Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Departamento de Engenharia Elétrica

Amostragem

- ☞Representação com *FT* para Sinais Periódicos
- ☞Relacionando a *FT* com a *FS*
- ☞Amostragem
- ☞Amostrando Sinais de Tempo Contínuo

Representação com *FT* para Sinais Periódicos

A representação de sinais periódicos no domínio frequência foi realizada empregando a *FS* e a *DTFS*, pois nem a *FT* nem a *DTFT* convergem para sinais periódicos. Porém, ao incorporar impulsos na *FT* e *DTFT* de maneira apropriada, pode-se obter representações destas transformadas para sinais periódicos.

Relacionando a *FT* com a *FS*

A representação de um sinal periódico $x(t)$ por *FS* é

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k] e^{jk\omega_0 t}$$

onde ω_0 é a frequência fundamental do sinal $x(t)$. Observa-se também que a *FT* inversa de um impulso deslocado em frequência, $\delta(\omega - k\omega_0)$, é uma senoide complexa com frequência $k\omega_0$, ou seja

Relacionando a *FT* com a *FS*

$$\frac{1}{2\pi}e^{jk\omega_0 t} \overset{FT}{\leftrightarrow} \delta(\omega - k\omega_0)$$

Desta forma, empregando a propriedade da linearidade da *FT*, obtém-se a representação em frequência do sinal $x(t)$ na forma

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k]e^{jk\omega_0 t} \overset{FT}{\leftrightarrow} X(j\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k]\delta(\omega - k\omega_0)$$

Relacionando a *FT* com a *FS*

Sendo assim, a transformada de Fourier de um sinal periódico é uma série de impulsos espaçados pela frequência fundamental ω_0 do sinal. O *k-ésimo* impulso tem intensidade $2\pi X[k]$, em que $X[k]$ é o *k-ésimo* coeficiente de Fourier do sinal.

Relacionando a *FT* com a *FS*

Exemplo 4.6: Determinar a representação por *FT* do sinal

$$x(t) = \cos \omega_0 t \ .$$

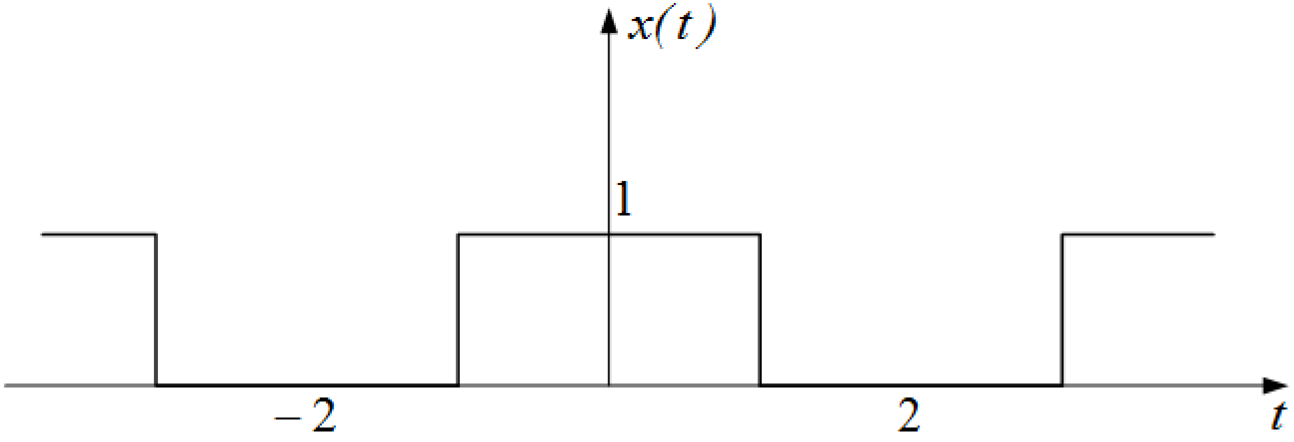
Relacionando a *FT* com a *FS*

Exemplo 4.7: Determinar a *FT* do trem de impulsos

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) \;.$$

Relacionando a *FT* com a *FS*

Exercício 4.4: Determinar a representação por *FT* para a onda quadrada periódica descrita na figura abaixo:



Amostragem

A representação por *FT* de sinais de tempo discreto será utilizada para analisar o efeito de amostrar uniformemente um sinal. A operação de amostragem gera um sinal de tempo discreto a partir de um sinal de tempo contínuo. A amostragem de sinais de tempo contínuo muitas vezes é executada para manipular o sinal com um computador ou microprocessador, comuns em sistemas de comunicação, controle e processamento de sinais.

