



Diagramas de Bode

- Introdução
- Diagramas de Bode
- Escala Logarítmica de Amplitude
- Escala Logarítmica de Frequência
- Análise dos Termos das Funções de Resposta em Frequência
- Composição do Diagrama de Bode



Diagramas de Bode

- ◆ Introduzido em 1940
- ◆ H.W. Bode
- ◆ Análise de Amplificadores Eletrônicos
 - Análise de sistemas de diferentes naturezas
 - Termos de primeira e segunda ordem
 - Traçado rápido e manual
 - Curvas de Magnitude $|H(j\omega)|$ e fase de $H(j\omega)$



Obtenção do Diagrama de Bode:

- ◆ Regime Permanente Senoidal
- ◆ Curva de Magnitude de $H(j\omega)$
 - Traçada em função da frequência escala log-log
- ◆ Curva de Fase de $H(j\omega)$
 - Traçada em função da frequência escala linear-log



Escala Logarítmica de Amplitude

◆ Eixo das ordenadas em Decibéis

- Alexander Graham Bell
- Relação de dois níveis de potência
- Elementos Dissipativos
 - Relação quadrática entre as variáveis e os elementos



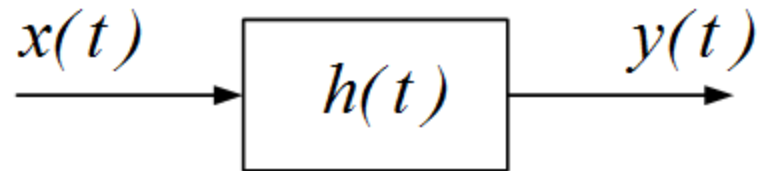
Exemplo:

- ◆ 100 rad/s
 - 2 oitavas (2^2) acima de 25 rad/s
- ◆ 100 rad/s
 - 3 décadas abaixo (10^{-3}) de 100.000 rad/s

Sistemas e Sinais

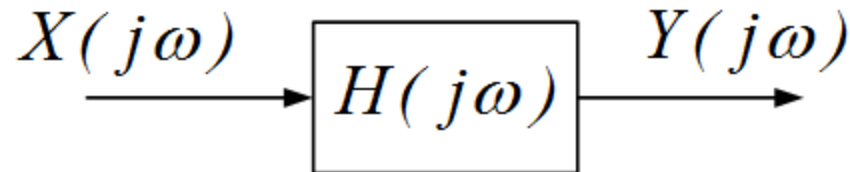
Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Departamento de Engenharia Elétrica



$$x(t) = A \operatorname{sen}(\omega t)$$

$$y(t) = B \operatorname{sen}(\omega t + \phi)$$



$$B = A |H(j\omega)|$$

$$\phi = \arg\{H(j\omega)\}$$



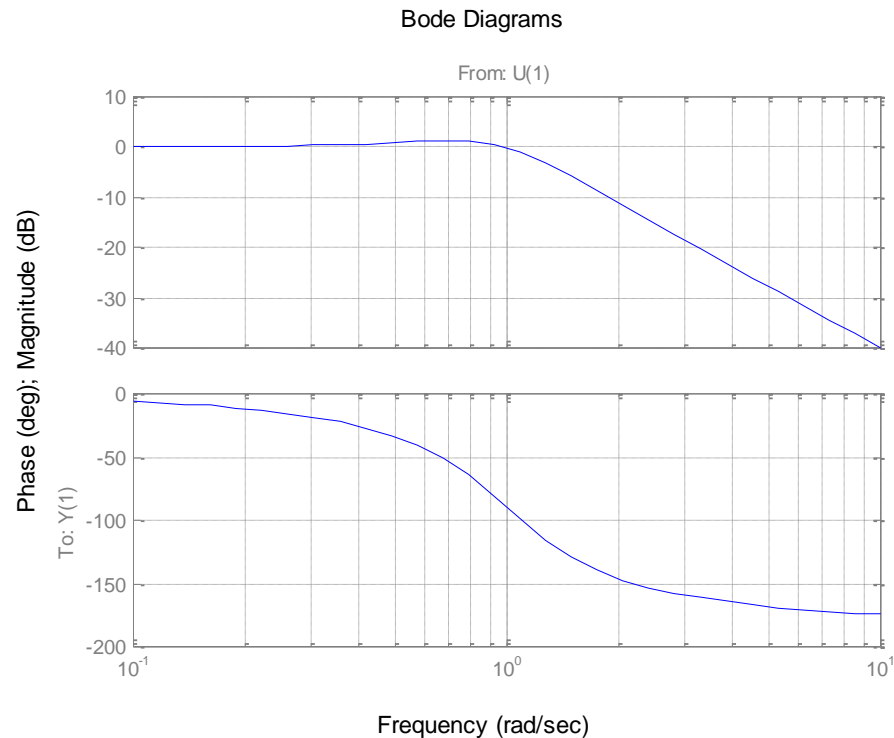
Razão Entre Amplitudes:

- ◆ Amplitude do Sinal de Saída - $| Y(j\omega) |$
- ◆ Amplitude do Sinal de Entrada - $| X(j\omega) |$

$$20 \log_{10} | H(j\omega) | = 20 \log_{10} \left(\frac{| Y(j\omega) |}{| X(j\omega) |} \right)$$



Exemplo de um Diagrama de Bode:





Exemplo:

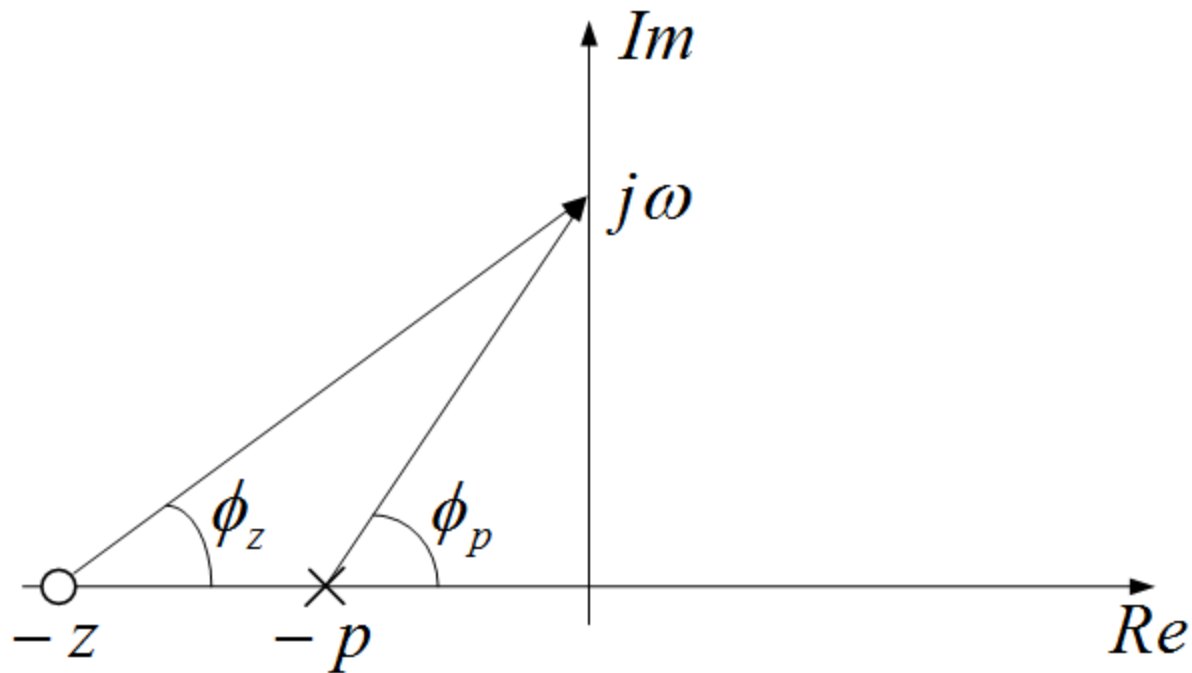
$$H(j\omega) = \frac{j\omega + z}{j\omega + p}$$

$$|H(j\omega)| = \frac{\sqrt{\omega^2 + z^2}}{\sqrt{\omega^2 + p^2}}$$

$$\phi = \text{atan}\left(\frac{\omega}{z}\right) - \text{atan}\left(\frac{\omega}{p}\right)$$



Exemplo - Representação Gráfica





Caso em que as raízes do numerador e do denominador de $H(j\omega)$ são reais e negativas.

$$|H(j\omega)| = |K| \frac{\prod_{i=1}^m \sqrt{z_i^2 + \omega^2}}{\prod_{j=1}^n \sqrt{p_j^2 + \omega^2}}$$

$$20 \log_{10} |H(j\omega)| = 20 \left(\log |K| + \sum_{i=1}^m \log_{10} \sqrt{z_i^2 + \omega^2} - \sum_{j=1}^n \log_{10} \sqrt{p_j^2 + \omega^2} \right)$$

$$\phi(H(j\omega)) = \sum_{i=1}^m a \tan\left(\frac{\omega}{z_i}\right) - \sum_{j=1}^n a \tan\left(\frac{\omega}{p_j}\right)$$

