Sinais Não-Periódicos de Tempo Contínuo - *FT*

A Transformada de Fourier – *FT* é utilizada para representar um sinal não-periódico de tempo contínuo como uma superposição de senoides complexas.

A natureza contínua não-periódica de um sinal de tempo implica que a superposição de senoides complexas envolva um *continuum* de frequências que variam de $-\infty\ a\ \infty$.

Sinais Não-Periódicos de Tempo Contínuo - *TF*

Sendo assim, a Transformada de Fourier de um sinal de tempo contínuo envolve uma integral em frequência

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

em que

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt \quad .$$

Sinais Não-Periódicos de Tempo Contínuo - *TF*

A equação de $x(t)$ expressa que o sinal no tempo é a superposição ponderada de senoides, cada uma com um fator de ponderação $(1/2\pi)X(j\omega)d\omega$. Diz-se então que $x(t)$ e $X(j\omega)$ são um par de *FT*, ou seja:

$$x(t) \xleftrightarrow{FT} X(j\omega)$$

Sinais Não-Periódicos de Tempo Contínuo - *TF*

As condições de convergência apresentadas aqui para a Transformada de Fourier são similares as já utilizadas para a série de Fourier, ou seja, definindo $\hat{x}(t)$ como

$$\hat{x}(t) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

com

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$

Sinais Não-Periódicos de Tempo Contínuo - *TF*

Resultará em

$$MSE = \int_{-\infty}^{\infty} \left| x(t) - \hat{x}(t) \right|^2 dt$$

igual a zero se *x(t)* for integrável ao quadrado, ou seja

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| x(t) \right|^2 dt < \infty \quad .$$

Sinais Não-Periódicos de Tempo Contínuo - *TF*

A convergência ponto a ponto é garantida em todos os valores de *t*, exceto naqueles correspondentes a descontinuidades, se *x(t)* satisfizer as condições de Dirichlet para sinais não-periódicos, apresentadas a seguir:

Sinais Não-Periódicos de Tempo Contínuo - *TF*

1. *x(t) é absolutamente integrável:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$$

2. *x(t) deve ter um número finito de máximos, mínimos e descontinuidades locais em qualquer intervalo finito;*
3. *O tamanho de cada descontinuidade é finito.*

Exemplo 3.14:

Encontrar a *FT* do sinal $x(t) = e^{-at}u(t)$.

A *FT* não converge para valores de $a \leq 0$, uma vez que *x(t)* não seria absolutamente integrável, ou seja

$$\int_0^{\infty} e^{-at}dt \leq \infty .$$

Para *a>0* tem-se

Exemplo 3.14:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at} u(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$= \int_{0}^{\infty} e^{-(a+j\omega)t} dt = -\frac{1}{a+j\omega}\left[e^{-(a+j\omega)t}\right]_0^{\infty}$$

$$= \frac{1}{a+j\omega}$$

$$|X(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + a^2}} \qquad arg\{X(j\omega)\} = -arctg\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

Exemplo 3.14:

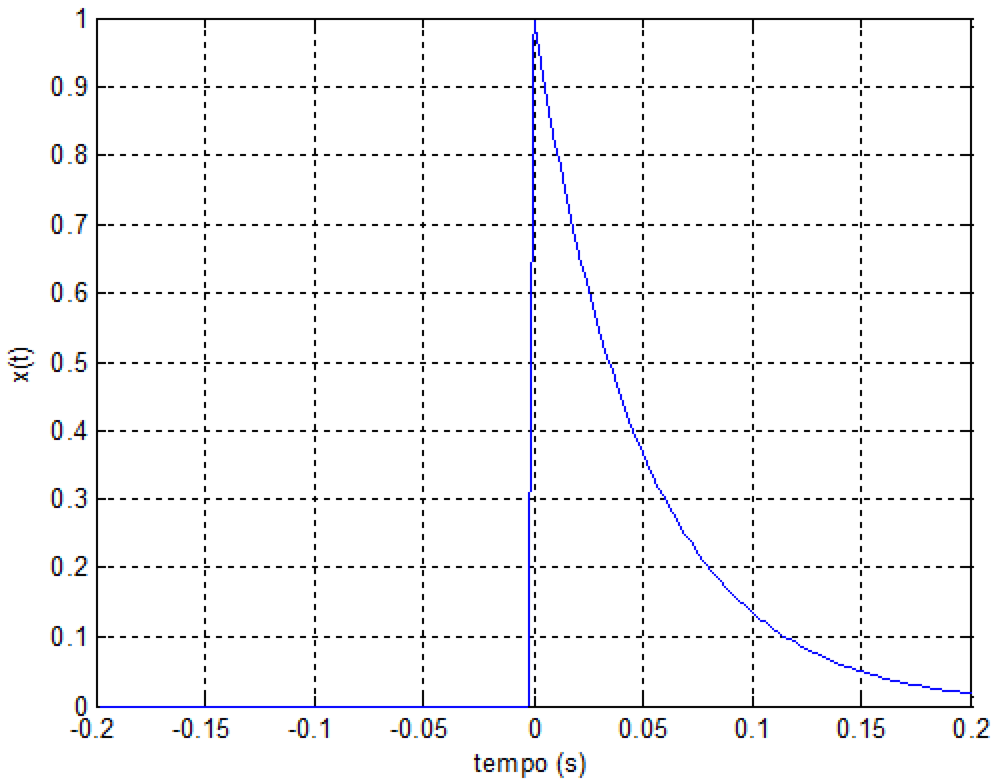
O espectro de magnitude é obtido pela equação

