



## Resposta em Frequência de Sistemas LTI

A resposta em frequência de um sistema LTI fornece a caracterização intuitiva do comportamento entrada-saída do sistema. Isto ocorre porque a convolução no domínio tempo transforma-se em multiplicação no domínio frequência. Sendo assim, a saída do sistema representada no domínio frequência é obtida multiplicando-se a representação em frequência do sinal de entrada pela resposta em frequência do sistema.



## Resposta ao Impulso

Conforme visto anteriormente, a resposta ao impulso e a resposta em frequência de um sistema contínuo ou discreto constituem um par *FT* ou *DTFT*, respectivamente:

$$h(t) \stackrel{FT}{\leftrightarrow} H(j\omega)$$

$$h[n] \stackrel{DTFT}{\leftrightarrow} H(e^{j\Omega})$$



## Resposta em Frequência de Sistemas LTI

Para que as duas representações sejam possíveis, as condições de Dirichlet devem ser satisfeitas, especificamente aquela condição em que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$$

caracterizando a resposta ao impulso do sistema de tempo contínuo como absolutamente integrável.



## Resposta ao Impulso

De forma análoga, para o caso de tempo discreto, a condição a ser satisfeita é

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$$

que caracteriza a resposta ao impulso do sistema como sendo absolutamente somável. Para ambos os casos, constata-se que a obtenção da resposta em frequência somente será possível se o sistema de interesse for **ESTÁVEL**.



Sendo assim, para o caso de sistemas de tempo contínuo tem-se a seguinte representação:

$$\begin{array}{c} x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t) \end{array} \quad y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t - \tau) d\tau$$

$$\begin{array}{c} X(j\omega) \longrightarrow \boxed{H(j\omega)} \longrightarrow Y(j\omega) \end{array} \quad Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega)$$



## Resposta em Frequência de Sistemas LTI

Ou ainda

$$y(t) = x(t) * h(t) \stackrel{FT}{\leftrightarrow} Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega)$$

para o caso de tempo contínuo, e

$$y[n] = x[n] * h[n] \stackrel{DTFT}{\leftrightarrow} Y(e^{j\Omega}) = H(e^{j\Omega})X(e^{j\Omega})$$

para o caso de tempo discreto.



# Resposta em Frequência de Sistemas LTI

A multiplicação entre as representações do sinal e do sistema no domínio frequência auxilia no entendimento do processo de filtragem, ou seja, o sistema pode apresentar diferentes ponderações ao sinal de entrada em função da frequência.



**Filtro Passa-Baixas:** Neste caso, o sistema atenua as frequências altas do sinal de entrada, deixando passar apenas as componentes de frequências mais baixas.

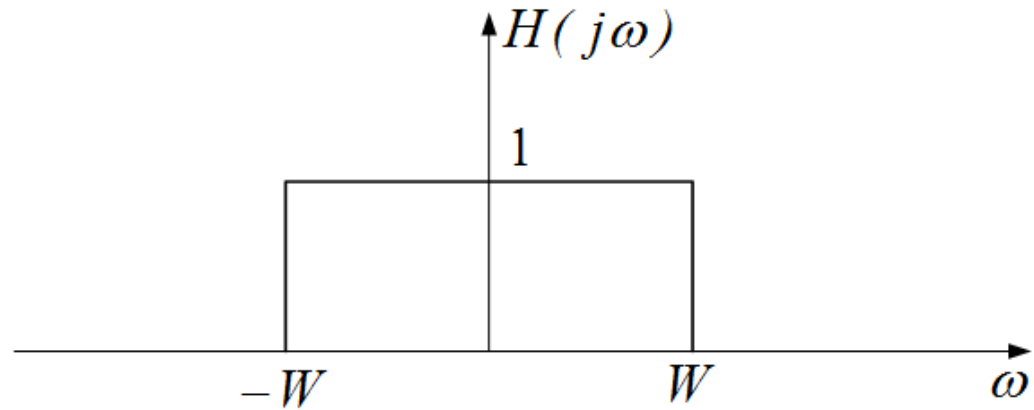
**Filtro Passa-Altas:** Neste caso, o sistema atenua as frequências baixas do sinal de entrada, deixando passar apenas as componentes de frequências mais altas.

**Filtro Passa-Faixa:** Neste caso, o sistema deixa passar sinais dentro de uma faixa de frequências, atenuando as componentes do sinal fora desta faixa.