Sistemas e Sinais

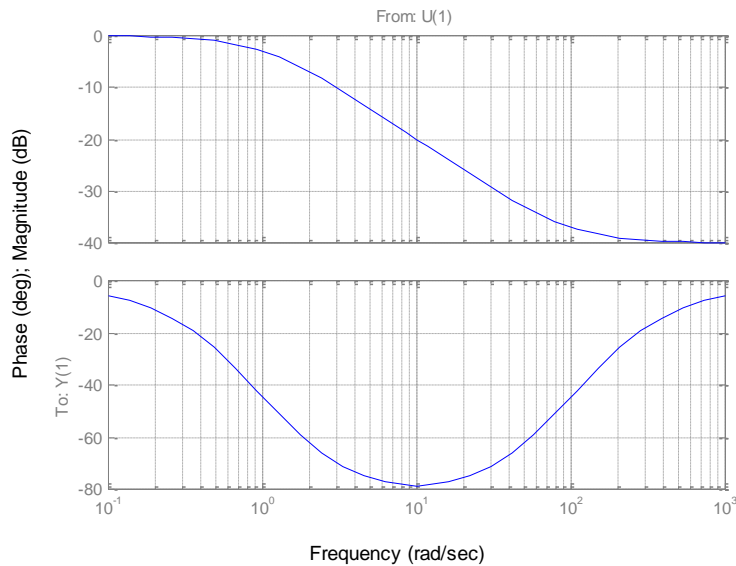
Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Departamento de Engenharia Elétrica

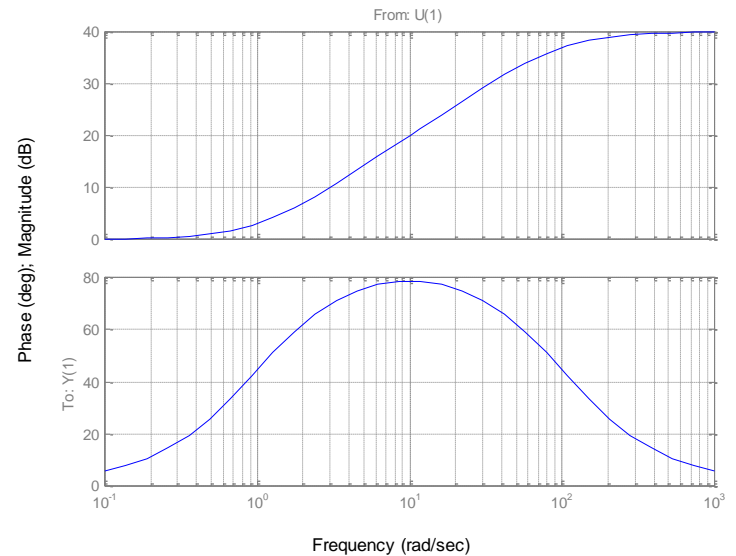


$$H(j\omega) = k \frac{j\omega + z}{j\omega + p}, \quad k = \frac{p}{z}$$

Bode Diagrams



Bode Diagrams





Resposta em Frequência

A forma mais comum de representação da resposta em frequência de um sistema é dada por uma função racional em $j\omega$, na forma

$$\begin{aligned} X(j\omega) &= \frac{b_m(j\omega)^M + b_{M-1}(j\omega)^{M-1} + \dots + b_1j\omega + b_0}{(j\omega)^N + a_{N-1}(j\omega)^{N-1} + \dots + a_1j\omega + a_0} \\ &= K \frac{\prod_{k=1}^M (j\omega - z_k)}{\prod_{k=1}^N (j\omega - p_k)} \end{aligned}$$

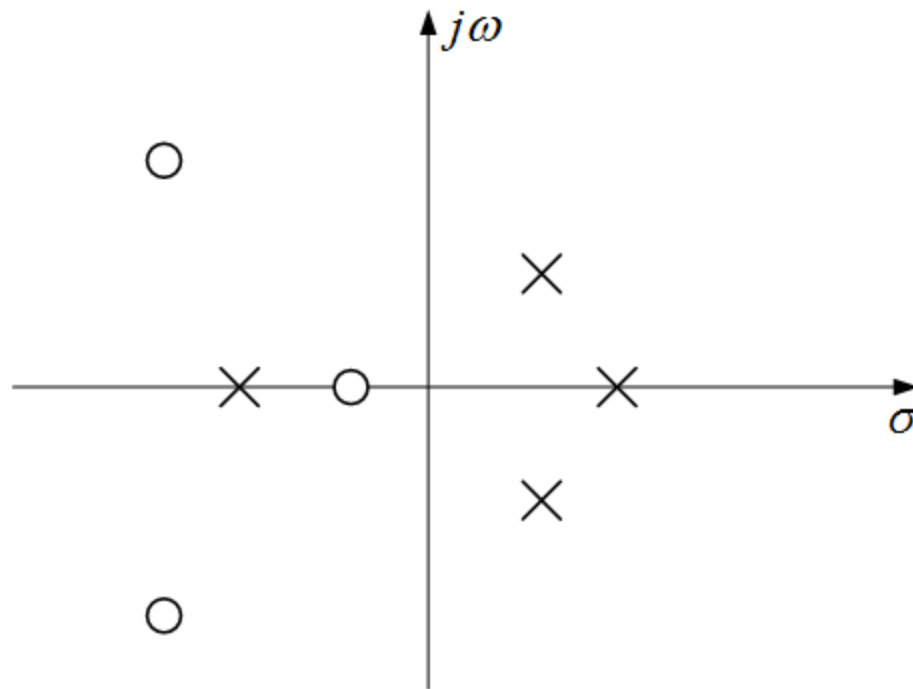


Resposta em Frequência

- z_k são as raízes do polinômio do numerador, denominados de *zeros finitos* de $X(j\omega)$.
- p_k são as raízes do polinômio do denominador de $X(j\omega)$, e são definidos como sendo os *polos* de $X(j\omega)$.
- a diferença entre os graus dos polinômios do denominador e do numerador, $N-M$, é definido como sendo o *grau relativo* de $X(j\omega)$.



Diagrama de Polos e Zeros





Análise dos Termos da Resposta em Frequência

$$H(j\omega) = K_o \frac{(j\omega\tau_{11} + 1)(j\omega\tau_{12} + 1)\cdots(j\omega\tau_{1m} + 1)}{(j\omega\tau_{21} + 1)(j\omega\tau_{22} + 1)\cdots(j\omega\tau_{2n} + 1)}$$

Uma vez que

$$\log_{10}[A \cdot B] = \log_{10}[A] + \log_{10}[B]$$

pode-se avaliar o efeito de cada um dos termos individualmente.



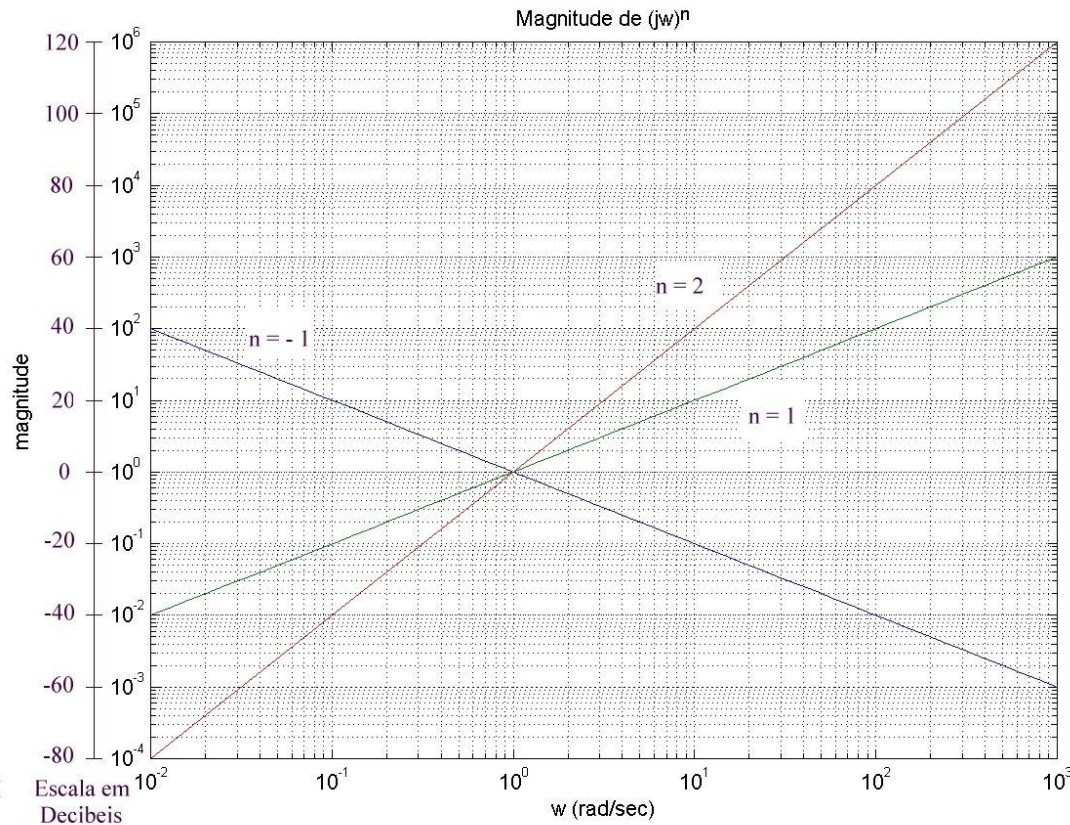
Primeira Classe de Termos

$$K_o(j\omega)^\gamma$$

$$20\log_{10}|K_o(j\omega)^\gamma| = 20\log_{10} K_o + 20\gamma\log_{10}|j\omega|$$



