Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Departamento de Engenharia Elétrica

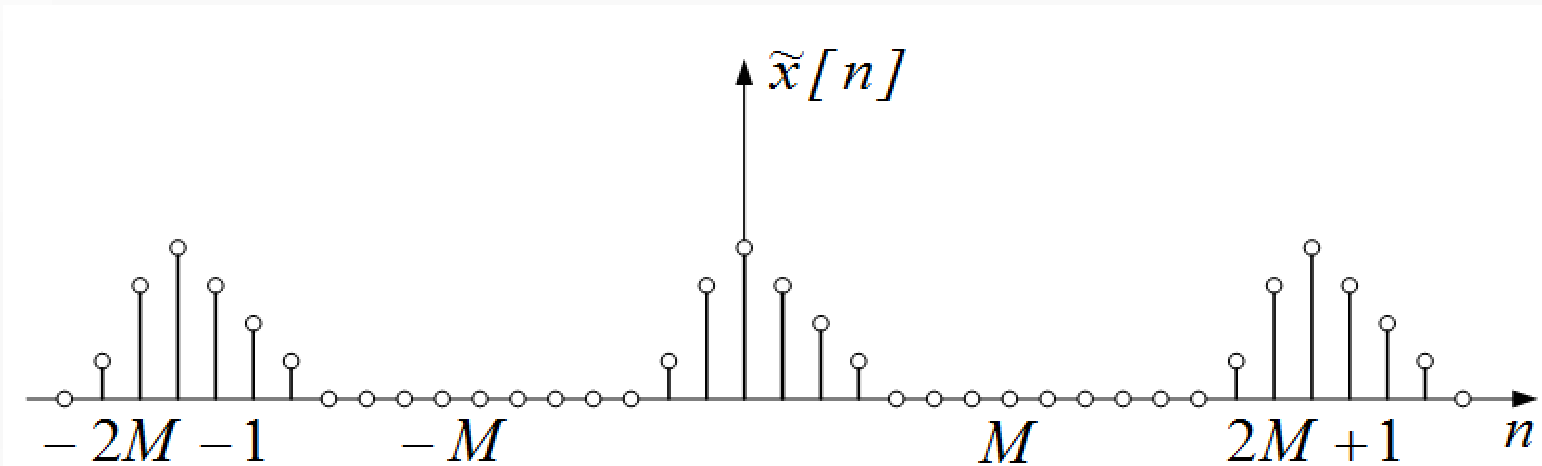
# Sinais Não-Periódicos de Tempo Discreto - *DTFT*

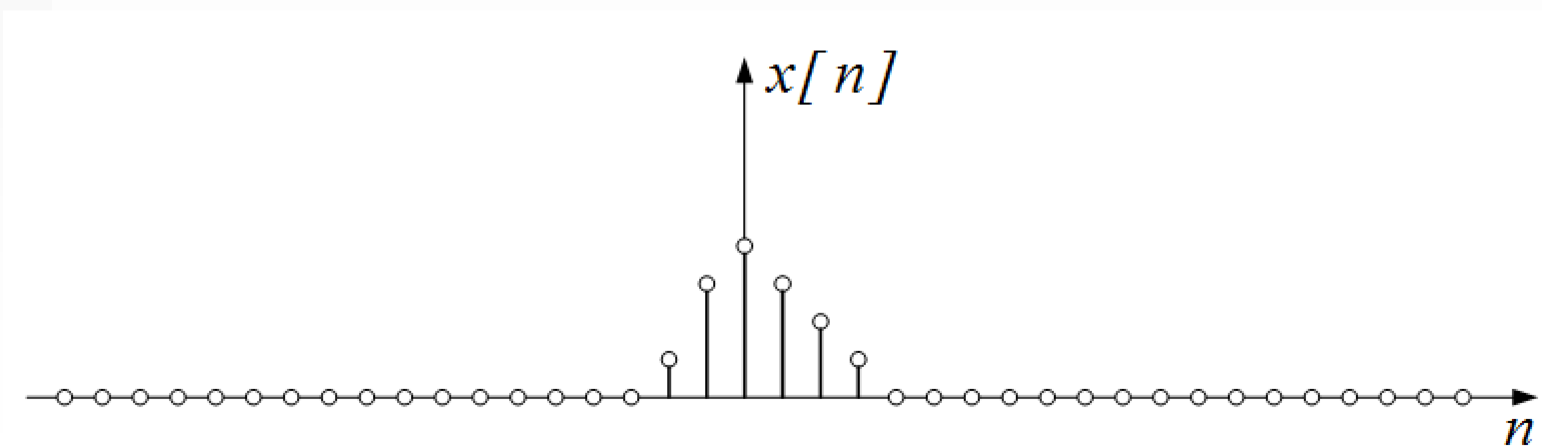
A Transformada de Fourier de Tempo Discreto será desenvolvida com base na Série de Fourier de Tempo Discreto, descrevendo um sinal não-periódico como o limite de um sinal periódico com período $N$ aproximando-se do infinito. Considera-se então que $\tilde{x}[n]$ seja um sinal periódico, com período $N = 2M + 1$ .