$$|X(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + a^2}}$$

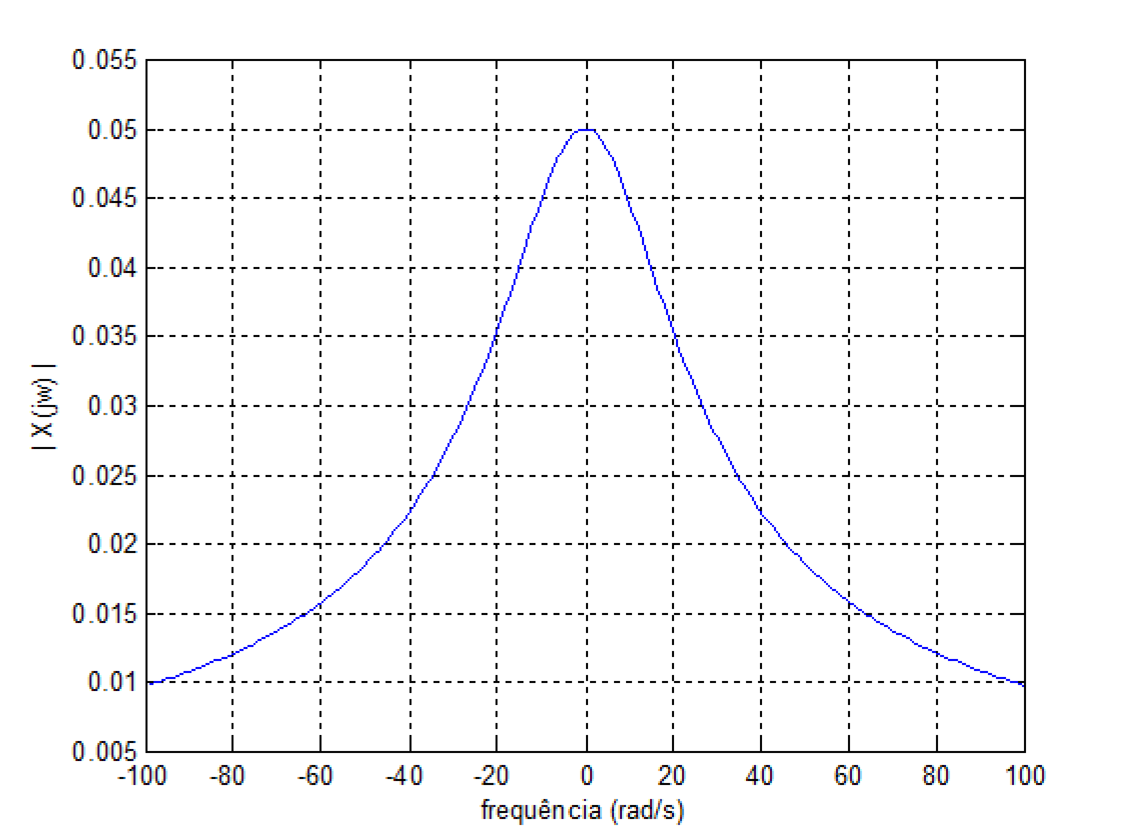
e o espectro de argumento (ou de fase) é obtido por