Primeira Classe de Termos $K_o(j\omega)^y$





Segunda Classe de Termos

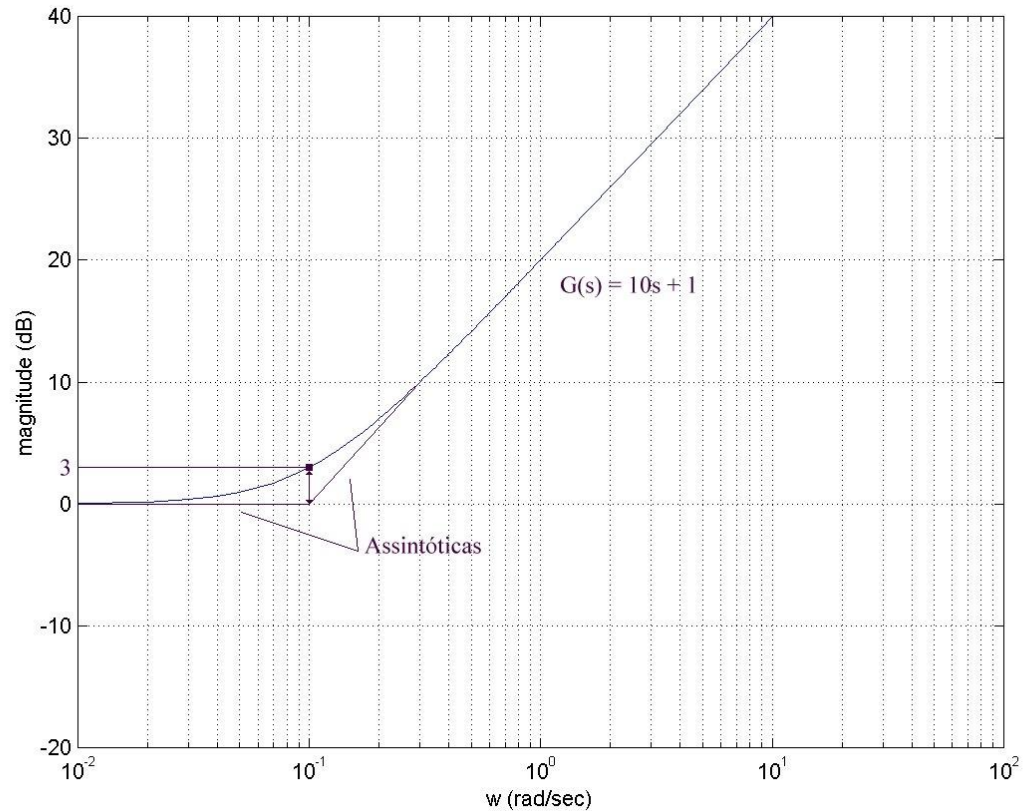
$$(j\omega\tau + 1)^{\pm 1}$$

$$\omega\tau \ll 1, j\omega\tau + 1 \cong 1$$

$$\omega\tau \gg 1, j\omega\tau + 1 \cong j\omega\tau$$

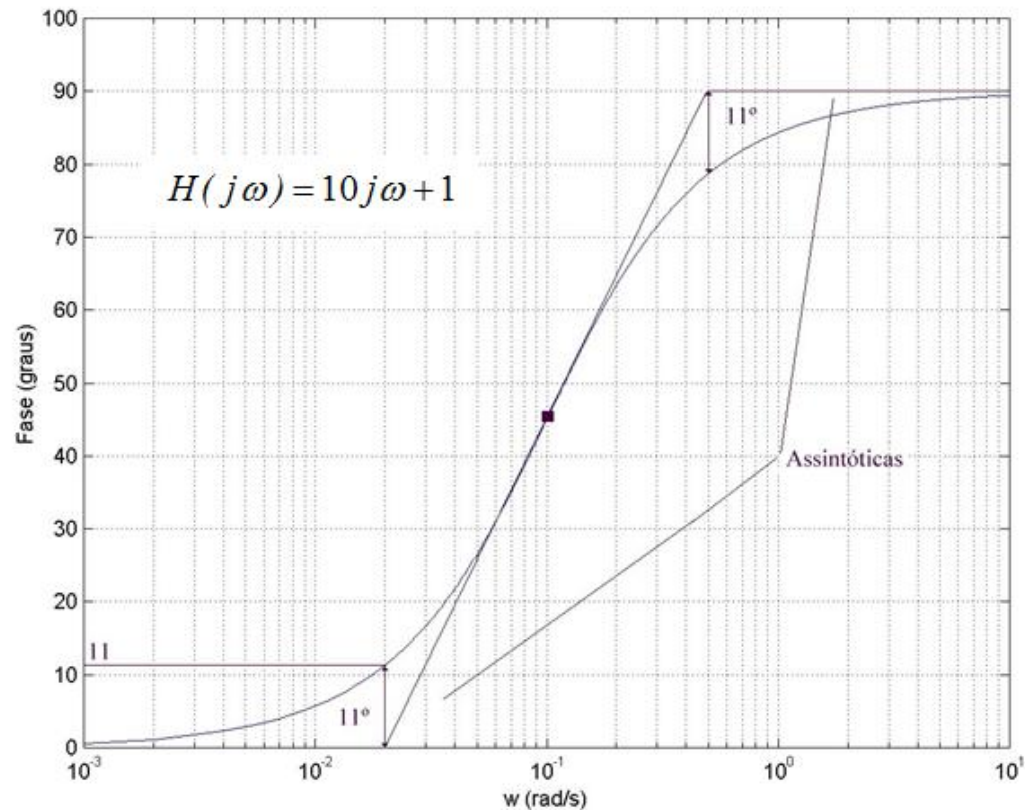


Segunda Classe de Termos $(j\omega\tau + 1)^{\pm 1}$





Segunda Classe de Termos – Curva de Fase





Exercício: Mostrar que para esta classe de termos

- No ponto de interseção das assíntotas de baixa e alta frequências, assíntotas diferem da curva real de magnitude em 3.0 dB, para o caso de termos do numerador e em -3.0 dB para o caso de termos do denominador.
- A curva assintótica tem contribuição de fase de 45° na frequência de cada raiz do numerador e de -45° na frequência de cada raiz do denominador, isto é, quando $\omega\tau = 1$
- As curvas real e assintótica diferem de $+11^\circ$ e -11° para $\omega\tau = 0.2$ e $\omega\tau = 5$, no caso de termos do denominador.
- Frequências uma década abaixo do ponto de quebra praticamente não exercem influência nas curvas de magnitude e fase.



Terceira Classe de Termos

$$\left[\left(\frac{j\omega}{\omega_n} \right)^2 + 2\xi \frac{j\omega}{\omega_n} + 1 \right]^{\pm 1}$$

$$H(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2 + 2\xi\omega_n(j\omega) + \omega_n^2}$$



Características de Magnitude e de Fase

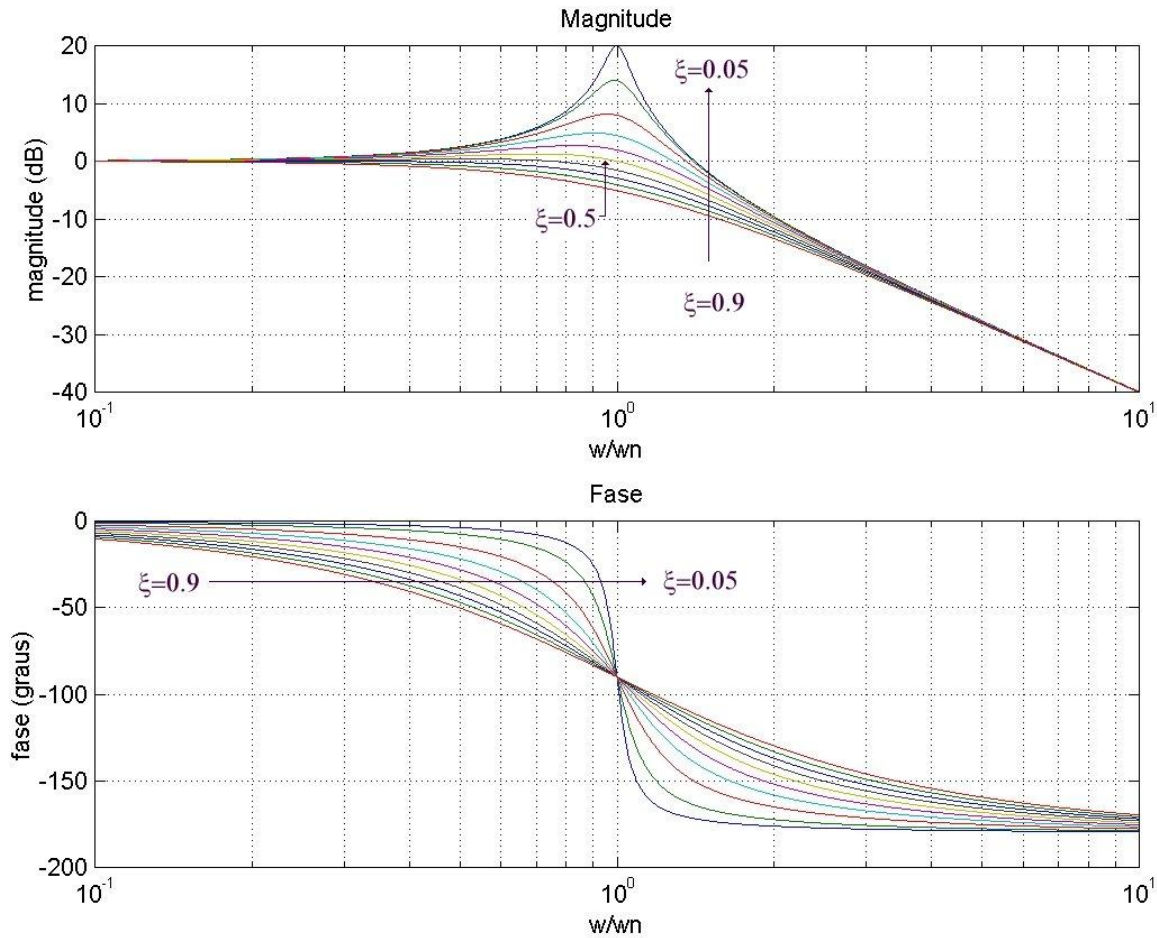
$$\omega \ll \omega_n \quad , \quad H(j\omega) \approx 1$$

