Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Departamento de Engenharia Elétrica

Propriedades das Representações de Fourier

Sinais periódicos de tempo contínuo ou discreto têm uma representação por série de Fourier, dada pela soma ponderada de senoides complexas com frequências múltiplas inteiras da frequência fundamental. Desta forma, um conjunto discreto de frequências está envolvido em sua representação.

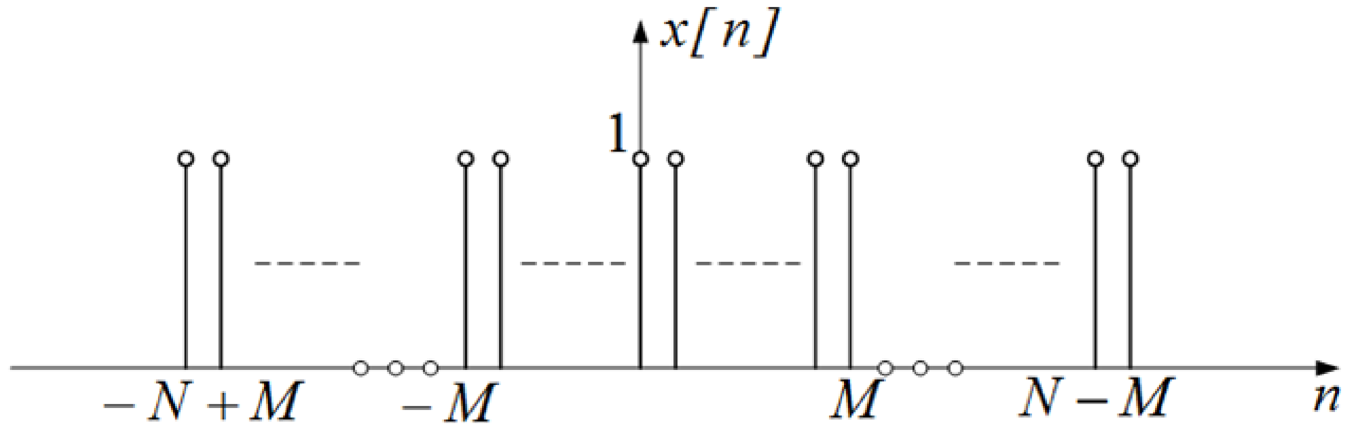
Periodicidade

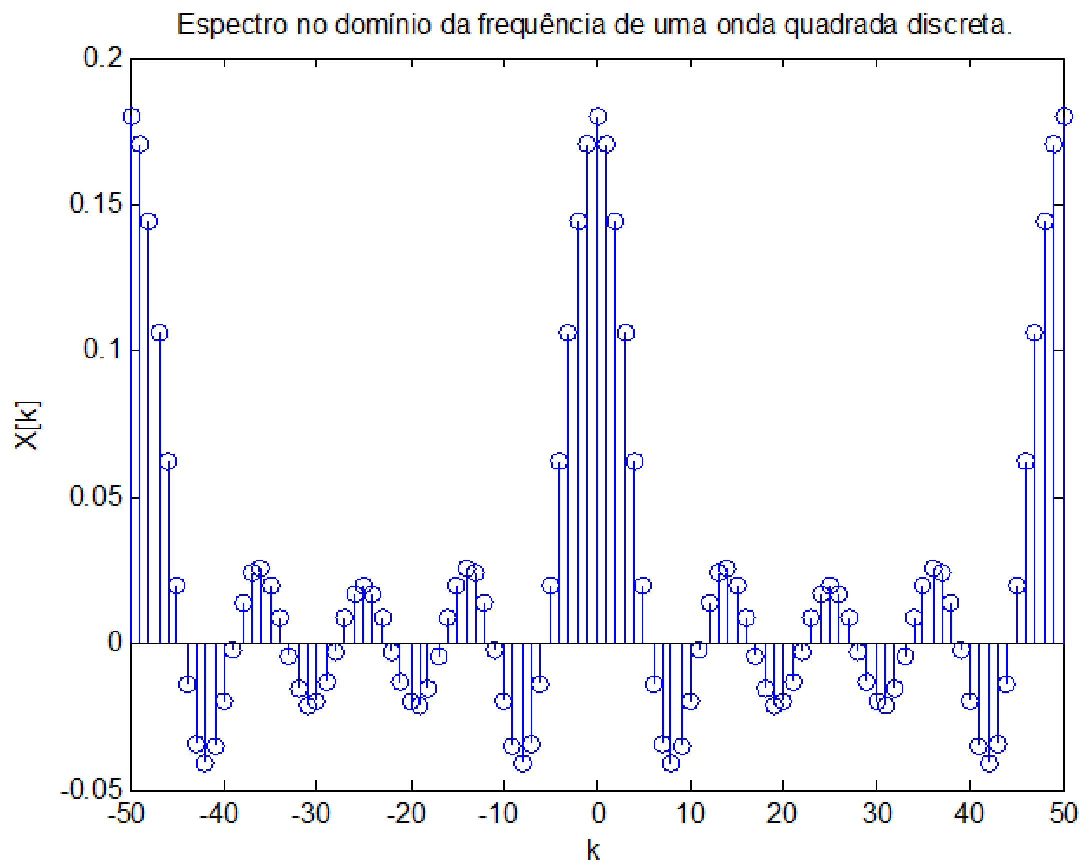
Sinais Periódicos (domínio tempo)