# Sinais Não-Periódicos de Tempo Discreto - *DTFT*

O sinal não-periódico de duração finita $x[n]$ será então representado na forma:

$$x[n] = \begin{cases} \tilde{x}[n], -M \leq n \leq M \\ 0, |n| > M \end{cases}$$


$\tilde{x}[n]$
$-2M-1$
$-M$
$M$
$2M+1$
$n$


$x[n]$
$n$

# Sinais Não-Periódicos de Tempo Discreto - *DTFT*

Conforme apresentado nas figuras anteriores, a medida em que *M* se eleva, as réplicas periódicas de $x[n]$ , presentes em $\tilde{x}[n]$ , movem-se cada vez para pontos mais afastados da origem. Finalmente, quando $M \rightarrow \infty$ , as réplicas são removidas para o infinito, logo:

$$x[n] = \lim_{M \to \infty} \tilde{x}[n]$$

# Sinais Não-Periódicos de Tempo Discreto - *DTFT*

O equacionamento de $x[n]$ é obtido então, iniciando-se pela representação da *DTFS* do sinal periódico $\tilde{x}[n]$

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=-M}^{M} X[k] e^{jk\Omega_0 n}$$

sendo

$$X[k] = \frac{1}{2M+1} \sum_{n=-M}^{M} \tilde{x}[n] e^{-jk\Omega_0 n}$$

# Sinais Não-Periódicos de Tempo Discreto - *DTFT*

Uma vez que $\tilde{x}[n] = x[n]$ para $-M \leq n \leq M$, pode-se reescrever a equação anterior em termos de $x[n]$, ou seja

$$X[k] = \frac{1}{2M+1}\sum_{n=-M}^{M} x[n]e^{-jk\Omega_0 n}$$

$$= \frac{1}{2M+1}\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-jk\Omega_0 n}$$

uma vez que $x[n] = 0$ para $|n| > M$.

# Sinais Não-Periódicos de Tempo Discreto - *DTFT*

Considera-se agora a função contínua $X(e^{j\Omega})$, cujas amostras em $k\Omega_0$ são iguais aos coeficientes da *DTFS* normalizados por $2M+1$, ou seja

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n}$$

de forma que $X[k] = X(e^{jk\Omega_0}) / (2M+1)$ .

# Sinais Não-Periódicos de Tempo Discreto - *DTFT*

Desta forma, $\tilde{x}[n]$ pode ser reescrito como

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{2M+1} \sum_{k=-M}^{M} X(e^{jk\Omega_0}) e^{jk\Omega_0 n}$$ .