$$arg\{X(j\omega)\} = -arctg\left(\frac{\omega}{a}\right).$$

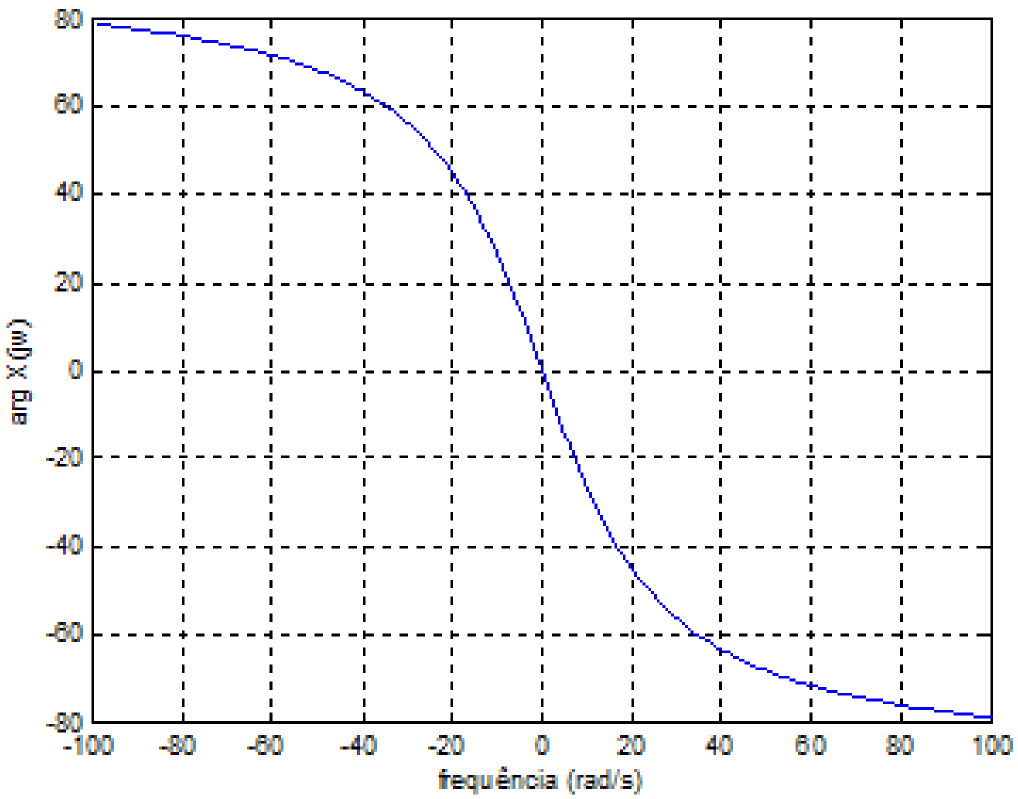
Representação do sinal $x(t) = e^{-at}u(t)$ no tempo



Espectro de Magnitude de *X(jω)*



Espectro de Argumento ou de Fase



Exercício 3.8:

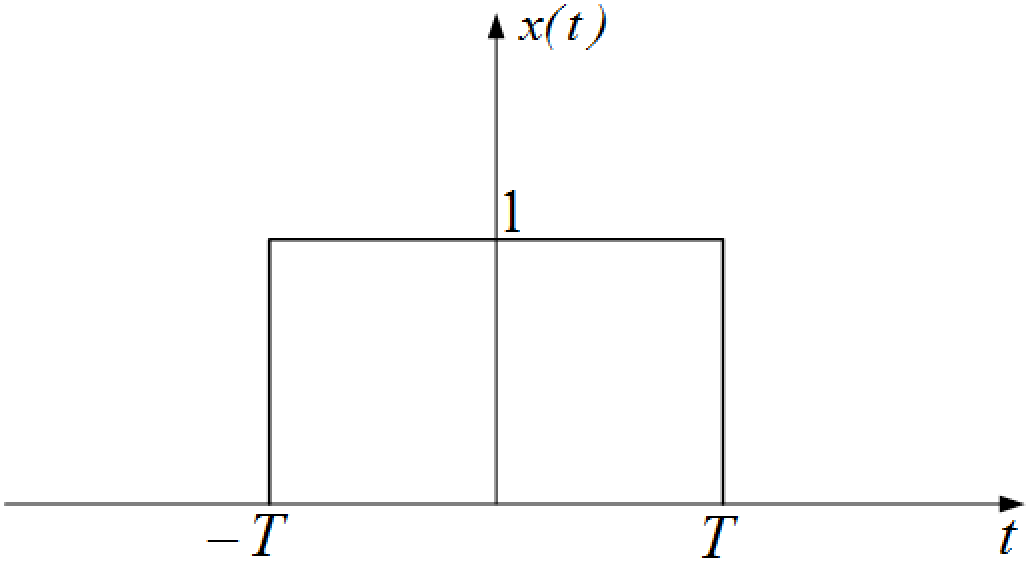
Determinar a Transformada de Fourier de

$$x(t) = e^{at}u(-t)$$

supondo $a>0$.