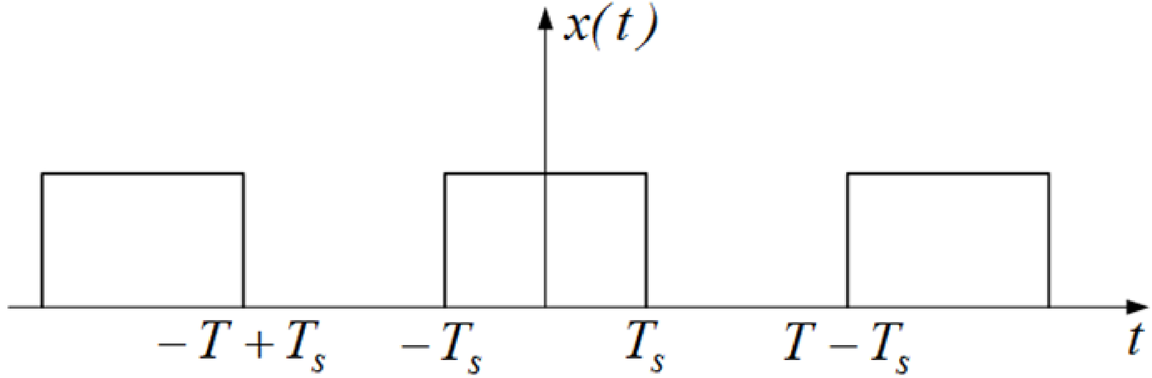
Contínuos

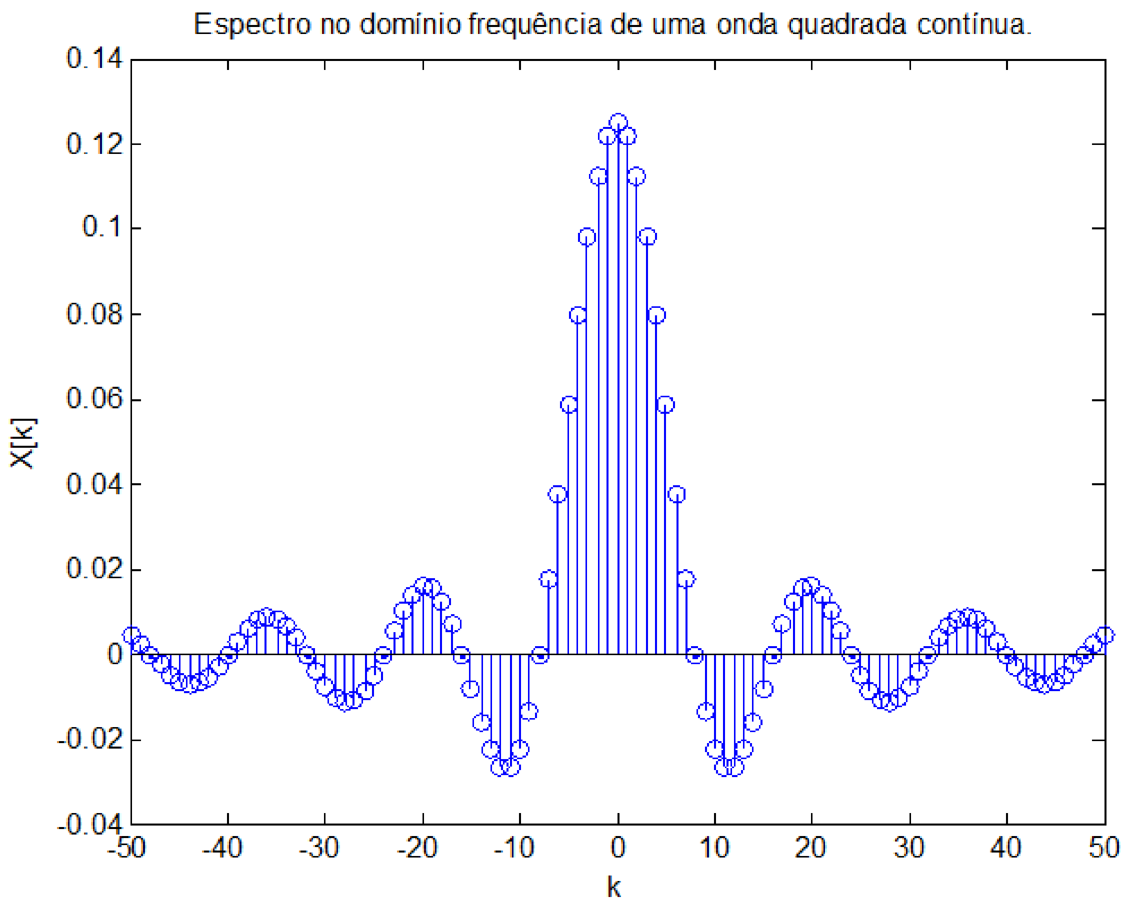
Discretos

Representação Discreta (domínio frequência)


x[n]
1
−N+M
−M
M
N−M
n


Espectro no domínio da frequência de uma onda quadrada discreta.
X[k]
k
0.2
0.15
0.1
0.05
0
-0.05
-50
-40
-30
-20
-10
0
10
20
30
40
50


$x(t)$
$-T+T_s$
$-T_s$
T_s
$T-T_s$
t


Espectro no domínio frequência de uma onda quadrada contínua.
X[k]
k
0.14
0.12
0.1
0.08
0.06
0.04
0.02
0
-0.02
-0.04
-50
-40
-30
-20
-10
0
10
20
30
40
50

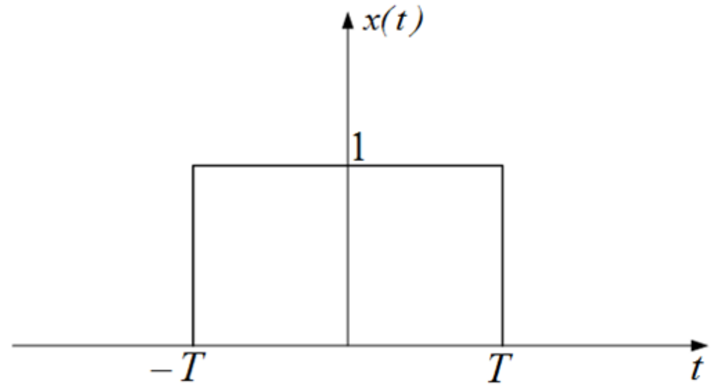
Periodicidade

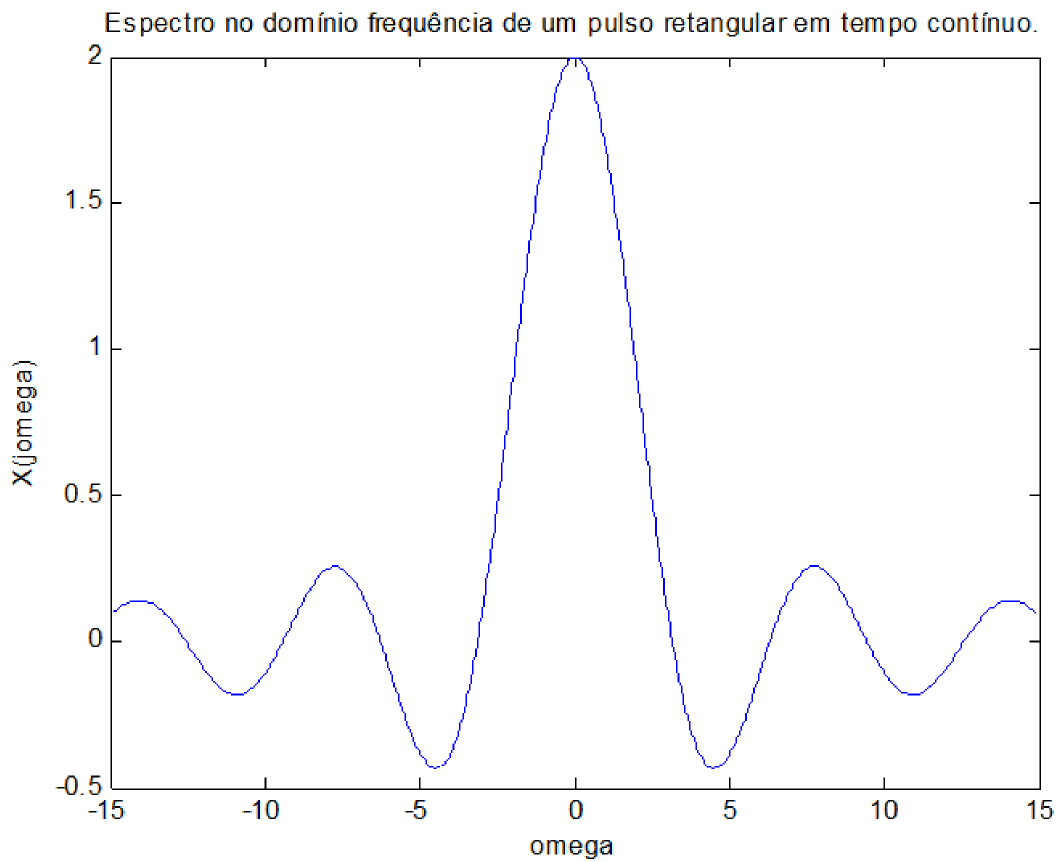
Sinais não-periódicos de tempo contínuo ou de tempo discreto envolvem a ponderação de senoides complexas de um *continuum* de frequências, resultando em uma representação contínua de sinais no domínio frequência.

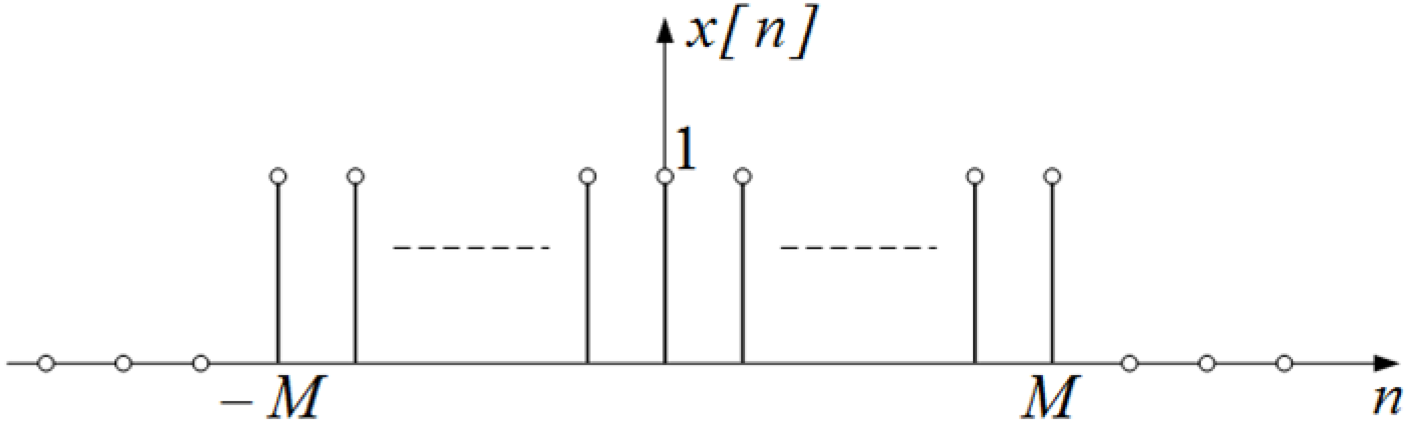
Periodicidade

Sinais Não – Periódicos (domínio tempo) → *Contínuos* → *Representação Contínua (domínio frequência)*