Amostrando Sinais de Tempo Contínuo

Seja $x(t)$ um sinal de tempo contínuo. Define-se $x[n]$ como um sinal de tempo discreto cujos valores são iguais aos do sinal $x(t)$ nas amostras em intervalos múltiplos inteiros de T_s ou seja, $x[n] = x[nT_s]$. O sinal de tempo contínuo relacionado a cada uma das amostras $x[n]$ pode ser escrito na forma:

$$x_\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\delta(t - nT_s)$$

Amostrando Sinais de Tempo Contínuo

ou ainda $x_\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\delta(t - nT_s)$.

Uma vez que $x(t)\delta(t - nT_s) = x(nT_s)\delta(t - nT_s)$, tem-se

$$x_\delta(t) = x(t)p(t)$$

com

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) .$$

Amostrando Sinais de Tempo Contínuo

Ou seja, representa-se matematicamente o sinal amostrado através do produto do sinal de tempo contínuo original por um trem de impulsos. Assim,

$$X_\delta(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * P(j\omega)$$

ou ainda

$$X_\delta(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * \frac{2\pi}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s) \quad .$$

Amostrando Sinais de Tempo Contínuo

onde $\omega_s = 2\pi / T_s$ é a frequência em que o sinal é amostrado. A convolução de $X(j\omega)$ com cada um dos impulsos deslocados resultará em

$$X_\delta(j\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(\omega - k\omega_s))$$

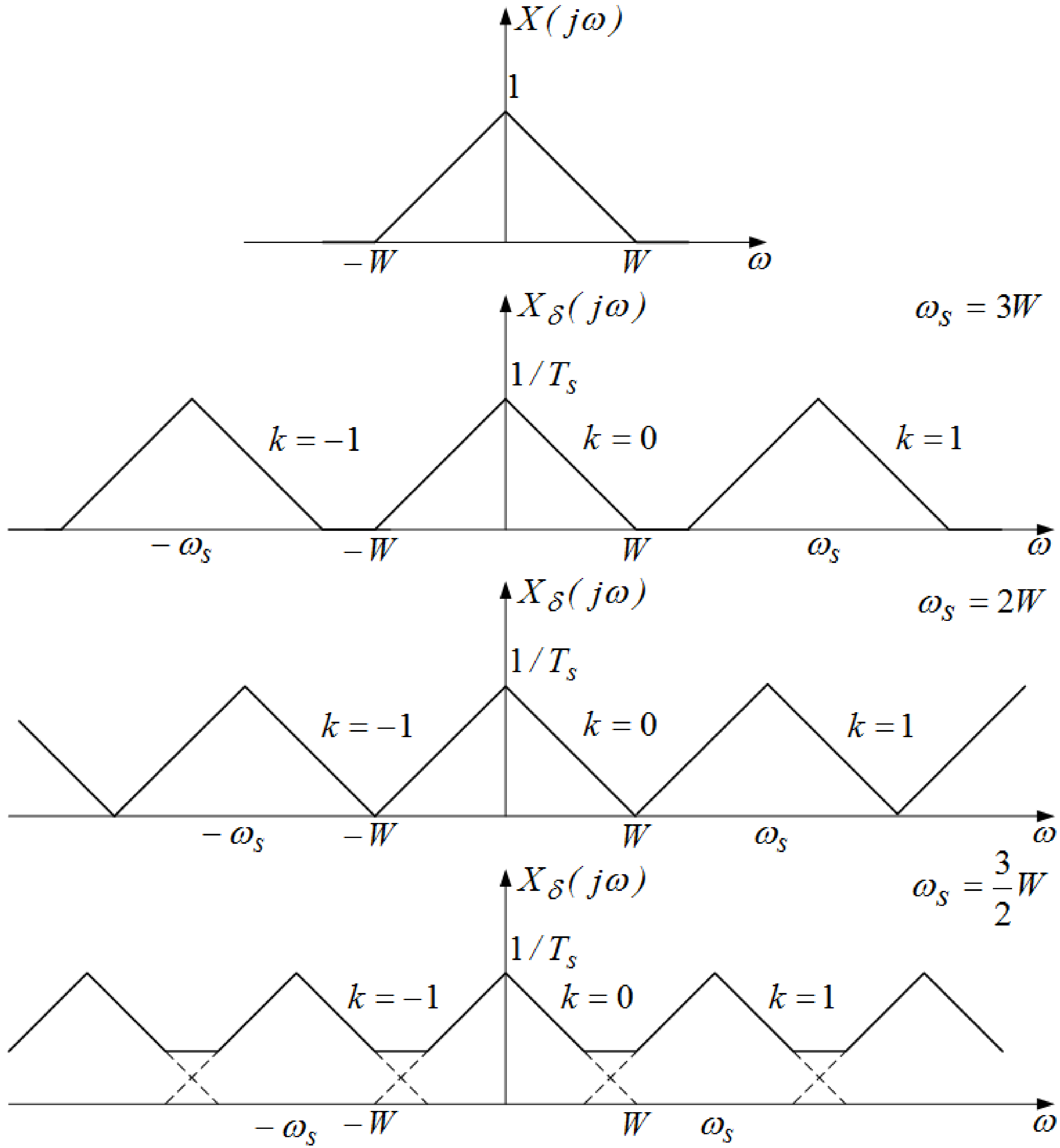
que é a soma infinita de versões deslocadas da *FT* do sinal original, espaçadas de ω_s .