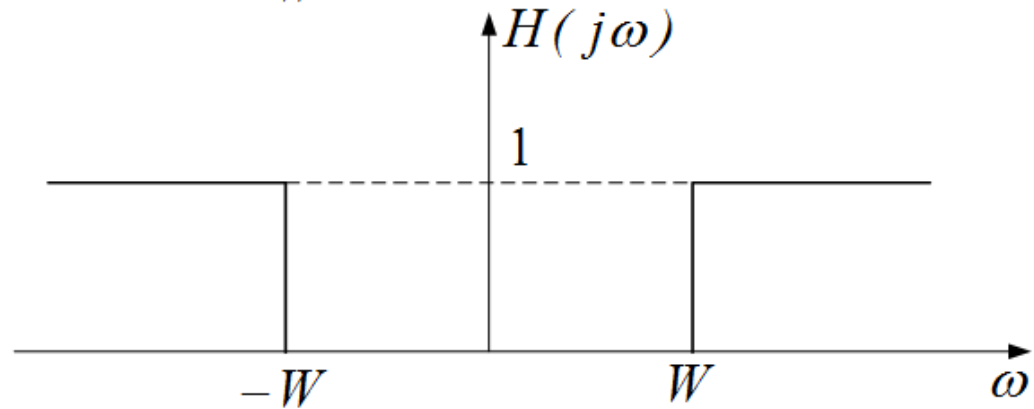


# Caso contínuo, resposta em frequência de filtros ideais.

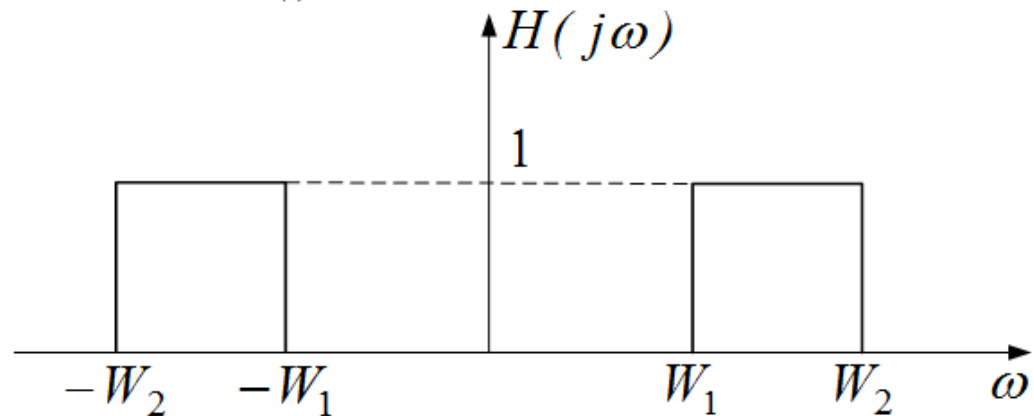
Passa-Baixas



Passa-Altas

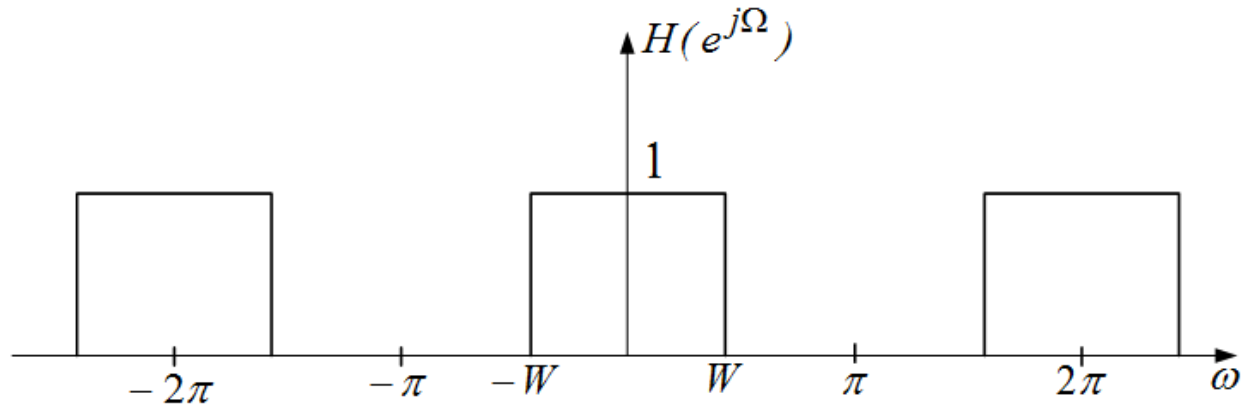


Passa-Faixa

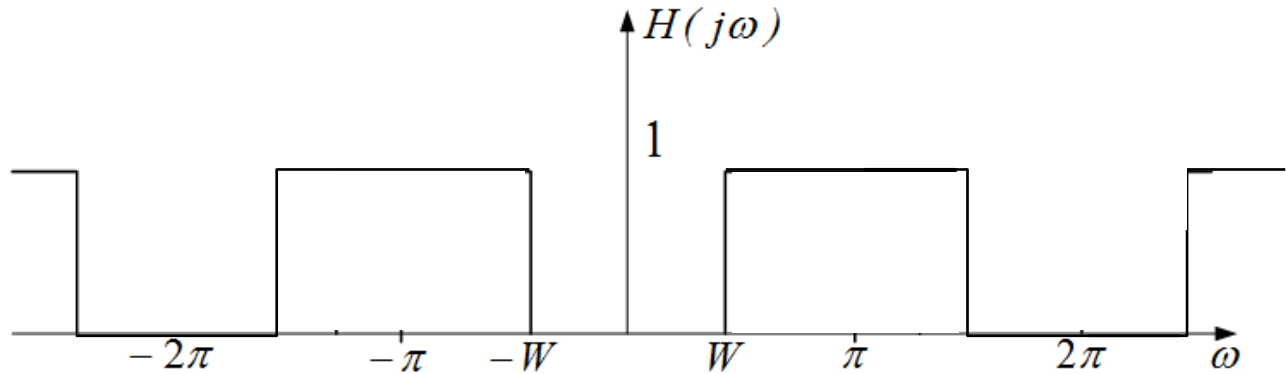


# Caso discreto, resposta em frequência de filtros ideais.

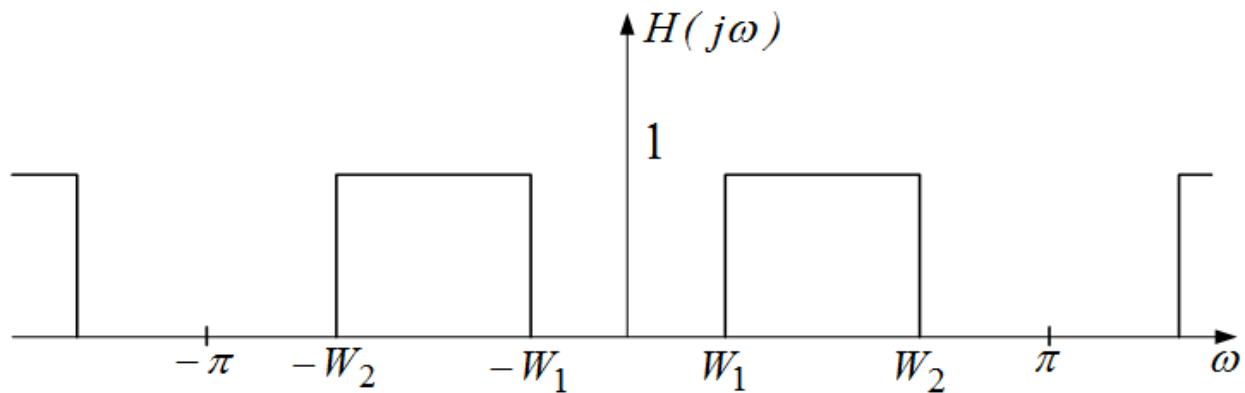
Passa-Baixas



Passa-Altas



Passa-Faixa





Para o caso de tempo discreto, a caracterização do filtro ocorrerá para a faixa de frequência  $-\pi < \Omega < \pi$ , conforme apresentado na figura anterior.

Ainda para o caso dos filtros, são definidos os seguintes termos:

***Faixa de passagem:*** Intervalo de frequências que o filtro (sistema) permite que passe e estejam presentes no sinal de saída.