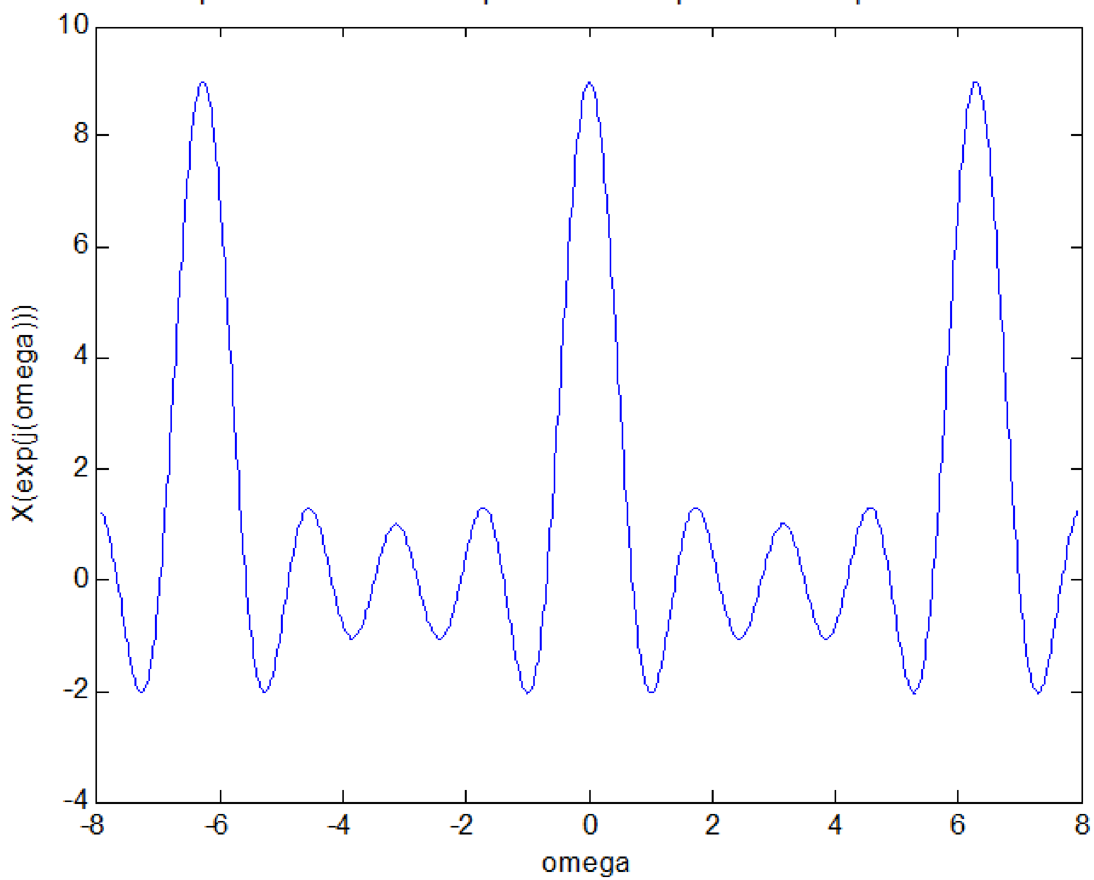
Sinais Não – Periódicos (domínio tempo) → *Discretos* → *Representação Contínua (domínio frequência)*


x(t)
1
−T
T
t


Espectro no domínio frequência de um pulso retangular em tempo contínuo.
X(jomega)
omega
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-15
-10
-5
0
5
10
15



Espectro no domínio frequência de um pulso em tempo discreto.



Domínio Tempo	Periódico	Não – Periódico	
CONTÍNUO	Série de Fourier $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k) e^{jk\omega_0 t}$ $X(k) = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$ $x(t)$ tem período T, $\omega_0 = 2\pi / T$	Transformada de Fourier $x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$ $X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$	NÃO PER.
DISCRETO	DTFS $x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} X(k) e^{jk\Omega_0 n}$ $X[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jk\Omega_0 n}$ $x[n]$ e $X[k]$ tem período N, $\Omega_0 = 2\pi / N$	DTFT $x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\Omega}) e^{j\Omega} d\Omega$ $X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n}$ $X(e^{j\Omega})$ tem período 2π	PERIÓDICO
	DISCRETO	CONTÍNUO	Domínio Frequência

Adicionalmente, as representações de Fourier para sinais de tempo discreto (*DTFS* e *DTFT*), são periódicas devido à natureza *N*-periódica das senoides complexas de tempo discreto. A tabela abaixo apresenta um sumário das propriedades de periodicidade das representações de Fourier.

Propriedades de Periodicidade das Representações de Fourier

Domínio Tempo	*Domínio Frequência*
Contínuo	*Não-Periódico*
Discreto	*Periódico*
Periódico	*Discreto*
Não-Periódico	*Contínuo*

Linearidade

Todas as quatro representações de Fourier satisfazem as propriedades de linearidade:

$$z(t) = ax(t) + by(t) \overset{FT}{\longleftrightarrow} Z(j\omega) = aX(j\omega) + bY(j\omega)$$

$$z(t) = ax(t) + by(t) \overset{FS;\omega_0}{\longleftrightarrow} Z[k] = aX[k] + bY[k]$$

$$z[n] = ax[n] + by[n] \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} Z(e^{j\Omega}) = aX(e^{j\Omega}) + bY(e^{j\Omega})$$

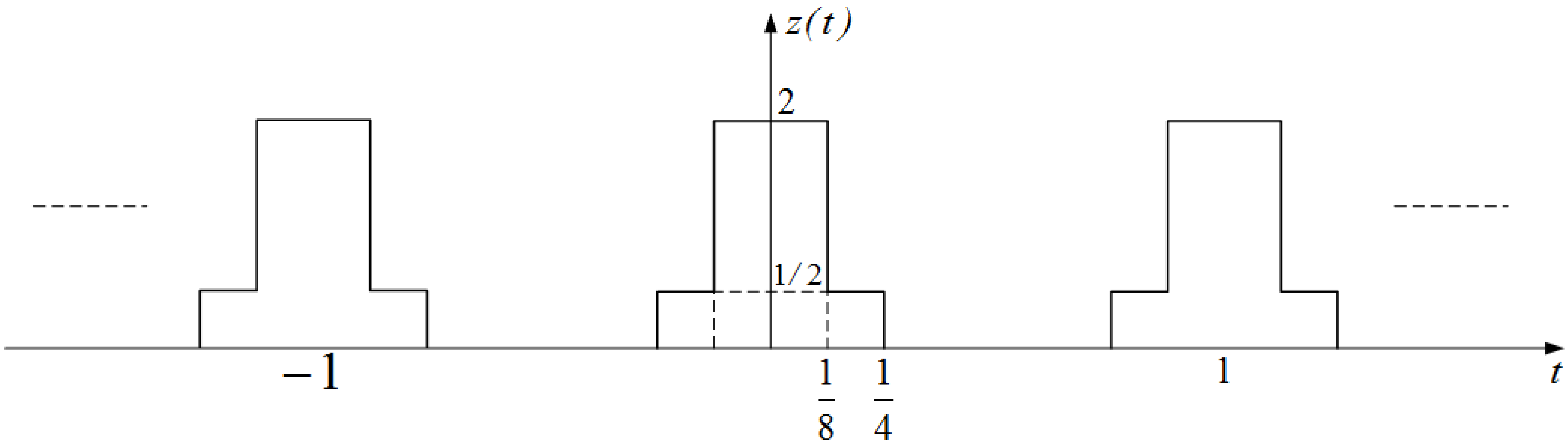
$$z[n] = ax[n] + by[n] \overset{DTFS;\Omega_0}{\longleftrightarrow} Z[k] = aX[k] + bY[k]$$

Linearidade

Nas representações anteriores, supõe-se que as variáveis em maiúsculas denotem a representação por Fourier das variáveis em minúsculas correspondentes. Nos casos da *FS* e da *DTFS* admite-se que os sinais que estão sendo somados possuem o mesmo período fundamental.

Exemplo 3.19:

Considerando o sinal periódico apresentado a seguir, obter sua representação no domínio frequência:



Linearidade

A propriedade da linearidade também é base do método das frações parciais, empregado para a obtenção da transformada de Fourier inversa das representações do domínio frequência $X(j\omega)$, dada pela razão de polinômios em $j\omega$, na forma

$$X(j\omega) = \frac{b_M(j\omega)^M + \ldots + b_1(j\omega) + 1}{(j\omega)^N + a_{N-1}(j\omega)^{N-1} + \ldots + a_1(j\omega) + a_0}.$$

Linearidade

Apenas para ilustrar o procedimento empregado no método das frações parciais, será considerado *M*<*N*, admitindo que as raízes do polinômio do denominador em $j\omega$, representadas $\alpha_k, k = 1,2,\ldots,N$, sejam todas distintas.