Uma vez que $\Omega_0 = 2\pi/(2M+1)$, o termo $\dfrac{1}{2M+1}$ pode ser substituído na equação anterior por $\Omega_0/2\pi$, ou seja:

# Sinais Não-Periódicos de Tempo Discreto - *DTFT*

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-M}^{M} X(e^{jk\Omega_0})e^{jk\Omega_0 n}\Omega_0$$

Neste ponto, avalia-se a expressão que relaciona o sinal periódico $\tilde{x}[n]$, com o sinal não-periódico $x[n]$, o qual deseja-se obter a representação, ou seja:

$$x[n] = \lim_{M\to\infty} \tilde{x}[n]$$

$$= \lim_{M\to\infty}\left(\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-M}^{M} X(e^{jk\Omega_0})e^{jk\Omega_0 n}\Omega_0\right)$$

# Sinais Não-Periódicos de Tempo Discreto - *DTFT*

A interpretação de equação anterior é a da soma de valores de uma função $X(e^{j\Omega})e^{j\Omega}$ avaliados em $\Omega = k\Omega_0$, multiplicados pela distância entre as amostras $\Omega_0$. Esta é a aproximação pela regra da soma das áreas de elementos retangulares para uma integral. Sendo $\Omega = k\Omega_0$ e $d\Omega = \Omega_0$, a equação de $x[n]$ pode ser reescrita na forma

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\Omega})e^{j\Omega n}d\Omega \quad .$$

# Sinais Não-Periódicos de Tempo Discreto - *DTFT*

Sendo os limites da integral avaliados observando que $\lim_{M\to\infty} M\Omega_0 = \pi$ . Sendo assim, expressa-se $x[n]$ como a super-posição ponderada de senoides cuja ponderação é

$$\frac{1}{2\pi} X(e^{j\Omega}) d\Omega \cdot$$

# Sinais Não-Periódicos de Tempo Discreto - *DTFT*

A representação por *DTFT* é expressa como

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\Omega}) e^{j\Omega n} d\Omega$$

em que

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n}.$$

# Sinais Não-Periódicos de Tempo Discreto - *DTFT*

Diz-se então que $X(e^{j\Omega})$ e $x[n]$ são um par de *DTFT*,

$$x[n] \xleftrightarrow{DTFT} X(e^{j\Omega})$$

.

A representação de $x[n]$ foi realizada admitindo que o sinal $x[n]$ tenha duração finita. O resultado obtido pode ser aplicável a sinais de duração infinita, considerando condições sob as quais a soma infinita converge.

# Sinais Não-Periódicos de Tempo Discreto - *DTFT*

Se $x[n]$ é absolutamente somável:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty$$

Então $X(e^{j\Omega})$ converge uniformemente para uma função contínua em $\Omega$ .

# Sinais Não-Periódicos de Tempo Discreto - *DTFT*

Se $x[n]$ não for absolutamente somável, mas tiver energia finita, ou seja

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\, x[n]\, |^2 < \infty$$

pode-se mostrar que $X(e^{j\Omega})$ converge num sentido de erro médio quadrático, mas não converge ponto a ponto.