Amostrando Sinais de Tempo Contínuo

Se ω_s não for suficientemente grande em comparação com a extensão do espectro de $X(j\omega)$, poderá haver uma sobre-posição dos espectros das versões deslocadas de $X(j\omega)$.

A figura a seguir ilustra o efeito da amostragem considerando diferentes valores de ω_s. Assume-se que o espectro $X(j\omega)$ se situa dentro da faixa de frequências

$$-W < \omega_s < W \; .$$



X(jω)
1
−W
W
ω
X_δ(jω)
ω_s = 3W
1/T_s
k = −1
k = 0
k = 1
− ω_s
−W
W
ω_s
ω
X_δ(jω)
ω_s = 2W
1/T_s
k = −1
k = 0
k = 1
− ω_s
−W
W
ω_s
ω
X_δ(jω)
ω_s = 3/2 W
1/T_s
k = −1
k = 0
k = 1
− ω_s
−W
W
ω_s
ω

Aliasing

A superposição das réplicas deslocadas do espectro original é denominada de *aliasing*, que se refere ao fenômeno de um componente de alta frequência assumir a identidade de um de baixa frequência. Nestes casos, o espectro do sinal amostrado deixa de ter uma correspondência biunívoca com o sinal original, não sendo possível reconstruir de forma única o sinal de tempo contínuo original.