A função racional $X(j\omega)$ pode então ser representada na forma:

$$X(j\omega) = \sum_{k=1}^{N} \frac{C_k}{j\omega - \alpha_k}$$

Linearidade

Uma vez que

$$e^{\alpha t} \overset{FT}{\leftrightarrow} \frac{1}{j\omega - \alpha} \quad \forall\, \alpha < 0$$

$$x(t) = \sum_{k=1}^{N} C_k e^{\alpha_k t} u(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} X(j\omega) = \sum_{k=1}^{N} \frac{C_k}{j\omega - \alpha_k}$$

Exemplo 3.20:

Determinar a transformada de Fourier inversa de $X(j\omega)$.

$$X(j\omega) = \frac{j\omega + 1}{(j\omega)^2 + 5j\omega + 6}$$

Exercício 3.11:

Utilize a expansão em frações parciais e a linearidade para determinar a transformada de Fourier inversa de

$$X(j\omega) = \frac{-j\omega}{(j\omega)^2 + 3j\omega + 2}.$$

Linearidade

A expansão em frações parciais também é empregada para determinar a *DTFT* inversa de representações em domínio frequência dada como funções racionais de polinômios em $e^{-j\Omega}$, escritos na forma

$$X(e^{j\Omega}) = \frac{b_M e^{-j\Omega M} + \ldots + b_1 e^{-j\Omega} + b_0}{a_N e^{-j\Omega N} + a_{N-1} e^{-j\Omega(N-1)} + \ldots + a_1 e^{-j\Omega} + 1}.$$

Representações desta forma ocorrem frequentemente no estudo de sistemas descritos por meio de equações lineares de diferenças com coeficientes constantes. Conforme realizado no caso da obtenção da transformada de Fourier inversa, a função $X(e^{j\Omega})$ pode ser representada como

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{k=1}^{N} \frac{C_k}{1-\alpha_k e^{-j\Omega}}$$

em que $\alpha_k, k = 1,2,\ldots,N$, são as raízes do polinômio do denominador de $X(e^{j\Omega})$, supostamente distintas.

Linearidade

Sendo assim, uma vez que

$$(\alpha_k)^n u[n] \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1-\alpha_k e^{-j\Omega}}$$

empregando a propriedade da linearidade, implica

$$x[n] = \sum_{k=1}^{N} C_k (\alpha_k)^n u[n] \;.$$

Exemplo 3.21:

Determinar a *DTFT* inversa de $X(e^{j\Omega})$.

$$X(e^{j\Omega}) = \frac{-\frac{5}{6}e^{-j\Omega} + 5}{1 + \frac{1}{6}e^{-j\Omega} - \frac{1}{6}e^{-j\Omega 2}}$$

Simetria

A propriedade da simetria será desenvolvida para a *FT*, sendo que para outras três representações, é obtida de maneira análoga. Supõe-se que $x(t) = x^*(t)$, considera-se então

$$X^*(j\omega) = \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \right]^* = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) e^{j\omega t} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j(-\omega)t} dt = X(-j\omega) \quad .$$

Simetria

Portanto, se *x(t)* for real, a parte real da transformada apresentará simetria par, enquanto a parte imaginária apresentará simetria ímpar. Isto também implica que o espectro de magnitude é uma função par, enquanto o espectro de fase é uma função ímpar.

$$X^*(j\omega) = X(-j\omega) \rightarrow Re\{X(j\omega)\} = Re\{X(-j\omega)\}$$

$$X^*(j\omega) = X(-j\omega) \rightarrow Im\{X(j\omega)\} = -Im\{X(-j\omega)\}$$

Simetria

Supõe-se agora que *x(t)* seja um sinal puramente imaginário, de forma que $x(t) = -x^*(t)$.

$$X^*(j\omega) = \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt\right]^* = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)e^{j\omega t}dt$$

$$= -\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j(-\omega)t}dt = -X(-j\omega)$$

Simetria

Examinando as partes real e imaginária da relação $X^*(j\omega) = -X(-j\omega)$, conclui-se que se o sinal *x(t)* for puramente imaginário, a parte real da *FT* apresentará simetria ímpar, enquanto a parte imaginária apresentará simetria par.

$$X^*(j\omega) = -X(-j\omega) \rightarrow \begin{cases} Re\{X(j\omega)\} = -Re\{X(-j\omega)\} \\ Im\{X(j\omega)\} = Im\{X(-j\omega)\} \end{cases}$$

Deslocamento no Tempo

Admite-se que $z(t) = x(t - t_0)$ seja uma versão deslocada no tempo do sinal $x(t)$. Sendo assim,

$$Z(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} z(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t - t_0) e^{-j\omega t} dt \; .$$

Deslocamento no Tempo

Realiza-se então uma mudança de variável, onde $\tau = t - t_0$ e assim

$$Z(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\omega(\tau + t_0)} d\tau$$

$$= e^{-j\omega t_0} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

$$= e^{-j\omega t_0} X(j\omega)$$

Deslocamento no Tempo

Resultando na seguinte conclusão:

$$|Z(j\omega)| = |X(j\omega)|$$

$$arg\{Z(j\omega)\} = arg\{X(j\omega)\} - \omega t_0$$

Propriedades de Deslocamento no Tempo das Representações de Fourier

$$x(t-t_0) \overset{FT}{\longleftrightarrow} e^{-j\omega t_0} X(j\omega)$$

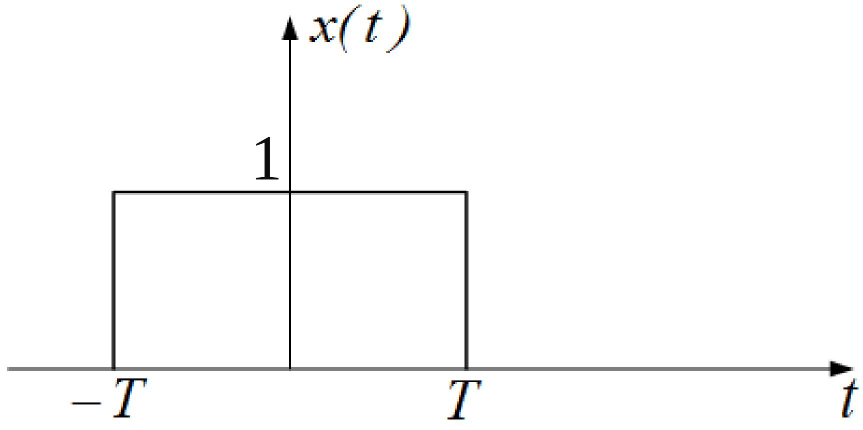
$$x(t-t_0) \overset{FS;\omega_0}{\longleftrightarrow} e^{-jk\omega_0 t_0} X[k]$$

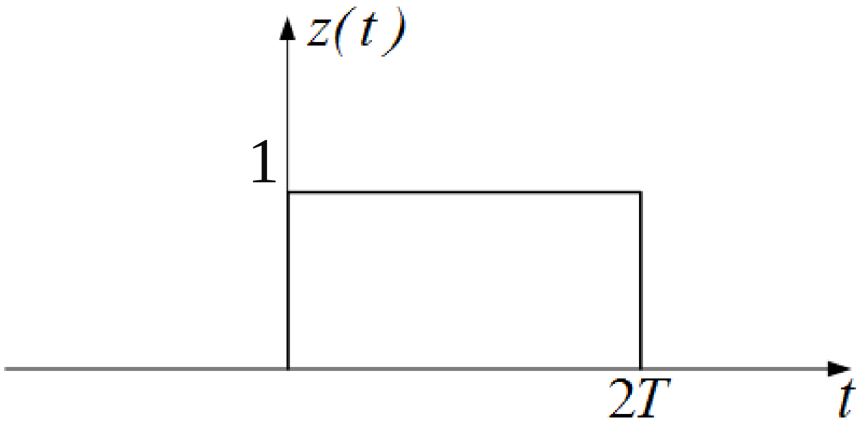
$$x[n-n_0] \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} e^{-j\Omega_0 n_0} X(e^{j\Omega})$$

$$x[n-n_0] \overset{DTFS;\Omega_0}{\longleftrightarrow} e^{-jk\Omega_0 n_0} X[k]$$

Exemplo 3.22:

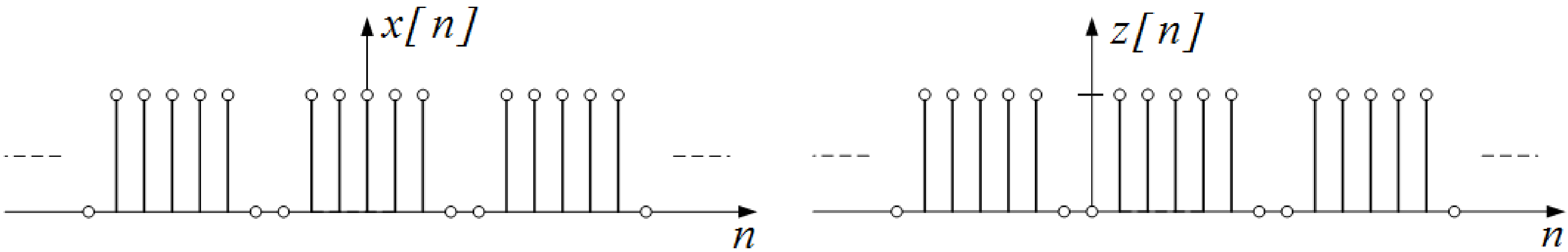
Determinar a *FT* do pulso retangular $x(t)$ deslocado no tempo, representado por $z(t)$ na figura abaixo.





