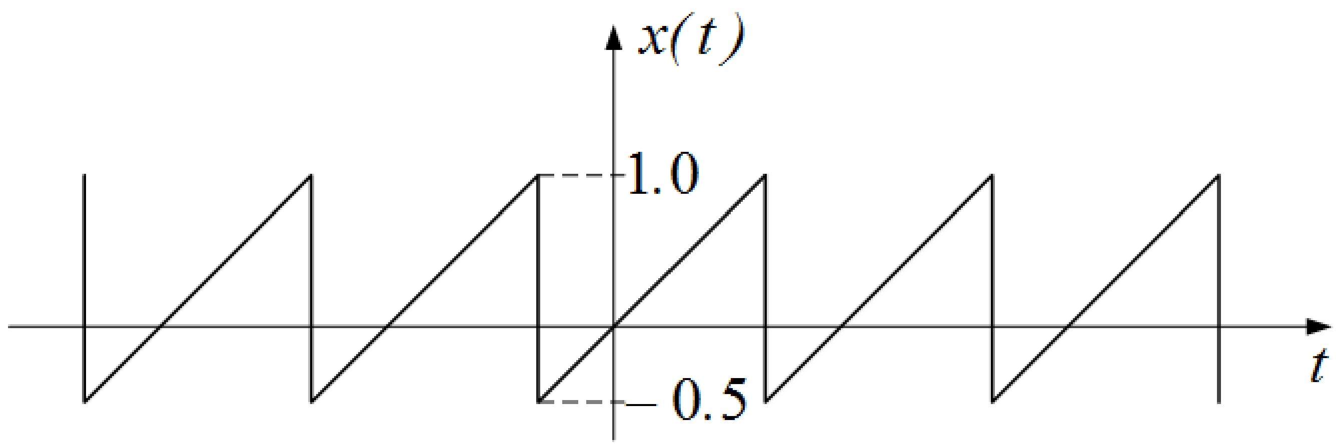
Exemplo 3.6:

Determine a representação por série de Fourier para a onda quadrada apresentada a seguir:



Exercício 3.4:

Determinar a representação por série de Fourier da onda dente de serra descrita na figura a seguir.



Exemplo 3.8: Circuito RC

Determinar a representação por série de Fourier para a variável de saída *y(t)* do circuito *RC* apresentado na Figura a seguir, supondo *x(t)* uma fonte de tensão com a forma de onda quadrada, conforme a do Exemplo 3.6, supondo a relação $T_s / T = 0.25$, com *T=1 s* e *RC=0.1 s*.

Exemplo 3.8: Circuito RC