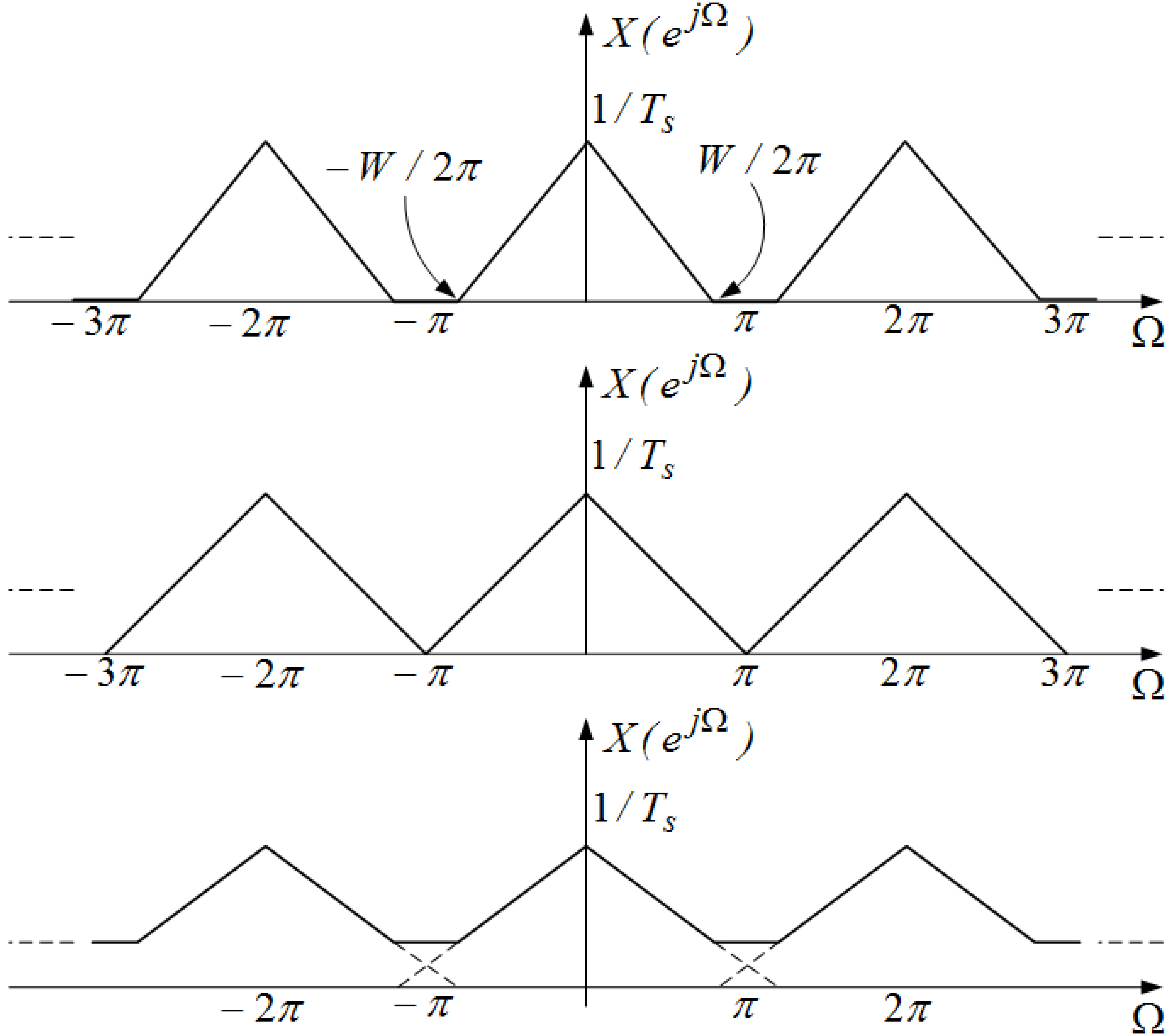
Aliasing

Evita-se o fenômeno do *aliasing* escolhendo um intervalo de amostragem T_s de forma que $\omega_s > 2W$, em que W representa a componente de frequência mais elevada do sinal, ou seja, satisfazendo a condição $T_s < \pi / W$.

A *DTFT* do sinal amostrado é obtida de $X_\delta(j\omega)$ usando-se a relação $\Omega = \omega T_s$, ou seja,

$$x[n] \overset{FT}{\leftrightarrow} X(e^{j\Omega}) = X_\delta(j\omega)\Big|_{\omega=\Omega/T_s} .$$

Esta mudança de escala da variável independente implica $\omega = \omega_s$ corresponder a $\Omega = 2\pi$.



X(e^{jΩ})
1/T_s
−W/2π
W/2π
−3π
−2π
−π
π
2π
3π
Ω
X(e^{jΩ})
1/T_s
−3π
−2π
−π
π
2π
3π
Ω
X(e^{jΩ})
1/T_s
−2π
−π
π
2π
Ω

Amostrando Sinais de Tempo Contínuo

Exemplo 4.13: Considere o efeito de extrair amostras do sinal senoidal

$$x(t) = cos(\pi t) .$$

Determinar a *FT* do sinal amostrado para os seguintes períodos de amostragem:

$$(a) T_s = 1/4\ s, (b) T_s = 1\ s, (c) T_s = 3/2\ s$$