# Sinais Não-Periódicos de Tempo Discreto - *DTFT*

**Exemplo 3.9**: Determinar a *DTFT* da sequência exponencial

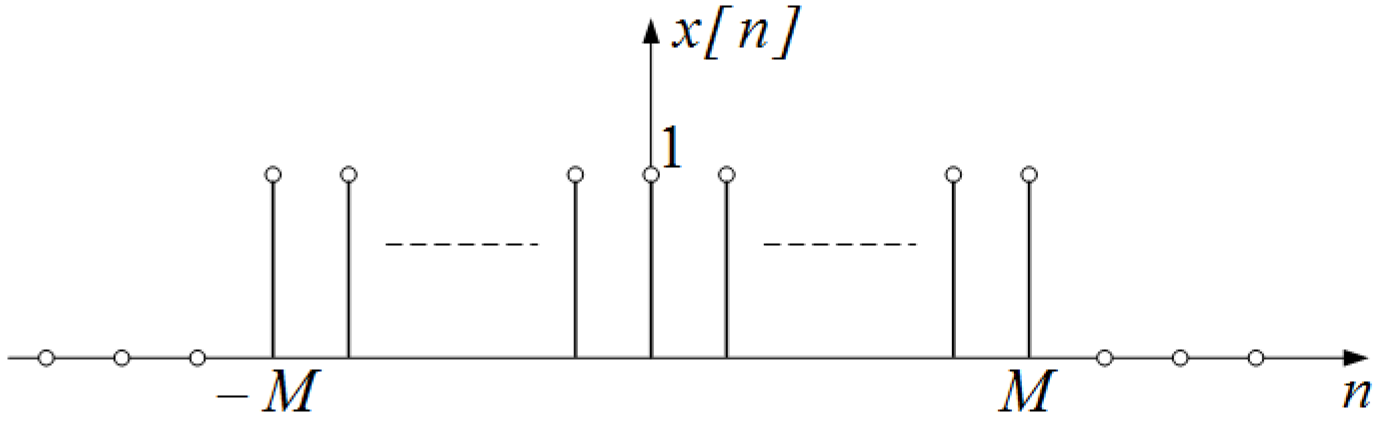
$$x[n] = \alpha^n u[n]$$

**Exercício 3.5**: Determine a *DTFT* do sinal

$$x[n] = 2\,(3)^n u[-n]$$

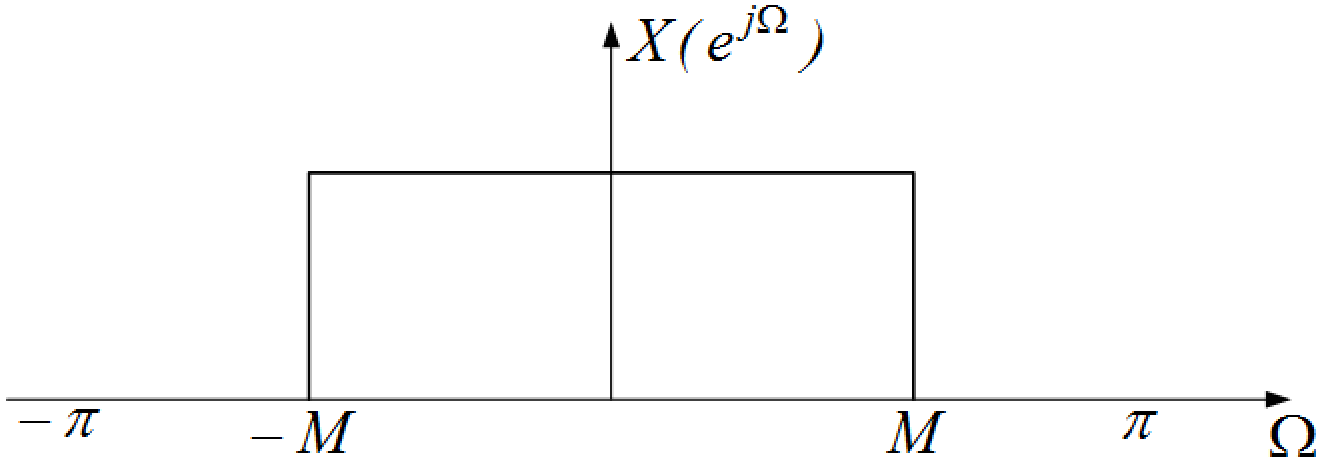
# Sinais Não-Periódicos de Tempo Discreto - *DTFT*

**Exemplo 3.10**: Determinar a *DTFT* do pulso retangular apresentado na figura a seguir:



# Sinais Não-Periódicos de Tempo Discreto - *DTFT*

**Exemplo 3.11**: Determinar a *DTFT* inversa do pulso retangular apresentado na figura abaixo:



# Sinais Não-Periódicos de Tempo Discreto - *DTFT*

**Exemplo 3.12**: Determinar a *DTFT* de $x[n] = \delta[n]$ .

**Exemplo 3.13**: Encontre a *DTFT* inversa de

$$X(e^{j\Omega}) = \delta(\Omega), \quad -\pi \leq \Omega \leq \pi$$

# Sinais Não-Periódicos de Tempo Discreto - *DTFT*

**Exercício 3.6**: Determinar a *DTFT* inversa de

$$X(e^{j\Omega}) = 2\,cos(2\Omega)\ .$$

**Exercício 3.7**: Determinar a *DTFT* do sinal

$$x[n] = \begin{cases} 2^n, 0 \le n \le 9 \\ 0, caso\ contrário \end{cases}\ .$$