Exemplo 3.15:

Considere o pulso retangular descrito na figura abaixo:



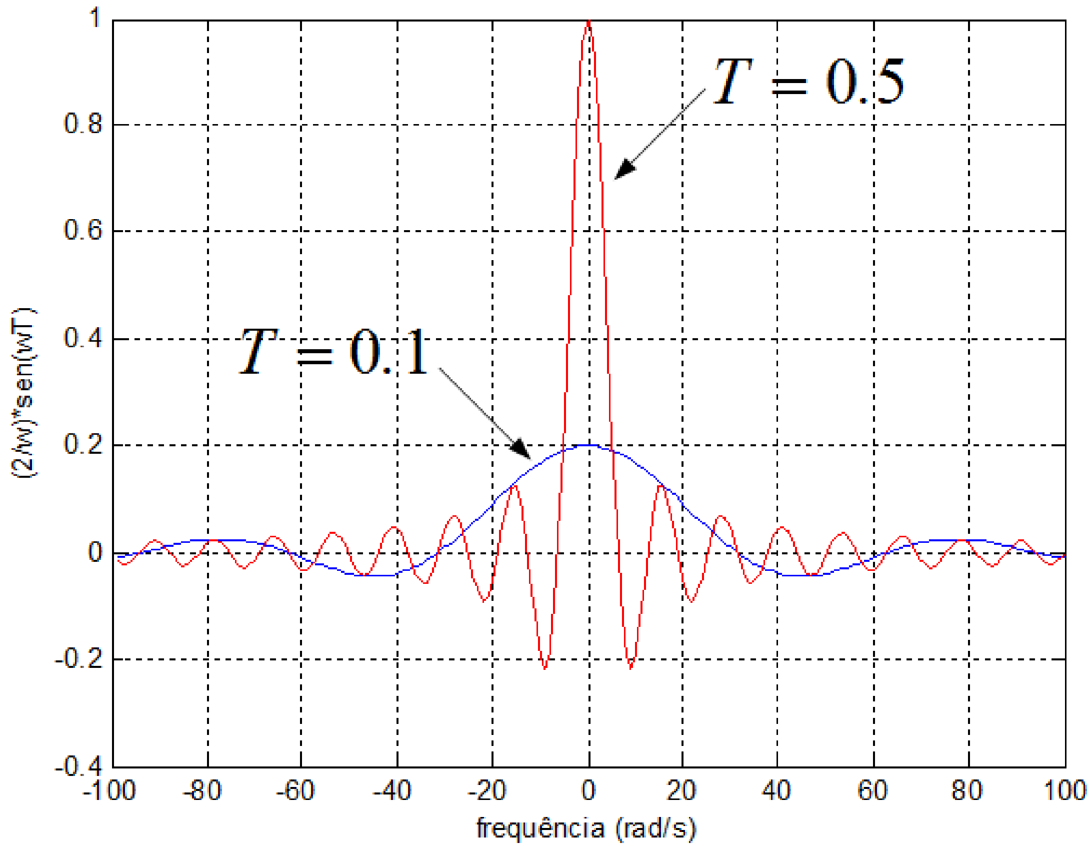
$$x(t)=\begin{cases}1, & -T\le t\le T\\ 0, & |t|>T\end{cases}$$

Determinar a *FT* de *x(t)*.