$$\omega \gg \omega_n \quad , \quad H(j\omega) \approx \left(j \frac{\omega}{\omega_n} \right)^{\pm 2} \left\{ \begin{array}{l} \pm 2 \times 20 \log \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right) \\ \pm 2 \times 90^\circ \end{array} \right.$$

Sistemas e Sinais

Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Departamento de Engenharia Elétrica





Exercício 1: Considere um sistema com a seguinte resposta em frequência, com $0 < \xi < 1$

$$H(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2 + 2\xi\omega_n(j\omega) + \omega_n^2}.$$

Obter as equações de magnitude e fase, justificando as curvas apresentadas anteriormente.



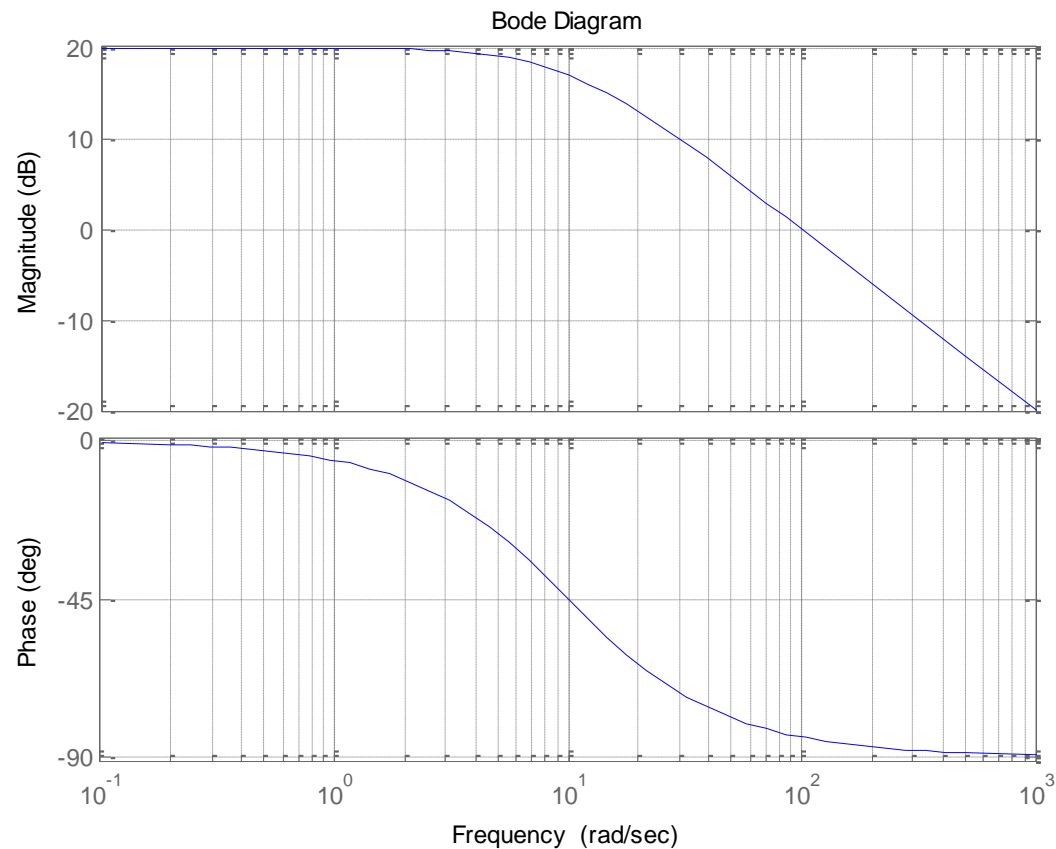
Exercício 2: Obtenha as equações de magnitude e de fase e trace os diagramas de Bode *assintótico e real* para um sistema com a seguinte resposta em frequência.

$$H(j\omega) = \frac{100}{j\omega + 10}$$

Sistemas e Sinais

Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Departamento de Engenharia Elétrica



Diagramas de Bode



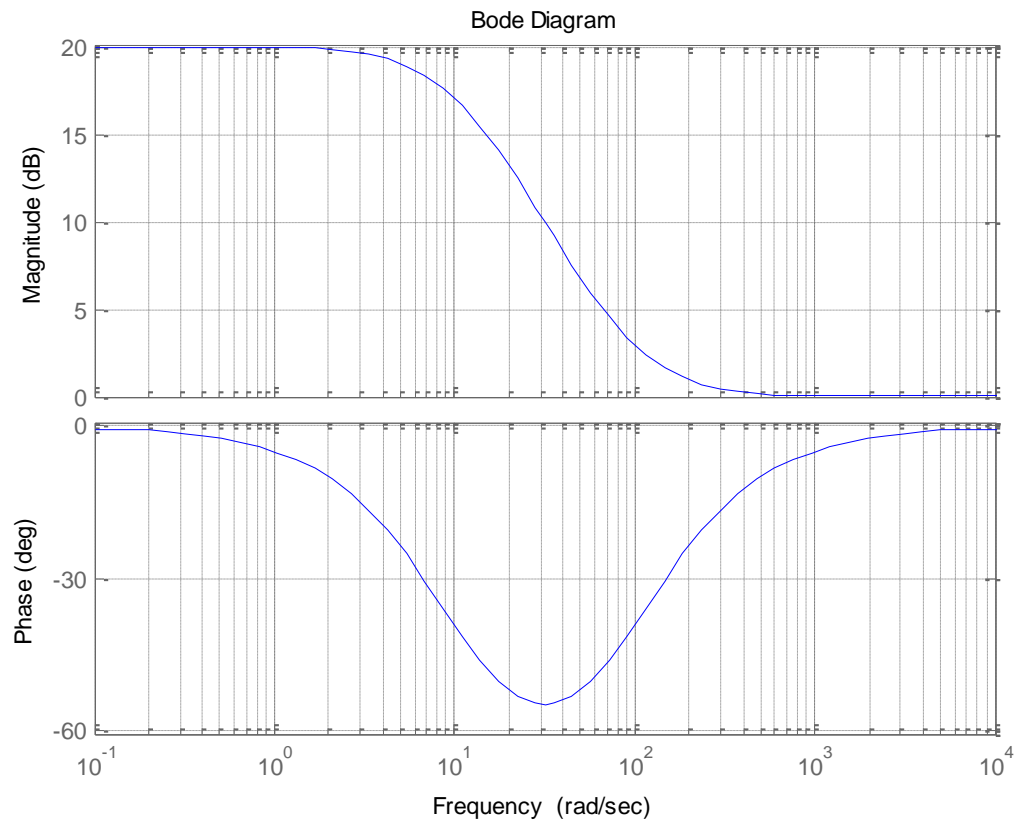
Exercício 3: Obtenha as equações de magnitude e de fase e trace os diagramas de Bode *assintótico e real* para um sistema com a seguinte resposta em frequência.

$$H(j\omega) = \frac{j\omega + 100}{j\omega + 10}$$

Sistemas e Sinais

Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Departamento de Engenharia Elétrica





