Sinais Periódicos de Tempo Discreto - *DTFS*

Se *x[n]* for um sinal periódico de tempo discreto de período fundamental *N*, então procura-se representar este sinal pela sua série de Fourier de tempo discreto – *DTFS*

$$\hat{x}[n] = \sum_{k} A[k] e^{jk\Omega_0 n}$$

onde $\Omega_0 = 2\pi / N$ é a frequência fundamental de *x[n]*.

Sinais Periódicos de Tempo Discreto - *DTFS*

Da mesma forma que para o caso contínuo, *A[k]* é o peso aplicado à *k-ésima* senoide complexa do somatório e o "^" denota o valor aproximado de *x[n]*.

O número de termos e de pesos que deve ser utilizado em cada soma é definido, tendo por base que as senoides complexas $e^{jk\Omega_0 n}$ são *N* periódicas em *k*, ou seja

$$e^{j(N+k)\Omega_0 n} = e^{jk\Omega_0 n} \quad .$$

Sinais Periódicos de Tempo Discreto - *DTFS*

Sendo assim, há somente N senoides complexas distintas na forma $e^{jk\Omega_0 n}$. Um conjunto único de N senoides complexas distintas é obtido admitindo-se que a variável k assuma quaisquer N valores consecutivos, portanto

$$\hat{x}[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} A[k] e^{jk\Omega_0 n}$$

em que a notação $k = \langle N \rangle$ implica admitir que k varie ao longo de quaisquer N valores consecutivos.

Determinação dos Coeficientes *A[k]* da *DTFS*

A expressão do MSE pode também ser respresentada na forma

$$MSE = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} |\, x[n] - \underbrace{\sum_{k=\langle N\rangle} A[k]e^{jk\Omega_0 n}}_{\hat{x}[n]} \,|^2 \; .$$

Dado um número complexo $z = a + jb$, tem-se

$$|\, z\,|^2 = (a + jb)(a - jb) = a^2 + b^2 \; .$$

Determinação dos Coeficientes *A[k]* da *DTFS*

Pode-se então representar a expressão do MSE como

$$MSE = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} \left\{ \left(x[n] - \sum_{k=\langle N \rangle} A[k] e^{jk\Omega_0 n} \right) \cdot \right.$$

$$\left. \left(x[n] - \sum_{m=\langle N \rangle} A[m] e^{jm\Omega_0 n} \right)^* \right\}$$

Determinação dos Coeficientes *A[k]* da *DTFS*

ou ainda

$$
\begin{aligned}
MSE = & \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle}\left|x[n]\right|^2 + \\
& - \sum_{m=\langle N\rangle} A^*[m]\left(\frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n]e^{-jm\Omega_0 n}\right) + \\
& - \sum_{k=\langle N\rangle} A[k]\left(\frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x^*[n]e^{jk\Omega_0 n}\right) + \\
& + \sum_{k=\langle N\rangle}\ \sum_{m=\langle N\rangle} A^*[m]A[k]\left(\frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} e^{j(k-m)\Omega_0 n}\right)
\end{aligned}
$$

Determinação dos Coeficientes *A[k]* da *DTFS*

Definindo $X[k]=\frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle}x[n]e^{-jk\Omega_0 n}$, a equação do MSE pode ser reescrita na forma:

$$MSE=\frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle}\left|x[n]\right|^2-\sum_{k=\langle N\rangle}A^*[k]X[k]+$$

$$-\sum_{k=\langle N\rangle}A[k]X^*[k]+\sum_{k=\langle N\rangle}\left|A[k]\right|^2$$

Determinação dos Coeficientes *A[k]* da *DTFS*

Somando e subtraindo do lado direito da equação o termo $\sum_{k=\langle N\rangle}\left|X[k]\right|^2$, a expressão do MSE pode ser representada como:

$$MSE = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle}\left|x[n]\right|^2 + \sum_{k=\langle N\rangle}\left|A[k]-X[k]\right|^2 - \sum_{k=\langle N\rangle}\left|X[k]\right|^2$$

Determinação dos Coeficientes *A[k]* da *DTFS*

Sendo assim, a dependência que o MSE tem dos coeficientes desconhecidos *A[k]* reduz-se ao termo

$$\sum_{k=\langle N \rangle} \left| A[k] - X[k] \right|^2$$

que é sempre não-negativo. Consequentemente, o MSE é minimizado quando

$$A[k] = X[k] \quad .$$

Determinação dos Coeficientes *A[k]* da *DTFS*

Considerando *A[k]=X[k]* e substituindo na expressão do MSE resulta em

$$MSE = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle}\left|x[n]\right|^2 - \sum_{k=\langle N\rangle}\left|X[k]\right|^2 .$$

Uma vez que foi definido

$$X[k] = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n]e^{-jk\Omega_0 n}$$

Determinação dos Coeficientes *A[k]* da *DTFS*

$$\sum_{k=\langle N\rangle}\left|X[k]\right|^2=\sum_{k=\langle N\rangle}\frac{1}{N^2}\sum_{n=\langle N\rangle}\;\sum_{m=\langle N\rangle}x[n]x^*[n]e^{j(m-n)\Omega_0 k}$$

A expressão anterior pode ser reescrita, permutando-se a ordem das somatórias na forma:

$$\sum_{k=\langle N\rangle}\left|X[k]\right|^2=\frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle}\;\sum_{m=\langle N\rangle}x[n]x^*[n]\frac{1}{N}\sum_{k=\langle N\rangle}e^{j(m-n)\Omega_0 k}$$

Determinação dos Coeficientes *A[k]* da *DTFS*

Da propriedade da ortogonalidade entre as senoides

$$\frac{1}{N}\sum_{k=\langle N\rangle} e^{j(m-n)\Omega_0 k} = \begin{cases} 1, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}$$

Concluindo que $\sum_{k=\langle N\rangle} \left|X[k]\right|^2 = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} \left|x[n]\right|^2$ resulta no MSE=*0*.

Sendo assim, os coeficientes da *DTFS* são de fato obtidos pela expressão

$$X[k] = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n]e^{-jk\Omega_0 n}$$

A Representação de Sinais Discretos por *DTFS*

$$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} X[k] e^{jk\Omega_0 n}$$

$$X[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jk\Omega_0 n}$$

Em que *x[n]* tem período fundamental *N* e $\Omega_0 = 2\pi / N$.
Diz-se que *x[n]* e *X[k]* são um par *DTFS*, denotado por

$$x[n] \xleftrightarrow{DTFS\,:\,\Omega_0} X[k]$$

Exemplo 3.1:

Determinar a representação por *DTFS* para

$$x[n] = cos\left(\frac{\pi}{8}n + \phi\right)$$

Represente também o espectro de magnitude e o espectro de argumento deste sinal.

Exercício 3.1:

Determine os coeficientes da *DTFS* para o sinal

$$x[n] = 1 + sen\left(\frac{\pi}{12}n + \frac{3\pi}{8}\right) \; .$$

Exemplo 3.2:

Determinar os coeficientes da *DTFS* para uma onda quadrada com período *N* descrita na Figura abaixo.