Exemplo 3.15:

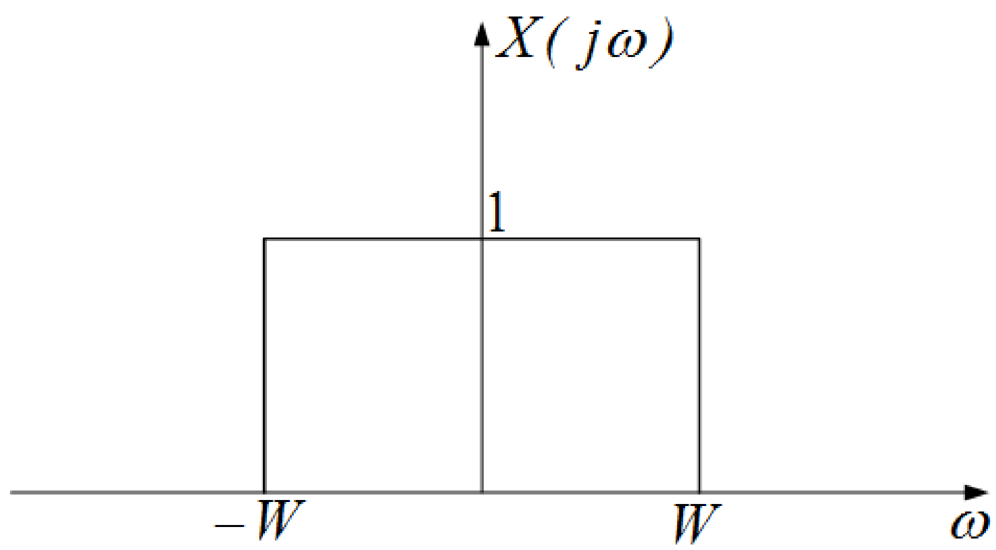
Este exemplo ilustra o fato de que ao mudar T, considerando-o menor, $x(t)$ torna-se mais concentrado nas proximidades da origem do sinal representado no domínio do tempo, enquanto no domínio frequência o sinal torna-se menos concentrado em torno da origem. O inverso ocorrerá nos dois domínios se T for considerado maior.

Exemplo 3.15 – Função $X(j\omega)=2T\ \mathrm{sinc}(\omega T/\pi)$



Exemplo 3.16:

Determinar a Transformada Inversa do espectro retangular apresentado na figura abaixo. Com base nos resultados encontrados faça uma análise semelhante àquela realizada para o pulso no domínio do tempo.



Exemplos 3.17 e 3.18:

Exemplo 3.17: Determinar a Transformada de Fourier do sinal

$$x(t) = \delta(t) \; .$$

Exemplo 3.18: Determinar a Transformada Inversa de Fourier do sinal

$$X(j\omega) = 2\pi\delta(\omega) \; .$$

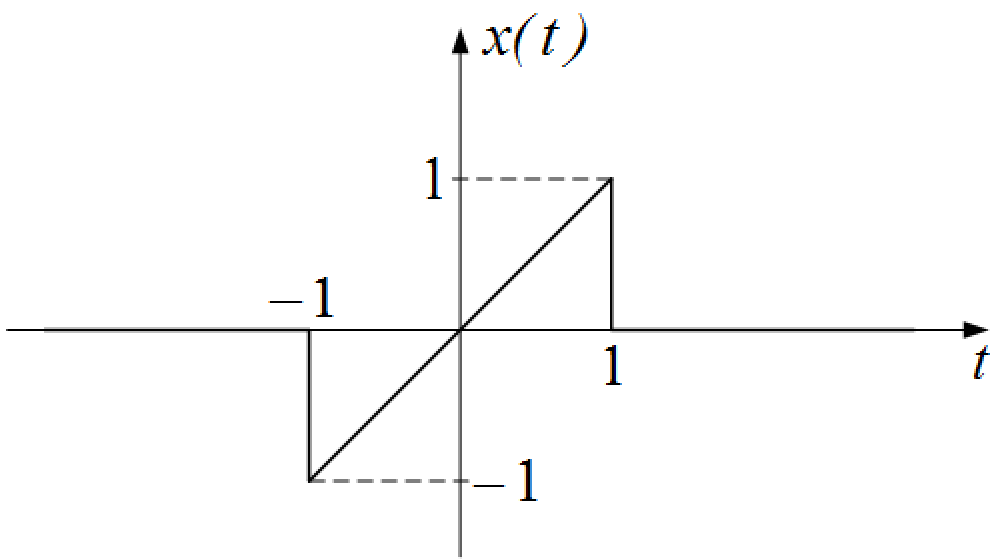
Exercício 3.9:

Determinar a Transformada Inversa de Fourier de

$$X(j\omega) = \begin{cases} 2\cos\omega, & |\omega| \le \pi \\ 0, & |\omega| > \pi \end{cases} .$$

Exercício 3.10:

Determinar a Transformada de Fourier do sinal *x(t)* apresentado na figura a seguir:



$$x(t) = \begin{cases} t, & |t| \leq 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$$