Exercício 3.12:

Determinar, com base na *DTFS* da onda quadrada do sinal $x[n]$, a *DTFS* do sinal $z[n]$.



Deslocamento em Frequência

Análogo ao caso do deslocamento no tempo, supõe-se agora um sinal deslocado em frequência tal que

$$Z(j\omega) = X(j(\omega - \gamma))$$

logo

$$z(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} Z(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j(\omega-\gamma))e^{j\omega t}d\omega$$

Deslocamento em Frequência

Admitindo-se $\eta = \omega - \gamma$ tem-se.

$$z(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\eta) e^{j(\eta+\gamma)t} d\eta$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{j\gamma t} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\eta) e^{j\eta t} d\eta = e^{j\gamma t} x(t)$$

Deslocamento em Frequência

Consequentemente, um deslocamento de γ no domínio frequência corresponde a multiplicar o sinal no domínio tempo por uma senóide complexa de frequência igual a γ .

Observa-se que o deslocamento em frequência deve ter um valor inteiro em ambos os casos da série de Fourier.

Propriedades de Deslocamento em Frequência das Representações de Fourier

$$e^{j\gamma t}x(t) \overset{FT}{\longleftrightarrow} X(j(\omega-\gamma))$$

$$e^{jk_0\omega_0 t}x(t) \overset{FS;\omega_0}{\longleftrightarrow} X[k-k_0]$$

$$e^{j\Gamma n}x[n] \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} X(e^{j(\Omega-\Gamma)})$$

$$e^{jk_0\Omega_0 n}x[n] \overset{DTFS;\Omega_0}{\longleftrightarrow} X[k-k_0]$$

Exemplo 3.23:

Determinar a *FT* do pulso senoidal complexo dado por

$$z(t) = \begin{cases} e^{j10t}, |t| \leq \pi \\ 0, \, caso\ contrário \end{cases}.$$

Mudança de Escala

Avalia-se inicialmente o efeito da mudança de escala na variável transformada para o domínio frequência. Assim, seja $z(t) = x(at)$:

$$Z(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} z(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(at)e^{-j\omega t}dt$$

Admite-se então a variável auxiliar $\tau = at$, logo:

$$Z(j\omega) = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-j(\omega/a)\tau}d\tau$$

$$= \frac{1}{a}X\left(j\frac{\omega}{a}\right),\ a > 0$$

Portanto, a mudança de escala do sinal no domínio tempo introduz uma mudança de escala inversa na representação no domínio frequência, em conjunto com uma alteração na escala de amplitude.

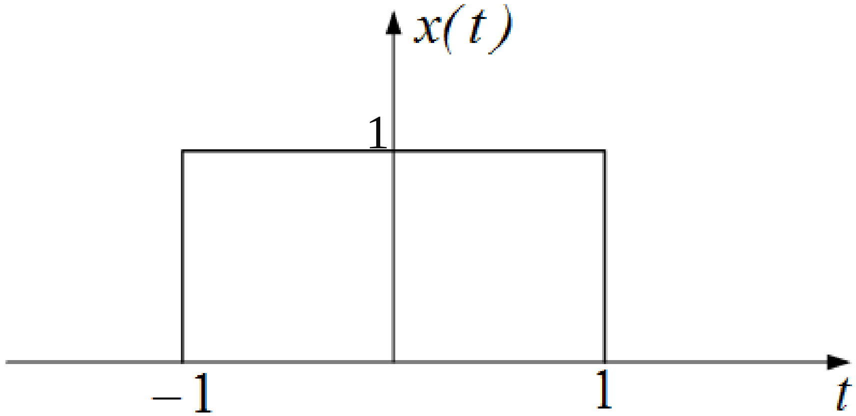
Exemplo 3.24:

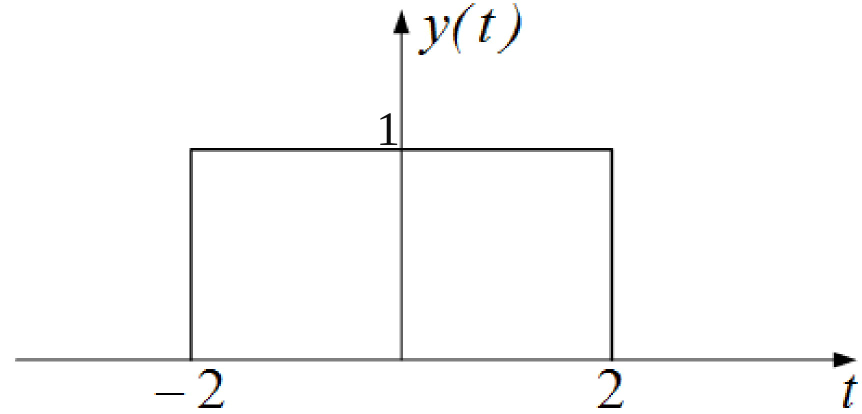
Admita que $x(t)$ seja um pulso retangular

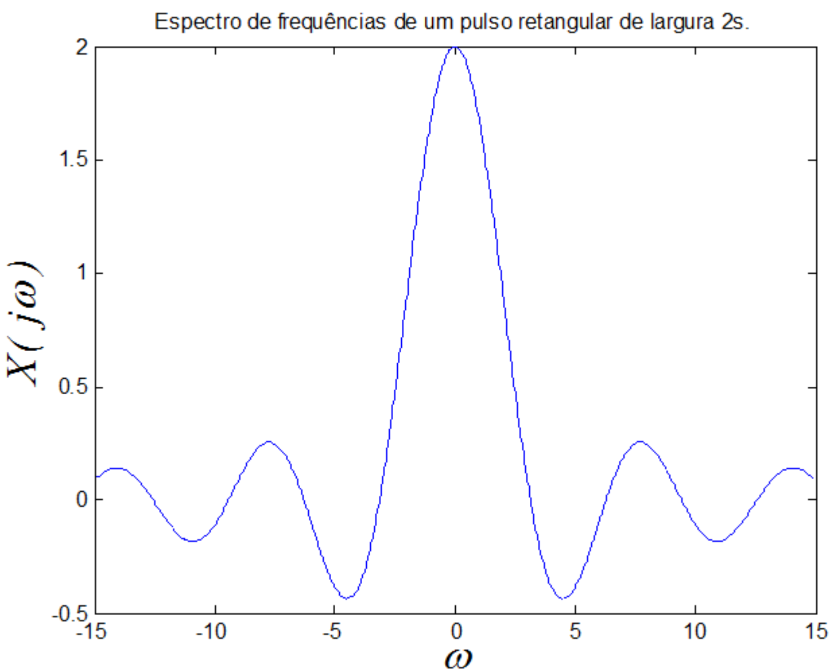
$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq 1 \\ 0, & |t| > 0 \end{cases}$$