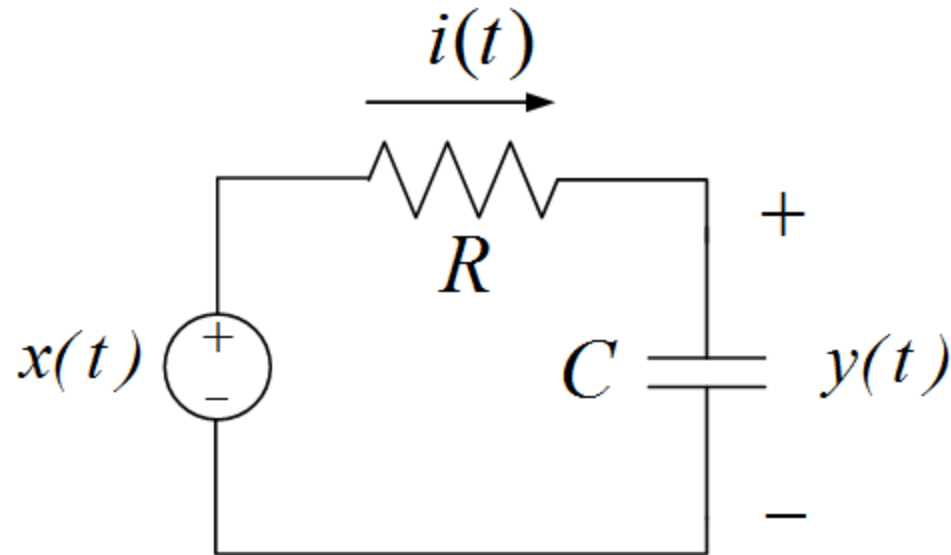
***Faixa de Rejeição:*** Intervalo de frequências que são atenuadas pelo filtro (sistema).

***Faixa de Transição:*** Diferentemente dos filtros ideais, entre as faixas de passagem e de rejeição existe um intervalo intermediário de frequências que compõe a faixa de frequências de transição.