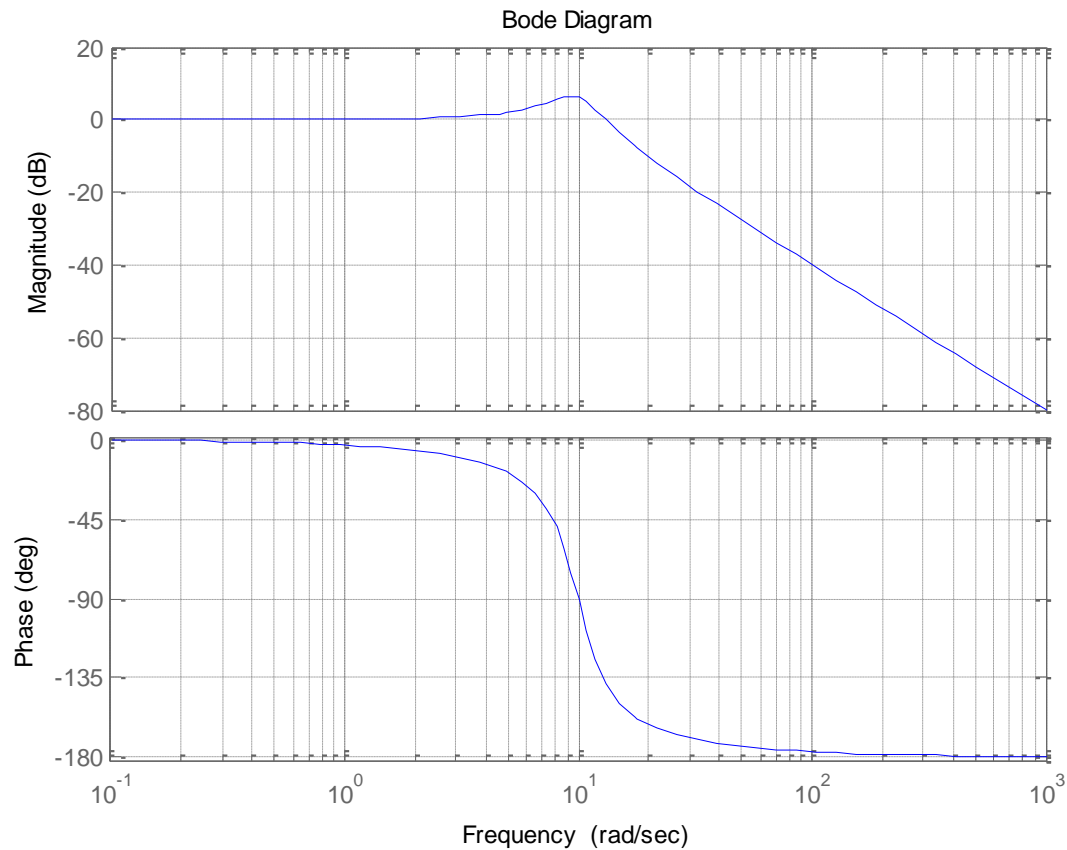
Exercício 4: Obtenha as equações de magnitude e de fase e trace os diagramas de Bode assintótico e real para um sistema com a seguinte resposta em frequência.

$$H(j\omega) = \frac{100}{(j\omega)^2 + 5(j\omega) + 100}$$

Sistemas e Sinais

Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Departamento de Engenharia Elétrica



Sistemas e Sinais

Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Departamento de Engenharia Elétrica



Para todos os exercícios apresentados a seguir, determinar o ganho DC, grau relativo e a expressão do sinal de saída $y(t)$, em regime permanente de operação, considerando como sinal de entrada do sistema

$$x(t) = 10 \operatorname{sen}(20t) + 5 \operatorname{cos}\left(100t + \frac{\pi}{2}\right)$$



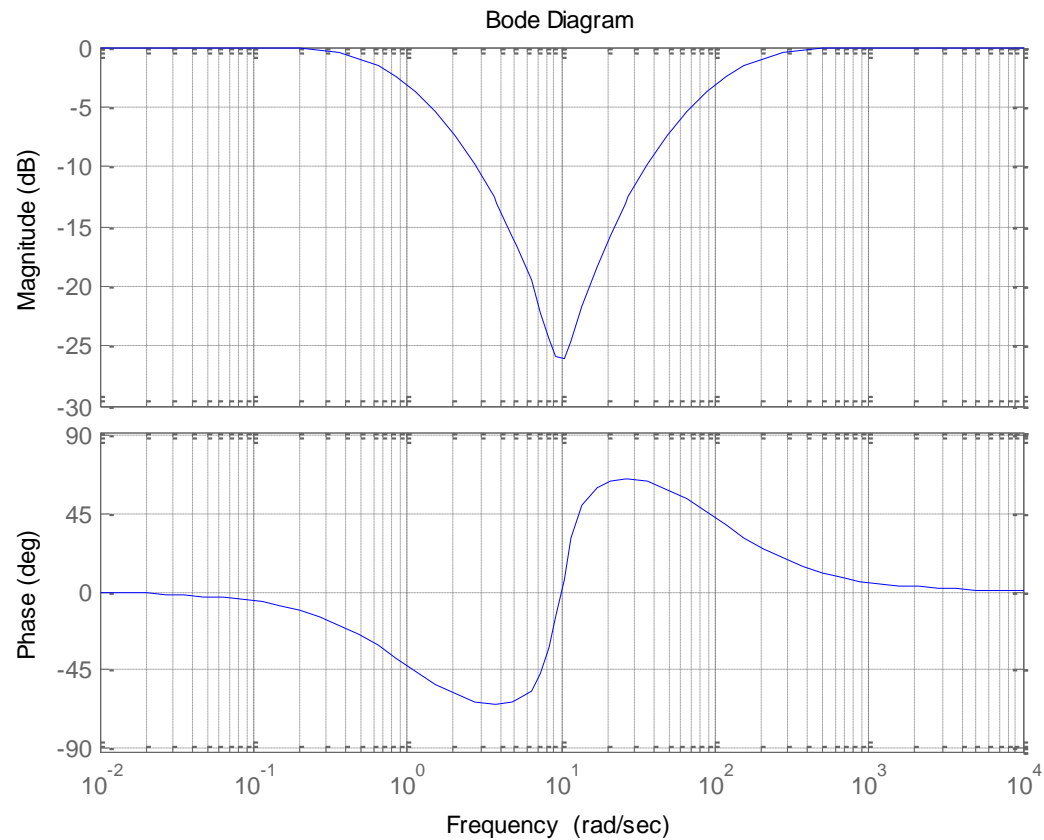
Exercício 5: Obtenha as equações de magnitude e de fase e trace os diagramas de Bode assintótico e real para um sistema com a seguinte resposta em frequência.

$$H(j\omega) = \frac{(j\omega)^2 + 5(j\omega) + 100}{(j\omega + 1)(j\omega + 100)}$$

Sistemas e Sinais

Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Departamento de Engenharia Elétrica



Diagramas de Bode



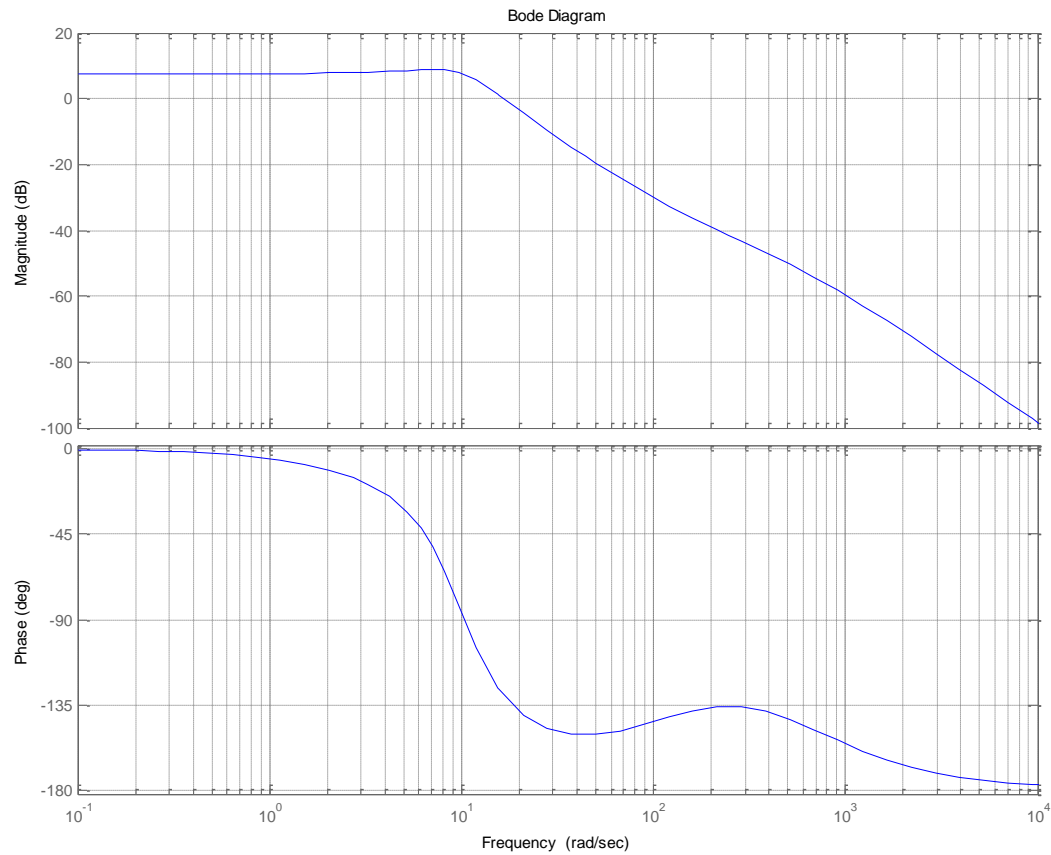
Exercício 6: Obtenha as equações de magnitude e de fase e trace os diagramas de Bode assintótico e real para um sistema com a seguinte resposta em frequência.

$$H(j\omega) = \frac{1200(j\omega + 120)}{[(j\omega)^2 + 10j\omega + 100](j\omega + 600)}$$

Sistemas e Sinais

Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Departamento de Engenharia Elétrica