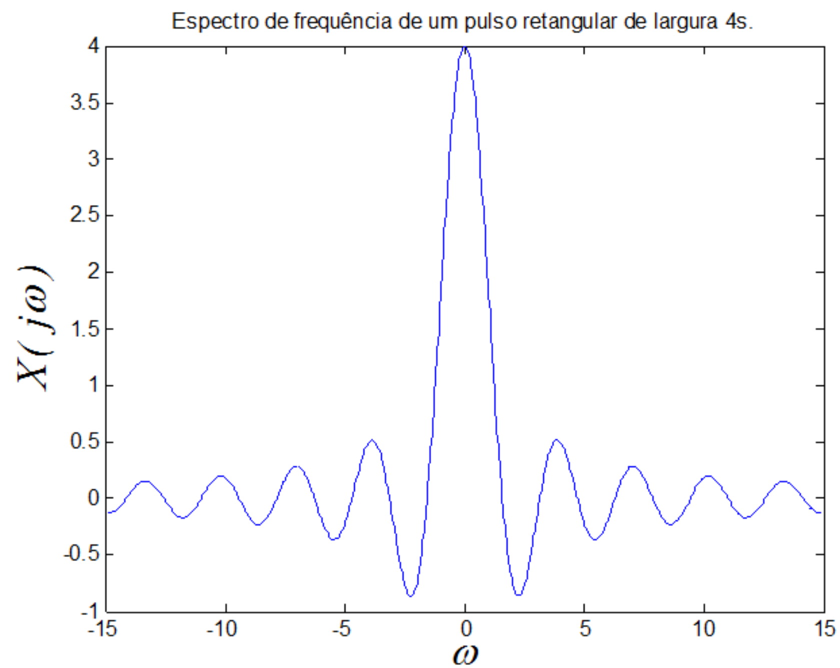
Use a propriedade de mudança de escala para obter a *FT* do pulso retangular alterado na forma

$$y(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq 2 \\ 0, & |t| > 0 \end{cases}.$$


x(t)
1
−1
1
t


y(t)
1
−2
2
t


Espectro de frequências de um pulso retangular de largura 2s.
X(jω)
ω


Espectro de frequência de um pulso retangular de largura 4s.
X(jω)
ω

Diferenciação e Integração

As operações de diferenciação e integração aplicam-se a funções contínuas, e serão definidas para a classe de sinais contínuos no tempo ou em frequência, neste último caso com respeito apenas à *FT* e à *DTFT*.

Diferenciação no Tempo

Considera-se a diferenciação no tempo de um sinal contínuo e não-periódico $x(t)$,

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \; .$$

Diferenciando ambos os lados da equação anterior com relação ao tempo obtém-se

$$\frac{d}{dt} x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} j\omega X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \; .$$

Diferenciação no Tempo

$$\frac{d}{dt}x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} j\omega X(j\omega)e^{j\omega t}\,d\omega$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d}{dt}x(t) \stackrel{FT}{\longleftrightarrow} j\omega X(j\omega)$$

Exemplo 3.25:

Obter a representação em frequência do sinal

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-at}u(t)\right)$$

Diferenciação no Tempo

Se $x(t)$ for um sinal periódico, tem-se a representação por *FS*

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k] e^{jk\omega_0 t}$$

Diferenciando esta última equação em ambos os lados resulta em

$$\frac{d}{dt} x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} jk\omega_0 X[k] e^{jk\omega_0 t} \quad .$$

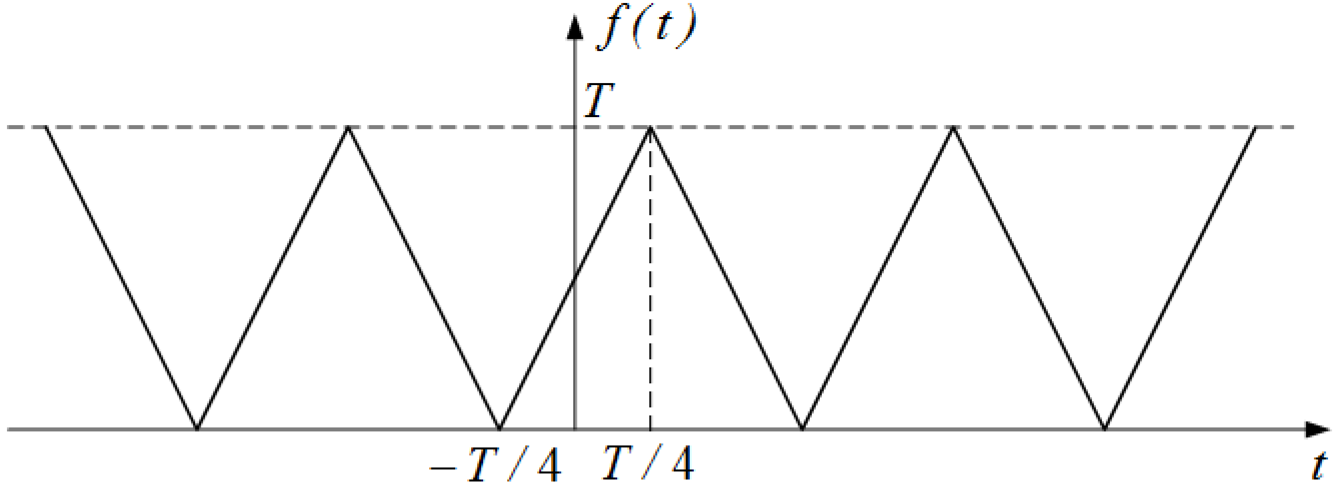
Diferenciação no Tempo

Sendo assim, tem-se a representação por série de Fourier da derivada temporal de um sinal periódico dada por

$$\frac{d}{dt}x(t) \overset{FS;\omega_0}{\longleftrightarrow} jk\omega_0 X[k] \; .$$

Exemplo 3.26:

Determine a representação por *FS* da onda triangular apresentada a seguir:



Diferenciação em Frequência

Considera-se agora a operação de diferenciação no domínio da frequência de um sinal:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$

Resultando em

$$\frac{d}{d\omega}X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} -jtx(t)e^{-j\omega t}dt \Rightarrow -jtx(t) \overset{FT}{\longleftrightarrow} \frac{d}{d\omega}X(j\omega)$$

Exercício 3.15:

Use a propriedade da diferenciação em frequência para determinar a Transformada de Fourier do sinal

$$x(t) = te^{-at}u(t)$$

Integração e Somatório:

A operação de integração aplica-se somente a variáveis independentes contínuas. Consequentemente, para o domínio tempo, esta operação seria aplicável à Transformada de Fourier - *FT* ou à Série de Fourier – *FS*.

Integração:

Considera-se então o sinal não-periódico $x(t)$, tal que

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau) d\tau$$

$$\frac{d}{dt} y(t) = x(t)$$

Integração:

Uma vez que

$$\frac{d}{dt}y(t) \overset{FT}{\longleftrightarrow} j\omega Y(j\omega)$$

e

$$x(t) \overset{FT}{\longleftrightarrow} X(j\omega)$$

resultaria em

$$j\omega Y(j\omega) = X(j\omega) \Rightarrow Y(j\omega) = \frac{1}{j\omega}X(j\omega)$$

Integração e Somatório:

Desta forma

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \overset{FT}{\leftrightarrow} \frac{1}{j\omega}X(j\omega)$$

O análogo em tempo discreto da integração é o somatório, ou seja

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \quad .$$

Somatório

O análogo em tempo discreto da diferenciação é a diferença. A operação de diferença recupera $x[n]$ de $y[n]$, ou seja

$$x[n] = y[n] - y[n-1] \; .$$

Isto resulta na propriedade da diferença. Supondo $x[n]$ um sinal não-periódico

$$x[n] \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} X(e^{j\Omega}) = Y(e^{j\Omega}) - e^{-j\Omega} Y(e^{j\Omega}) \; .$$

Propriedades da Diferenciação, Integração e Somatório Comumente Usadas
$$\frac{d}{dt}x(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} j\omega X(j\omega)$$ $$\frac{d}{dt}x(t) \overset{FS;\omega_0}{\leftrightarrow} jk\omega_0 X[k]$$ $$-jtx(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} \frac{d}{d\omega}X(j\omega)$$ $$-jnx[n] \overset{DTFT}{\leftrightarrow} \frac{d}{d\Omega}X(e^{j\Omega})$$ $$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \overset{FT}{\leftrightarrow} \frac{1}{j\omega}X(j\omega)$$ $$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \overset{DTFT}{\leftrightarrow} \frac{X(e^{j\Omega})}{1-e^{-j\Omega}}$$

Exemplo 3.28:

Determinar $x(t)$ dado:

$$X(j\omega) = j\frac{d}{d\omega}\left\{\frac{e^{j2\omega}}{1 + j\omega/3}\right\}$$

Exercício 3.16:

Mostrar que a *DTFT* de

$$x[n] = n e^{j(\pi/8)n} \alpha^{n-3} u[n-3]$$

é dada por

$$X(j\omega) = j \frac{d}{d\omega} \left\{ \frac{e^{-j3(\Omega-\pi/8)}}{1-\alpha e^{-j(\Omega-\pi/8)}} \right\}.$$

Convolução e Modulação

Duas das propriedades mais importantes de representações de Fourier são a Convolução e a Modulação. Uma forma de Modulação refere-se à multiplicação de dois sinais: um destes sinais muda, ou modula, a amplitude do outro sinal. Será apresentado que a Convolução no domínio tempo será transformada em Modulação no domínio frequência, e vice-versa.