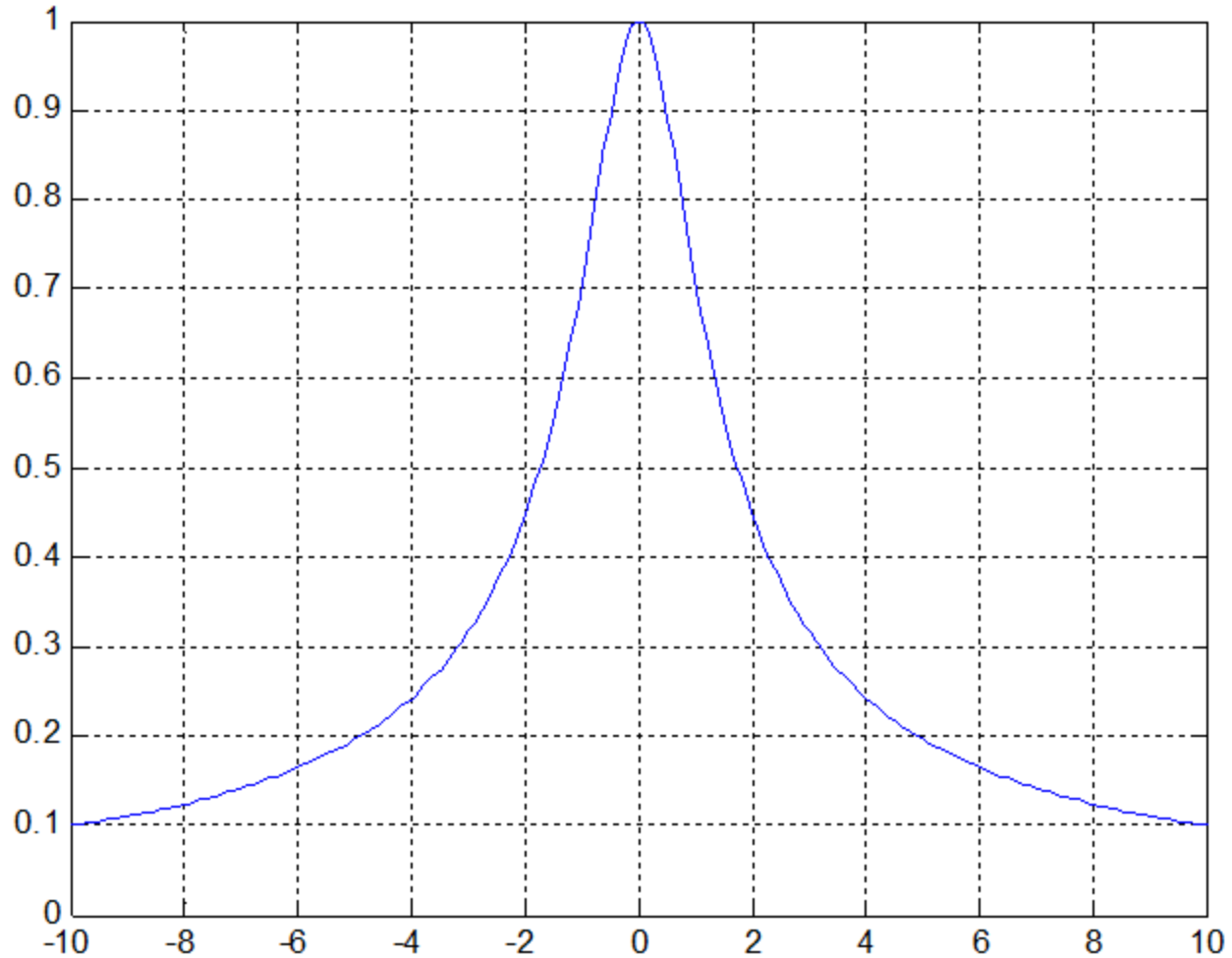


## Exemplo 4.1:

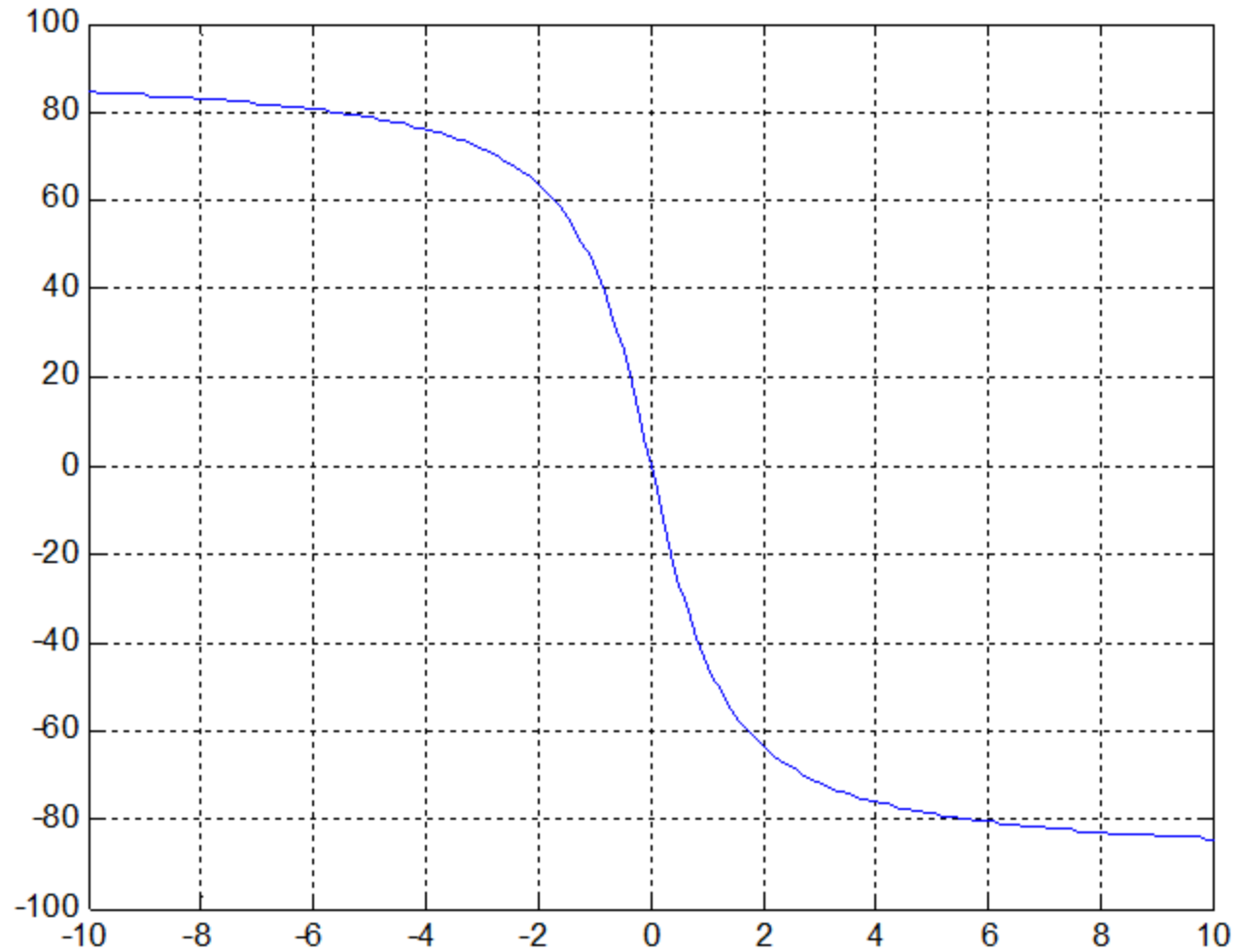
Obter a resposta em frequência do circuito RC apresentado a seguir:



# Diagrama de Magnitude



# Diagrama de Fase





Utilizando a propriedade da convolução no tempo e sua representação equivalente no domínio frequência tem-se

$$y(t) = x(t) * h(t) \stackrel{FT}{\leftrightarrow} Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega)$$

sendo então  $H(j\omega)$  também determinado na forma

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} .$$





O mesmo ocorrendo para o caso de tempo discreto, ou seja

$$y[n] = x[n] * h[n] \stackrel{DTFT}{\leftrightarrow} Y(e^{j\Omega}) = H(e^{j\Omega})X(e^{j\Omega})$$

sendo então  $H(e^{j\Omega})$  também determinado na forma

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{Y(e^{j\Omega})}{X(e^{j\Omega})} .$$



## Exemplo 4.2:

Dado  $x(t) = e^{-2t}u(t)$  e  $y(t) = e^{-t}u(t)$  determinar a resposta em frequência e a resposta ao impulso do sistema resultante:



# Descrições por Equações Diferenciais e de Diferenças

A representação por equações diferenciais de um sistema LTI pode ser realizada na forma:

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k}{dt^k} y(t) = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k}{dt^k} x(t)$$



Utilizando a propriedade de diferenciação e sua representação no domínio frequência tem-se:

$$\frac{d}{dt} g(t) \stackrel{FT}{\leftrightarrow} j\omega G(j\omega)$$

Daí

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k}{dt^k} y(t) \stackrel{FT}{\leftrightarrow} \sum_{k=0}^N a_k (j\omega)^k Y(j\omega)$$

e

$$\sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k}{dt^k} x(t) \stackrel{FT}{\leftrightarrow} \sum_{k=0}^M a_k (j\omega)^k X(j\omega)$$



Desta forma, a resposta em frequência do sistema  $H(j\omega)$  pode ser escrita como

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^N a_k (j\omega)^k}$$



De forma semelhante pode-se obter a função de resposta em frequência para sistemas de tempo discreto, ou seja:

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

Uma vez que pela propriedade do deslocamento no tempo

$$g[n-k] \stackrel{FT}{\leftrightarrow} e^{-jk\Omega} G(e^{j\Omega})$$



Pode-se reescrever a equação de diferenças com a sua representação no domínio frequência como

$$\sum_{k=0}^N a_k e^{-jk\Omega} Y(e^{j\Omega}) = \sum_{k=0}^M b_k e^{-jk\Omega} X(e^{j\Omega})$$

obtendo, a partir desta relação, a função  $H(e^{j\Omega})$

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{Y(e^{j\Omega})}{X(e^{j\Omega})} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k e^{-jk\Omega}}{\sum_{k=0}^N a_k e^{-jk\Omega}}$$



### Exemplo 4.3:

Determinar a resposta em frequência e a resposta ao impulso do sistema descrito pela seguinte equação diferencial:

$$\frac{d^2}{dt^2} y(t) + 3 \frac{d}{dt} y(t) + 2y(t) = 2 \frac{d}{dt} x(t) + x(t)$$





## Exercício 4.1:

Determinar a resposta em frequência e a resposta ao impulso do sistema descrito pela seguinte equação de diferenças:

$$6y[n] + 5y[n - 1] + y[n - 2] = 18x[n] + 8x[n - 1]$$