Exercício 7: Obtenha as equações de magnitude e de fase e trace os diagramas de Bode assintótico e real para um sistema com a resposta em frequência abaixo. Para este sistema, determine o sinal de entrada na forma $x(t) = A \text{sen}(\omega t)$ admitindo que o sinal de saída em regime permanente de operação é dado por

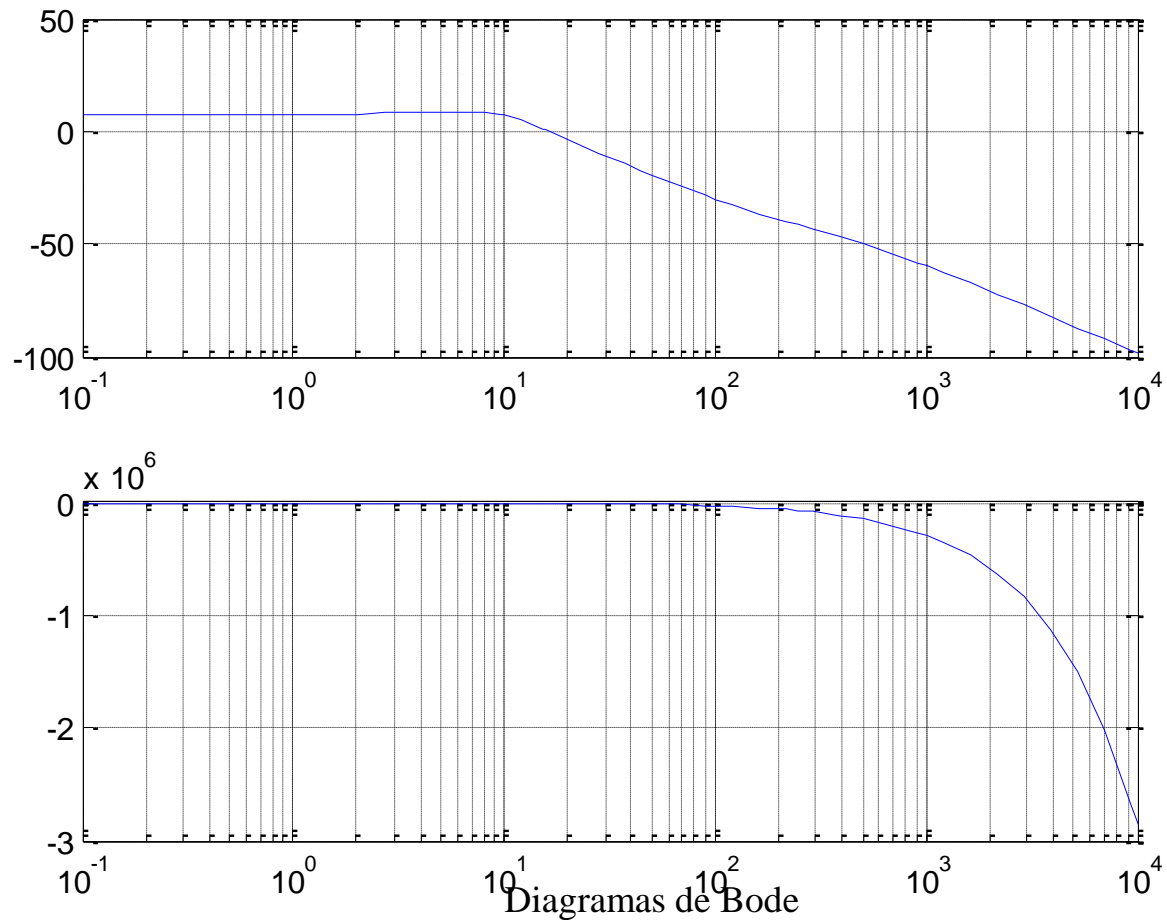
$$y(t) = 10 \text{sen}\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$H(j\omega) = \frac{1200 e^{-j\omega 5} (j\omega + 120)}{[(j\omega)^2 + 10j\omega + 100](j\omega + 600)}$$

Sistemas e Sinais

Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Departamento de Engenharia Elétrica





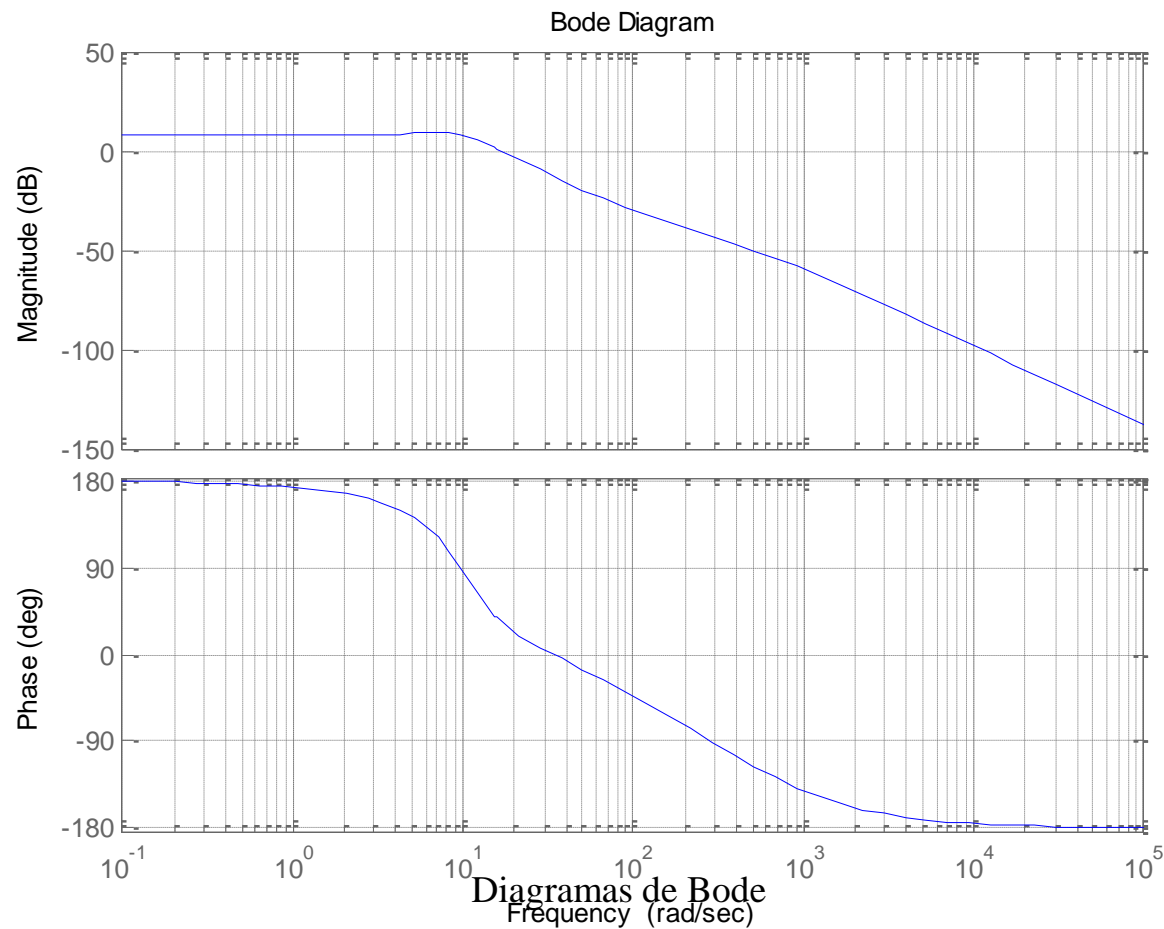
Exercício 8: Obtenha as equações de magnitude e de fase e trace os diagramas de Bode, assintótico e real para um sistema com a seguinte resposta em frequência.

$$H(j\omega) = \frac{1200(j\omega - 120)}{[(j\omega)^2 + 10j\omega + 100](j\omega + 600)}$$

Sistemas e Sinais

Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Departamento de Engenharia Elétrica