Convolução Não-Periódica

Considere a convolução de dois sinais de tempo contínuo não-periódicos $x(t)$ e $h(t)$. Admitindo $y(t)$ como o sinal resultante da operação de convolução entre estes sinais, ou seja:

$$y(t) = h(t) * x(t)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

Convolução Não-Periódica

Reescrevendo $x(t-\tau)$ na forma

$$x(t-\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega(t-\tau)}d\omega$$

e substituindo esta expressão na integral de convolução anterior obtém-se:

Convolução Não-Periódica

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}e^{-j\omega\tau}d\omega d\tau \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega
\end{aligned}
$$

Convolução Não-Periódica

Sendo

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$$

tem-se

$$y(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(j\omega)X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

.

Convolução Não-Periódica

Logo, $y(t)$ é a transformada de Fourier inversa de

$$H(j\omega)X(j\omega)$$

ou seja

$$Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega)$$

resultando em

$$y(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} Y(j\omega)$$

$$h(t) * x(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} H(j\omega)X(j\omega) \; .$$

Convolução Não-Periódica

Exemplo 3.29: Admitindo $x(t)=\frac{1}{\pi t}sen(\pi t)$ e $h(t)=\frac{1}{\pi t}sen(2\pi t)$, determinar $y(t)=x(t)*h(t)$.

Exemplo 3.30: Use a propriedade da convolução para determinar $x(t)$, em

$$x(t)\overset{FT}{\leftrightarrow}X(j\omega)=\frac{4}{\omega^2}sen^2(\omega).$$

Convolução Não-Periódica

Exercício 3.17: Dada a resposta ao impulso de um sistema $h(t) = 2e^{-2t}u(t)$ com entrada $x(t) = 3e^{-t}u(t)$, determinar a saída $y(t)$.

Exemplo 3.31: Considere um sinal $y[n]$, como sendo um sinal $x[n]$, mais uma distorção na forma

$$y[n] = x[n] + ax[n-1], |a| < 1$$

Determinar um sistema inverso que recupere o sinal original $x[n]$.

Convolução Não-Periódica

Exercício 3.18: Considere um sistema discreto cuja resposta ao impulso é

$$h[n] = \frac{1}{\pi n} sen\left(\frac{\pi}{4} n\right).$$

Determinar a saída $y[n]$ às entradas:

a) $x[n] = \frac{1}{\pi n} sen\left(\frac{\pi}{8} n\right)$ e b) $x[n] = \frac{1}{\pi n} sen\left(\frac{\pi}{2} n\right)$.

Modulação Não-Periódica

Se $x(t)$ e $z(t)$ forem sinais não-periódicos, a transformada de Fourier do sinal $y(t) = x(t)z(t)$, produto dos sinais no tempo, será obtida admitindo que

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\upsilon)e^{j\upsilon t}d\upsilon$$

$$z(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} Z(j\eta)e^{j\eta}d\eta$$

Modulação Não-Periódica

Sendo assim, o produto $y(t) = x(t)z(t)$ pode ser escrito na forma:

$$y(t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\upsilon)Z(j\eta)e^{j(\upsilon+\eta)} d\eta \, d\upsilon$$

Realiza-se então a seguinte mudança de variáveis, $\eta = \omega - \upsilon$.
Reescrevendo a equação anterior, obtém-se

Modulação Não-Periódica

$$y(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\nu)Z(j(\nu-\omega))d\nu e^{j\omega t}d\omega$$

A integral interna de υ representa a convolução de $Z(j\omega)$ e $X(j\omega)$, enquanto a integral externa está na forma da representação de Fourier para $y(t)$, ou seja

$$y(t) = x(t)z(t) \overset{FT}{\longleftrightarrow} \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * Z(j\omega).$$

Modulação Não-Periódica

Similaramente, se $x[n]$ e $z[n]$ forem sinais não periódicos de tempo discreto, a *DTFT* do produto $y[n]=x[n]z[n]$ será dada pela convolução de $X(e^{j\Omega})$ e $Z(e^{j\Omega})$, levando-se em conta a periodicidade dos sinais, portanto

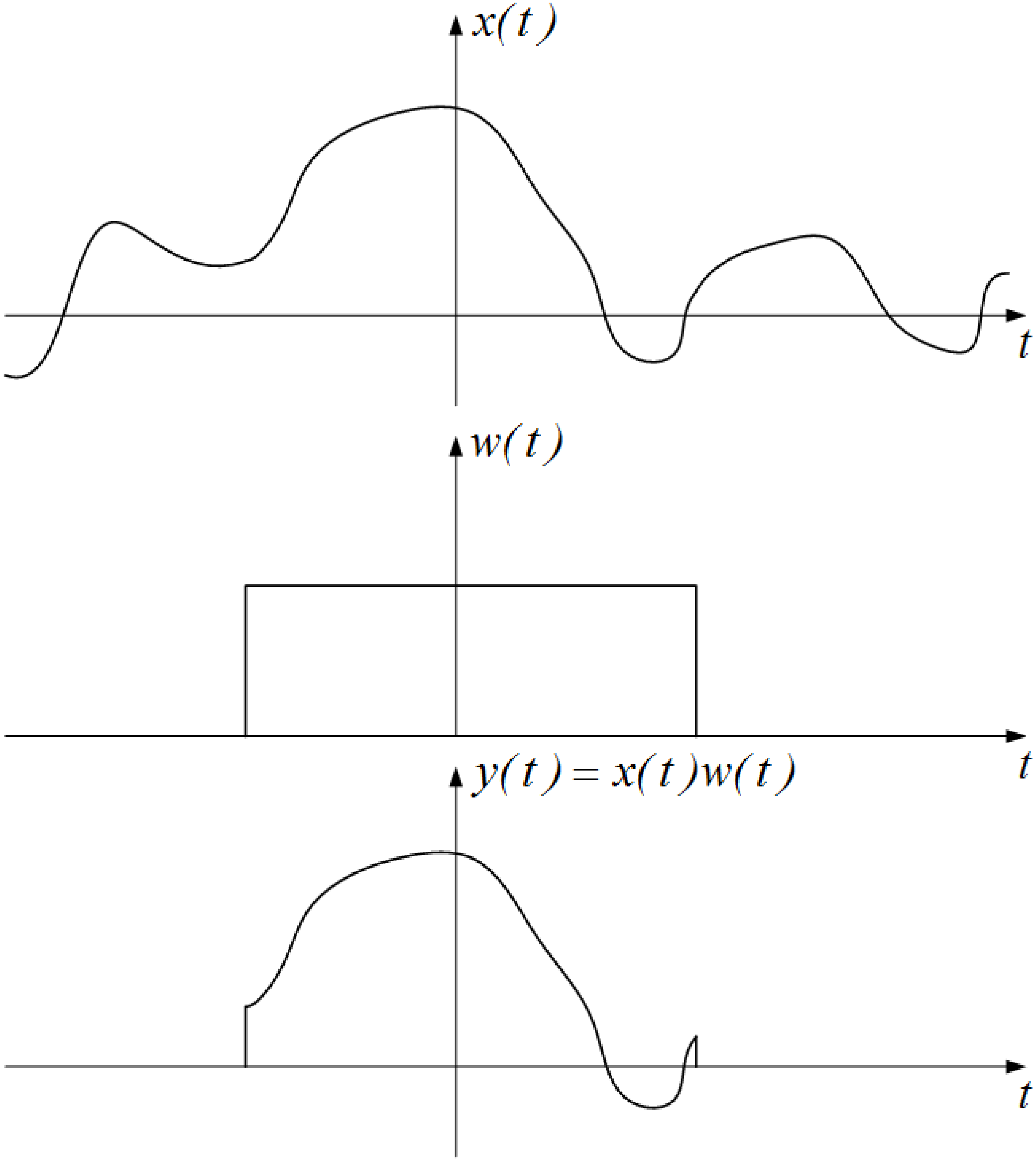
$$y[n]=x[n]z[n] \overset{DTFT}{\leftrightarrow} Y(e^{j\Omega})=\frac{1}{2\pi}X(e^{j\Omega})\otimes Z(e^{j\Omega})$$

Modulação Não-Periódica

onde o símbolo $\otimes$ denota <u>convolução periódica</u>, que deve ser realizada ao longo de um único período do sinal, isto é:

$$X(e^{j\Omega}) \otimes Z(e^{j\Omega}) = \int_{\langle 2\pi \rangle} X(e^{j\Omega}) \otimes Z(e^{j(\Omega-\theta)})\, d\theta$$

Uma aplicação da propriedade da Modulação é o ajanelamento *(windowing)*, que corresponde a visualizar o sinal através de uma janela.