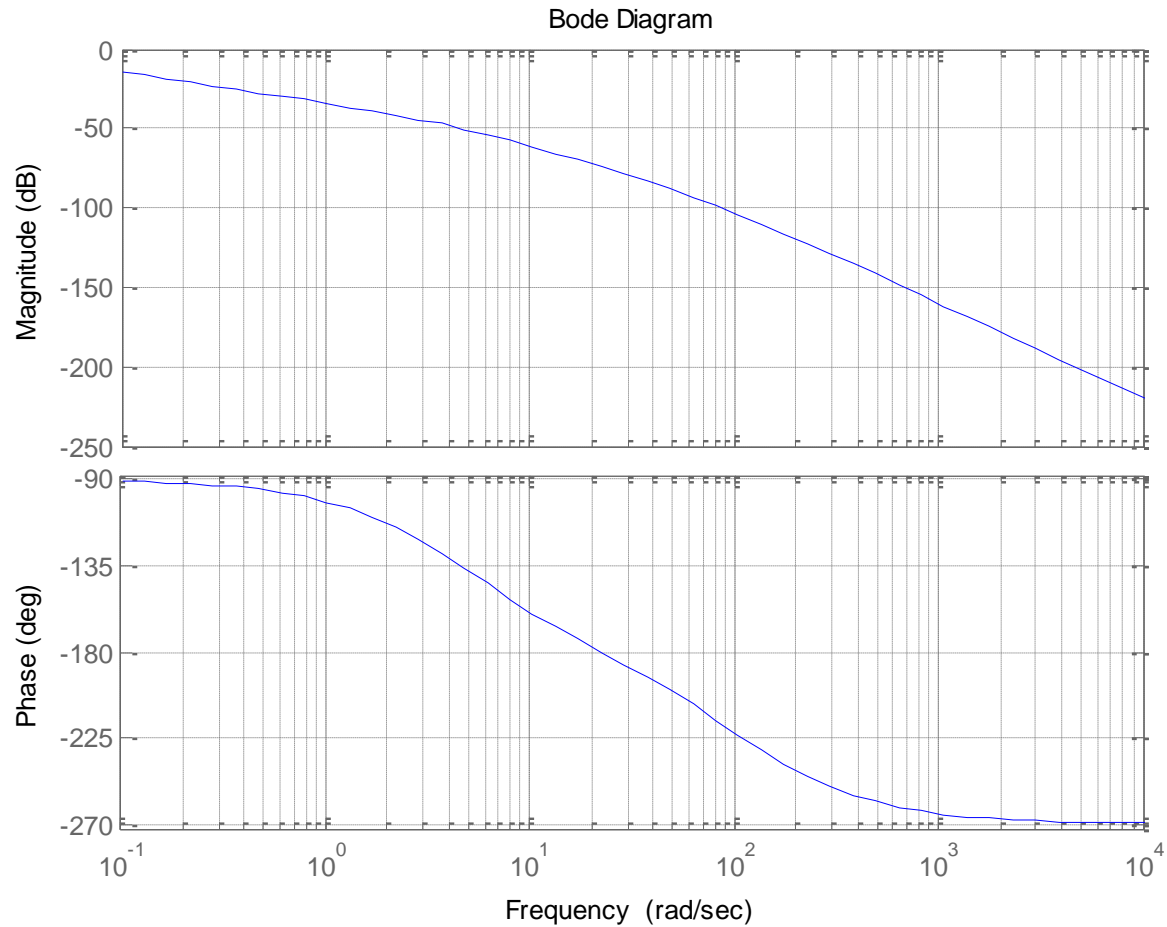
Exercício 9: Obtenha as equações de magnitude e de fase e trace os diagramas de Bode, assintótico e real para um sistema com a seguinte resposta em frequência.

$$H(j\omega) = \frac{10}{[(j\omega)^2 + 105j\omega + 500]j\omega}$$

Sistemas e Sinais

Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Departamento de Engenharia Elétrica



Diagramas de Bode



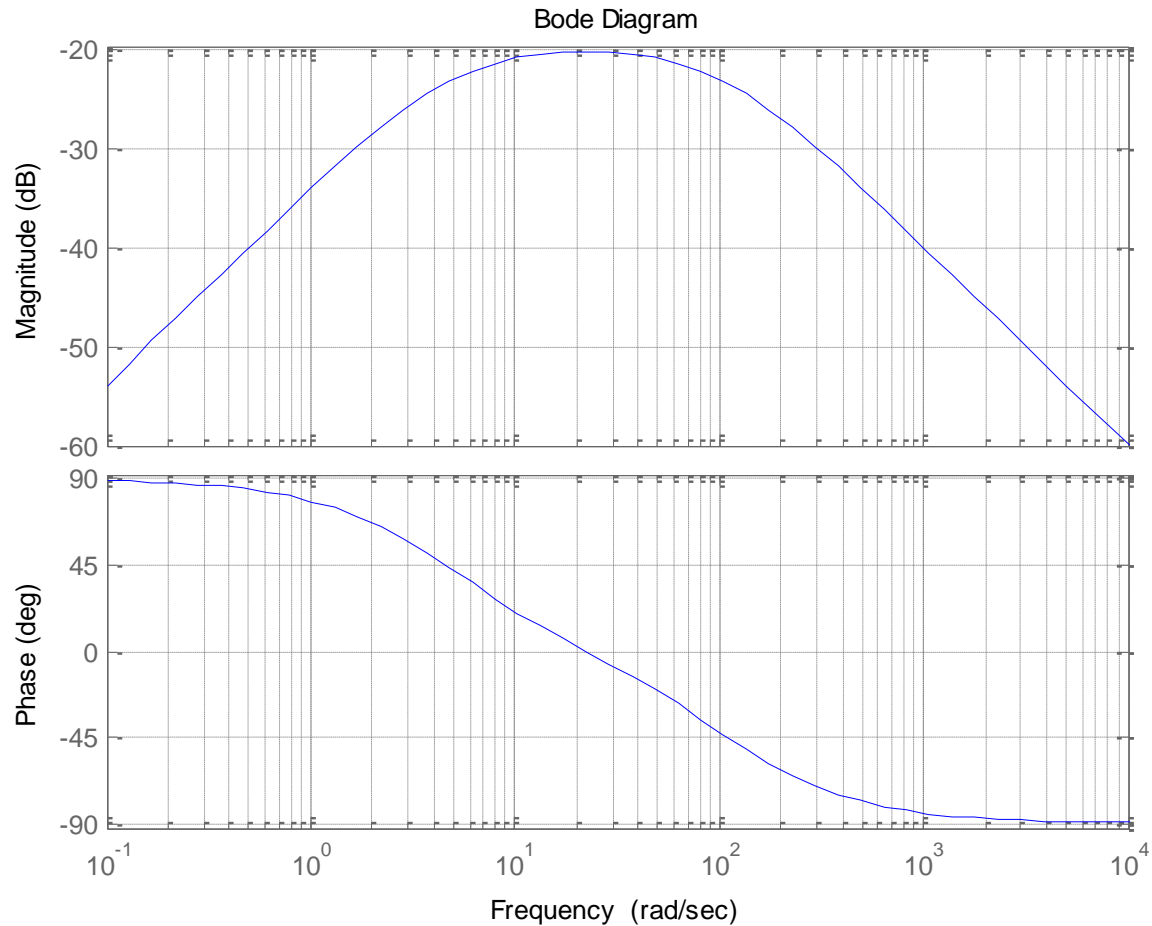
Exercício 10: Obtenha as equações de magnitude e de fase e trace os diagramas de Bode assintótico e real para um sistema com a seguinte resposta em frequência.

$$H(j\omega) = \frac{10j\omega}{(j\omega)^2 + 105j\omega + 500}$$

Sistemas e Sinais

Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Departamento de Engenharia Elétrica



Diagramas de Bode



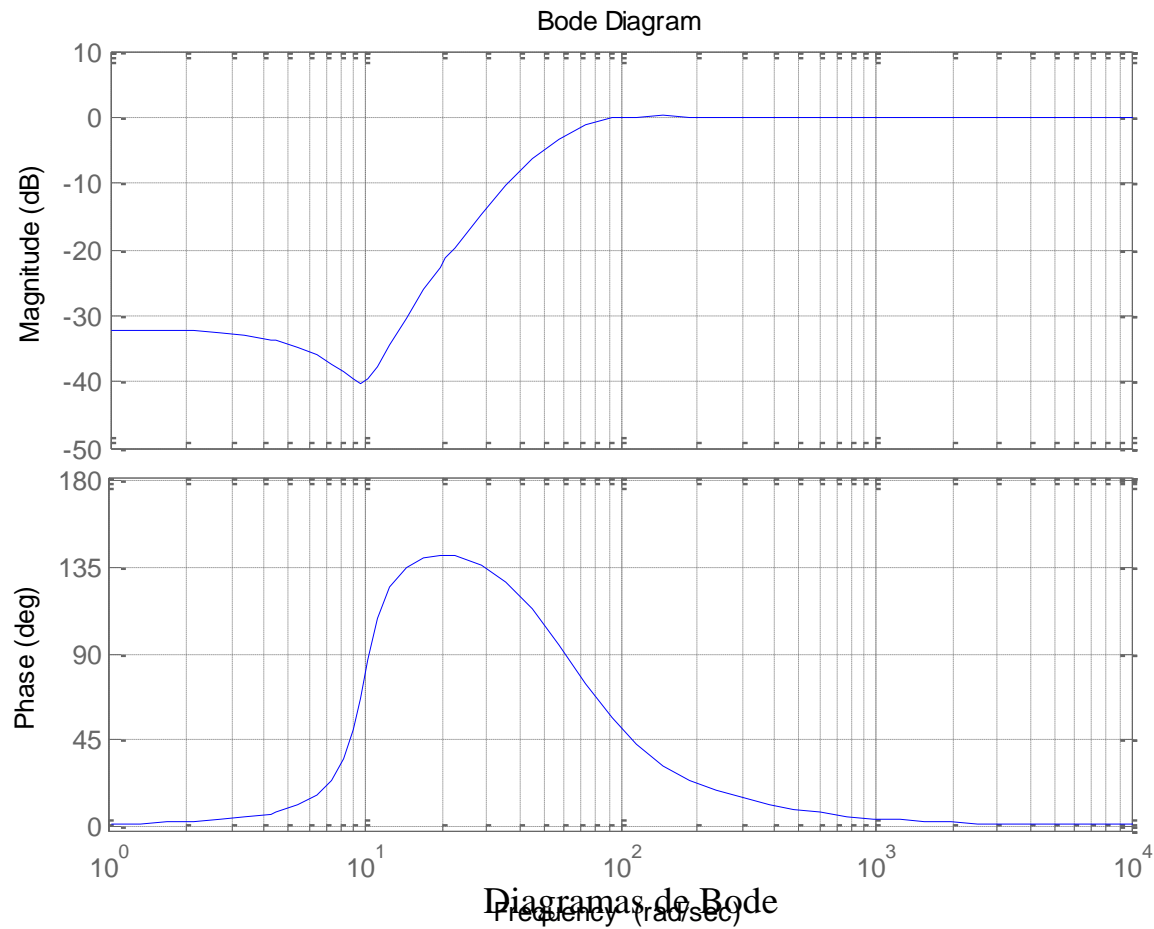
Exercício 11: Obtenha as equações de magnitude e de fase e trace os diagramas de Bode assintótico e real para um sistema com a seguinte resposta em frequência.