$x(t)$
t
$w(t)$
t
$y(t) = x(t)w(t)$
t

Modulação Não-Periódica

Exercício 3.19: Utilize a propriedade da Modulação para encontrar a *FT* do sinal

$$x(t) = \frac{4}{(\pi t)^2}\sin^2(2t)$$

Convolução para Sinais Periódicos

A Convolução periódica de dois sinais de tempo contínuo $x(t)$ e $z(t)$, com período fundamental igual a T, será definida como

$$y(t) = x(t) \otimes z(t)$$
$$= \int_{\langle T \rangle} x(\tau) z(t-\tau) d\tau$$

onde o símbolo $\otimes$ denota que a integração é executada ao longo de um único período dos sinais envolvidos.

Convolução para Sinais Periódicos

O sinal resultante $y(t)$ também é periódico com período T. Consequentemente, a série de Fourier é a representação apropriada para todos os três sinais envolvidos, logo:

$$y(t) = x(t) \circledast z(t) \overset{FS;2\pi/T}{\longleftrightarrow} Y[k] = TX[k]Z[k]$$

Convolução para Sinais Periódicos

A convolução periódica para sinais de tempo discreto de duas sequências $x[n]$ e $z[n]$ com período N é definida como

$$y[n] = x[n] \otimes z[n]$$
$$= \sum_{k=\langle N \rangle} x[k] z[n-k] \,.$$

O sinal resultante $y[n]$ tem período N, de forma que a representação apropriada de todos os três sinais é dada por

$$y[n] = x[n] \otimes z[n] \xleftrightarrow{DTFS;2\pi/N} Y[k] = NX[k]Z[k]$$

Modulação para Sinais Periódicos

A propriedade da Modulação para sinais periódicos é análoga a de sinais não-periódicos, ou seja, a multiplicação de sinais no tempo corresponde à convolução das representações dos sinais em frequência. Para sinais de tempo contínuo tem-se

$$y(t) = x(t)z(t) \overset{FS;2\pi/T}{\longleftrightarrow} Y[k] = X[k] * Z[k]$$

onde

$$X[k] * Z[k] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} X[m]Z[k-m]$$

Modulação para Sinais Periódicos

é a convolução não-periódica dos coeficientes da *FS*. Todos os três sinais no domínio tempo tem o mesmo período fundamental T. Em tempo discreto

$$y[n] = x[n]z[n] \quad \xleftrightarrow{DTFS;2\pi/N} \quad Y[k] = X[k] \otimes Z[k]$$

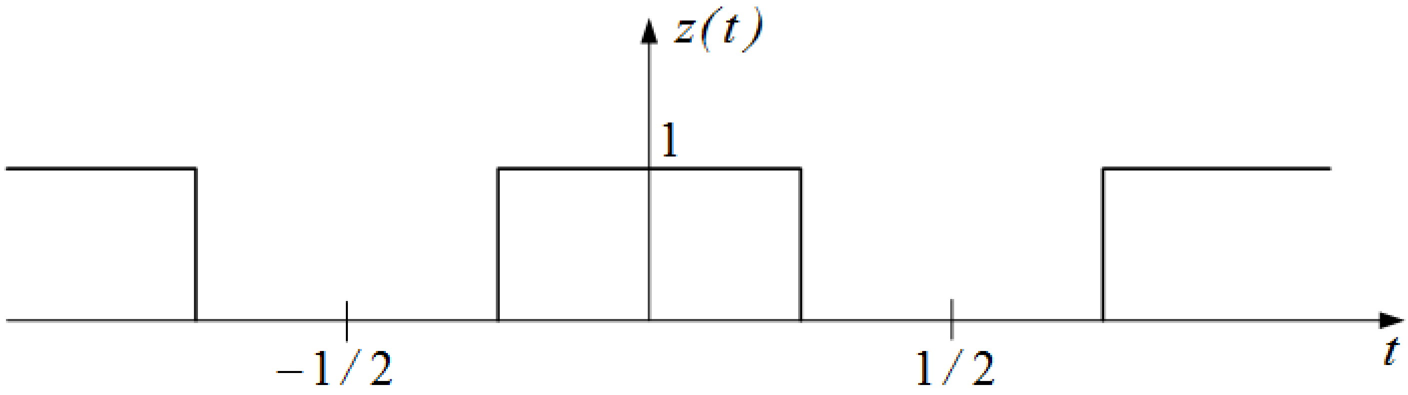
em que

$$x[k] \otimes z[k] = \sum_{m=\langle N \rangle} X[m]Z[k-m]$$

é a convolução periódica dos coeficientes da *DTFS*. Novamente, todos os três sinais têm período fundamental N.

Convolução para Sinais Periódicos

Exemplo 3.33: Avalie a convolução periódica do sinal senoidal $x(t) = 2\cos(2\pi t) + sen(4\pi t)$ com uma onda quadrada $z(t)$, de período igual a $T = 1s$, apresentada na figura a seguir:



Convolução e Modulação

Exemplo 3.34: Determinar a transformada de Fourier do sinal:

$$x(t) = \frac{d}{dt}\left\{(e^{-3t}u(t)) * (e^{-2t}u(t-2))\right\}$$

Exercício 3.20: Determinar $x[n]$ dado

$$X(e^{j\Omega}) = \left(\frac{e^{-j3\Omega}}{1 + 1/2e^{-j\Omega}}\right) \otimes \left(\frac{sen(21\Omega/2)}{sen(\Omega/2)}\right).$$

Propriedades da Convolução e Modulação

Convolução	Modulação
$x(t) * z(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} X(j\omega)Z(j\omega)$	$x(t)z(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * Z(j\omega)$
$x(t) \otimes z(t) \overset{FS:\omega_0}{\leftrightarrow} TX[k]Z[k]$	$x(t)z(t) \overset{FS:\omega_0}{\leftrightarrow} X[k] * Z[k]$
$x[n] * z[n] \overset{DTFT}{\leftrightarrow} X(e^{j\Omega})Z(e^{j\Omega})$	$x[n]z[n] \overset{DTFT}{\leftrightarrow} \frac{1}{2\pi} X(e^{j\Omega}) \otimes Z(e^{j\Omega})$
$x[n] \otimes z[n] \overset{DTFS:\Omega_0}{\leftrightarrow} NX[k]Z[k]$	$x[n]z[n] \overset{DTFS:\Omega_0}{\leftrightarrow} X[k] \otimes Z[k]$

Relações de Parseval

As relações de Parseval afirmam que a energia ou potência na representação de domínio tempo de um sinal é igual à representação de energia ou potência do mesmo sinal no domínio frequência. O resultado será apresentado para a *FT*, seguindo o mesmo procedimento para as outras três representações.

Relações de Parseval

A energia para um sinal não-periódico de tempo contínuo é:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, dt$$

Uma vez que $x(t)$ pode ser complexo, $|x(t)|^2 = x(t)x^*(t)$, sendo $x^*(t)$ expresso em função da representação por *FT* como

$$x^*(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X^*(j\omega) e^{-j\omega t} d\omega$$

.

Relações de Parseval

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X^*(j\omega) e^{-j\omega t} d\omega\, dt$$

ou ainda

$$E_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X^*(j\omega) \underbrace{\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \right\}}_{X(j\omega)} d\omega$$

resultando em

$$E_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2\, d\omega \quad .$$

Relações de Parseval

Sendo assim, a representação de energia no domínio tempo é igual à representação de energia no domínio frequência normalizada por 2π , ou seja:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\, x(t)\,|^2 \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\, X(j\omega)\,|^2 \, d\omega$$

Relações de Parseval para as Quatro Representações de Fourier

FT	$\int_{-\infty}^{\infty} \lvert x(t) \rvert^2 \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lvert X(j\omega) \rvert^2 \, d\omega$
FS	$\frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} \lvert x(t) \rvert^2 \, dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lvert X[k] \rvert^2$
DTFT	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \lvert x[n] \rvert^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\langle 2\pi \rangle} \lvert X(e^{j\Omega}) \rvert^2 \, d\Omega$
DTFS	$\frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} \lvert x[n] \rvert^2 = \sum_{k=\langle N \rangle} \lvert X[k] \rvert^2$

Relações de Parseval

Exemplo 3.35: Utilizar as relações de Parseval para avaliar

$$\chi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{sen^2(Wn)}{\pi^2 n^2}.$$

Exercício 3.21: Utilize as relações de Parseval para avaliar

$$\chi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{|j\omega + 2|^2} d\omega.$$