$$H(j\omega) = \frac{(j\omega)^2 + 4j\omega + 100}{(j\omega)^2 + 80j\omega + 4000}$$

Sistemas e Sinais

Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Departamento de Engenharia Elétrica





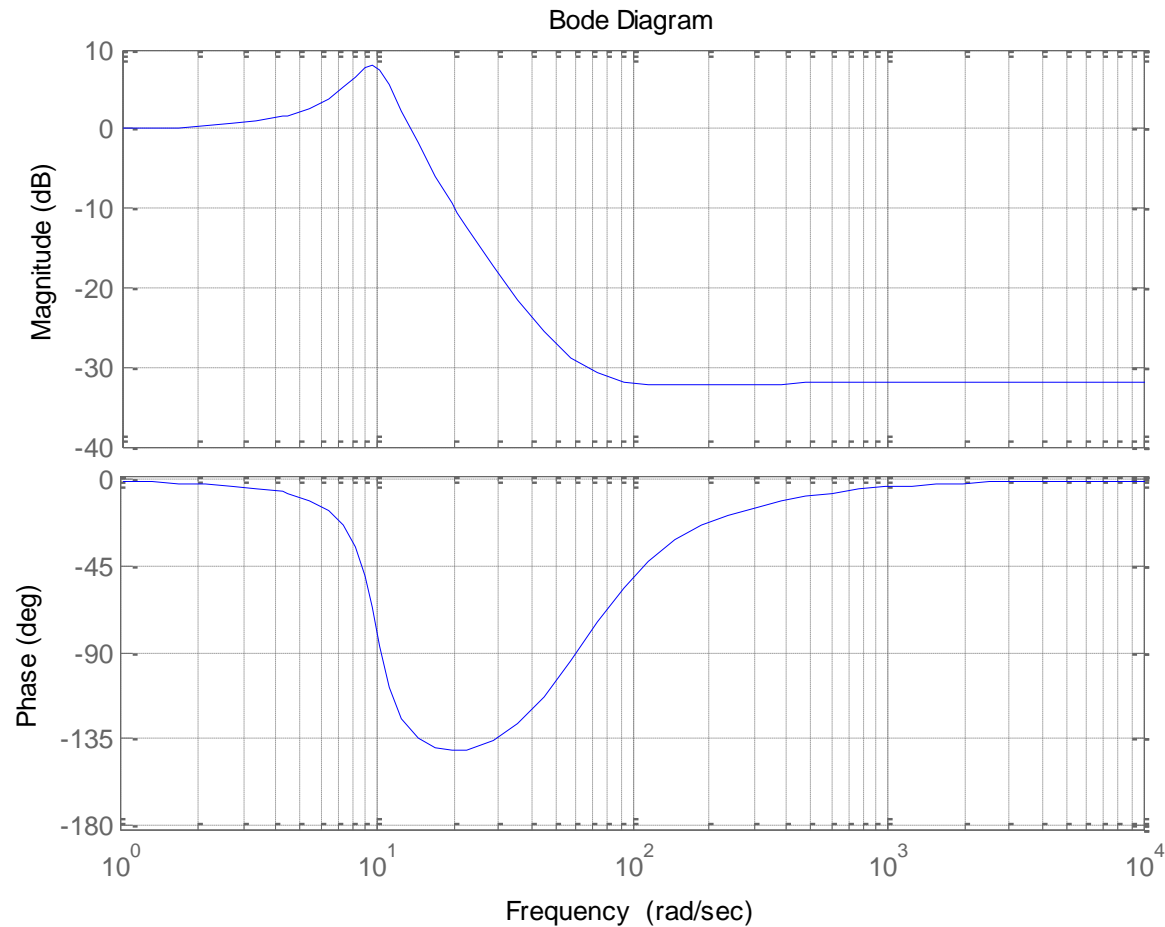
Exercício 12: Obtenha as equações de magnitude e de fase e trace os diagramas de Bode, assintótico e real para um sistema com a seguinte resposta em frequência.

$$H(j\omega) = \frac{\frac{1}{4000}(j\omega)^2 + \frac{1}{50}j\omega + 1}{\frac{1}{100}(j\omega)^2 + \frac{1}{25}j\omega + 1}$$

Sistemas e Sinais

Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Departamento de Engenharia Elétrica



Diagramas de Bode

Sistemas e Sinais

Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Departamento de Engenharia Elétrica

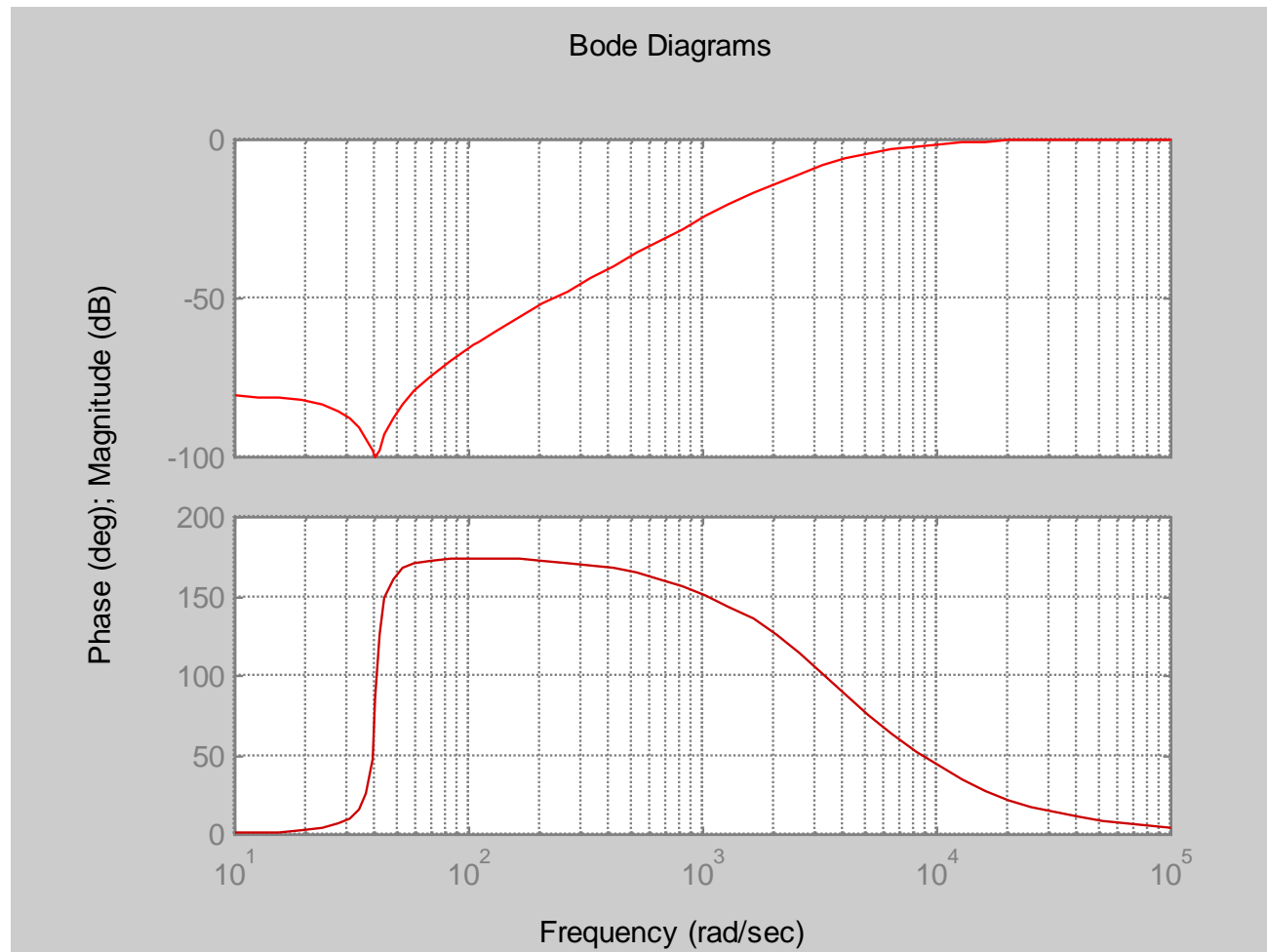


Exercício 13: Para os sistemas representados pelos diagramas de Bode apresentados a seguir, determinar suas respectivas funções resposta em frequência, justificando a escolha de cada um dos termos que as compõe.

Sistemas e Sinais

Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Departamento de Engenharia Elétrica



Sistemas e Sinais

Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Departamento de Engenharia Elétrica

