



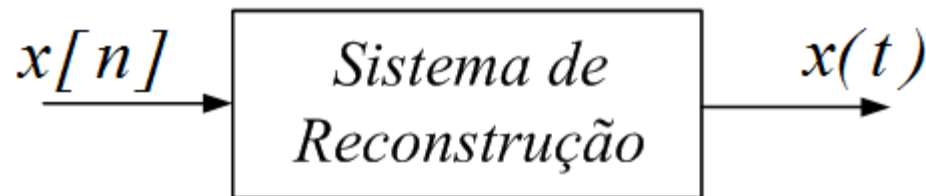
Reconstrução de Sinais de Tempo Contínuo

- ☞ Teorema da Amostragem
- ☞ Reconstrução Ideal
- ☞ Reconstrução Prática – Retentor de Ordem Zero
- ☞ Filtro Anti-Imagem



Reconstrução de Sinais de Tempo Contínuo

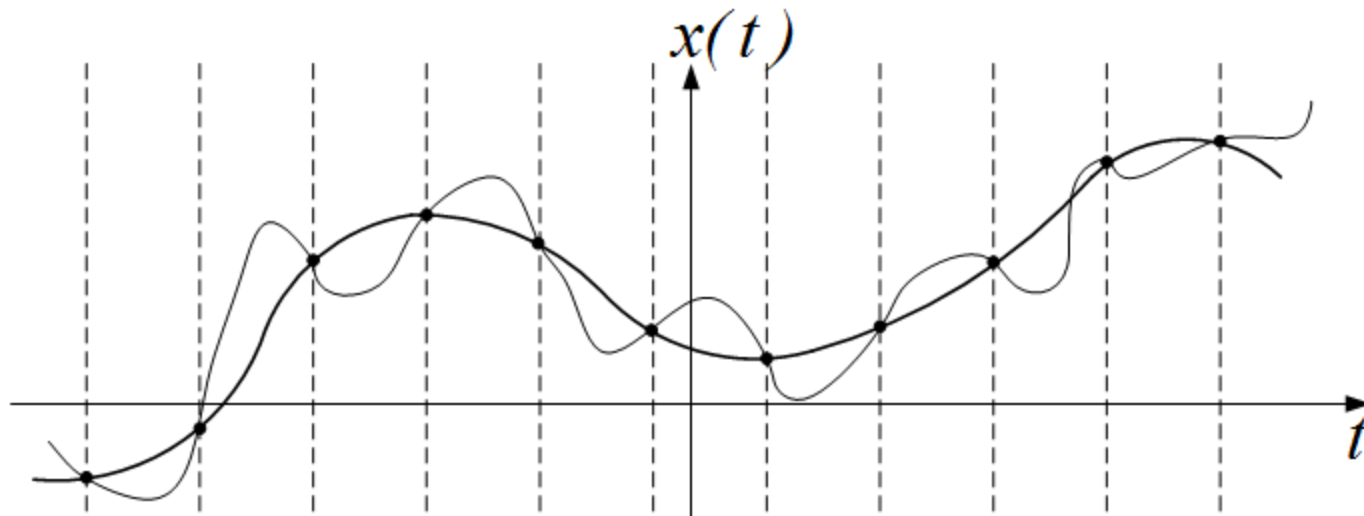
O problema de se reconstruir um sinal de tempo contínuo a partir de amostras envolve uma combinação de sinais de tempo contínuo e discreto. Um sistema que executa esta operação tem um sinal de entrada de tempo discreto e um sinal de saída de tempo contínuo.





Teorema da Amostragem

Amostras de um sinal nem sempre determinam de maneira única o sinal de tempo contínuo correspondente.





Teorema da Amostragem

Apenas com o conhecimento das amostras de um sinal não é possível determinar o comportamento do sinal entre as amostras. Uma forma de minimizar este problema ocorre quando o sinal a ser amostrado apresenta transições suaves entre as amostras. A “suavidade”, ou taxa com o qual o sinal no domínio do tempo varia está diretamente relacionada com a frequência máxima presente no sinal.



Teorema da Amostragem

Para reconstruir de maneira única um sinal de tempo contínuo a partir de suas amostras, deve haver uma correspondência única entre as FTs do sinal de tempo contínuo e o sinal amostrado. Estas FTs se relacionam de forma única se o processo de amostragem não introduzir “aliasing”. Tal exigência é formalmente estabelecida da seguinte maneira:



Teorema da Amostragem

Teorema da Amostragem: Admite-se que $x(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} X(j\omega)$ represente um sinal de faixa limitada, de forma que $X(j\omega) = 0$ para $|\omega| > \omega_m$. Se $\omega_s > 2\omega_m$, em que $\omega_s = 2\pi / T_s$ e ω_m é a máxima frequência presente no sinal, então $x(t)$ é determinado de maneira única por suas amostras $x(nT_s)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$.



Teorema da Amostragem

A frequência mínima de amostragem, $\omega_s > 2\omega_m$, é muitas vezes denominada de taxa de amostragem de Nyquist. Em muitas situações é conveniente expressar a frequência de amostragem em Hertz. Assim $f_m = \omega_m / 2\pi$ e $f_s > 2f_m$ satisfazem o teorema da amostragem, sendo que $f_s = 1/T_s$.



Teorema da Amostragem

Exemplo 4.14: Dado $x(t) = \text{sen}(10\pi t) / \pi t$, determinar o máximo valor de T_s de forma que $x(t)$ seja representado de maneira única pela sequência de tempo discreto $x[n] = x(nT_s)$.



Teorema da Amostragem

Exercício 4.12: Determinar as condições no intervalo T_s de forma que o sinal

$x(t) = \cos(2\pi t)\text{sen}(\pi t) / \pi t + 3\text{sen}(6\pi t)\text{sen}(2\pi t) / \pi t$
seja representado de forma única pela sequência de tempo discreto $x[n] = x(nT_s)$.



Filtros anti-aliasing

No caso em que existe o interesse somente em componentes de baixas frequências do sinal, pode-se empregar um filtro passa-baixas de tempo contínuo antes de amostrar o sinal. Tais filtros são denominados de *filtros anti-aliasing* e são determinados com base nas frequências de interesse do sinal e na frequência com que se pretende amostrar o sinal.



Reconstrução Ideal

Considera-se agora o problema de reconstruir o sinal de tempo contínuo a partir de amostras. Seja

$$X_s(j\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j\omega - jk\omega_s)$$

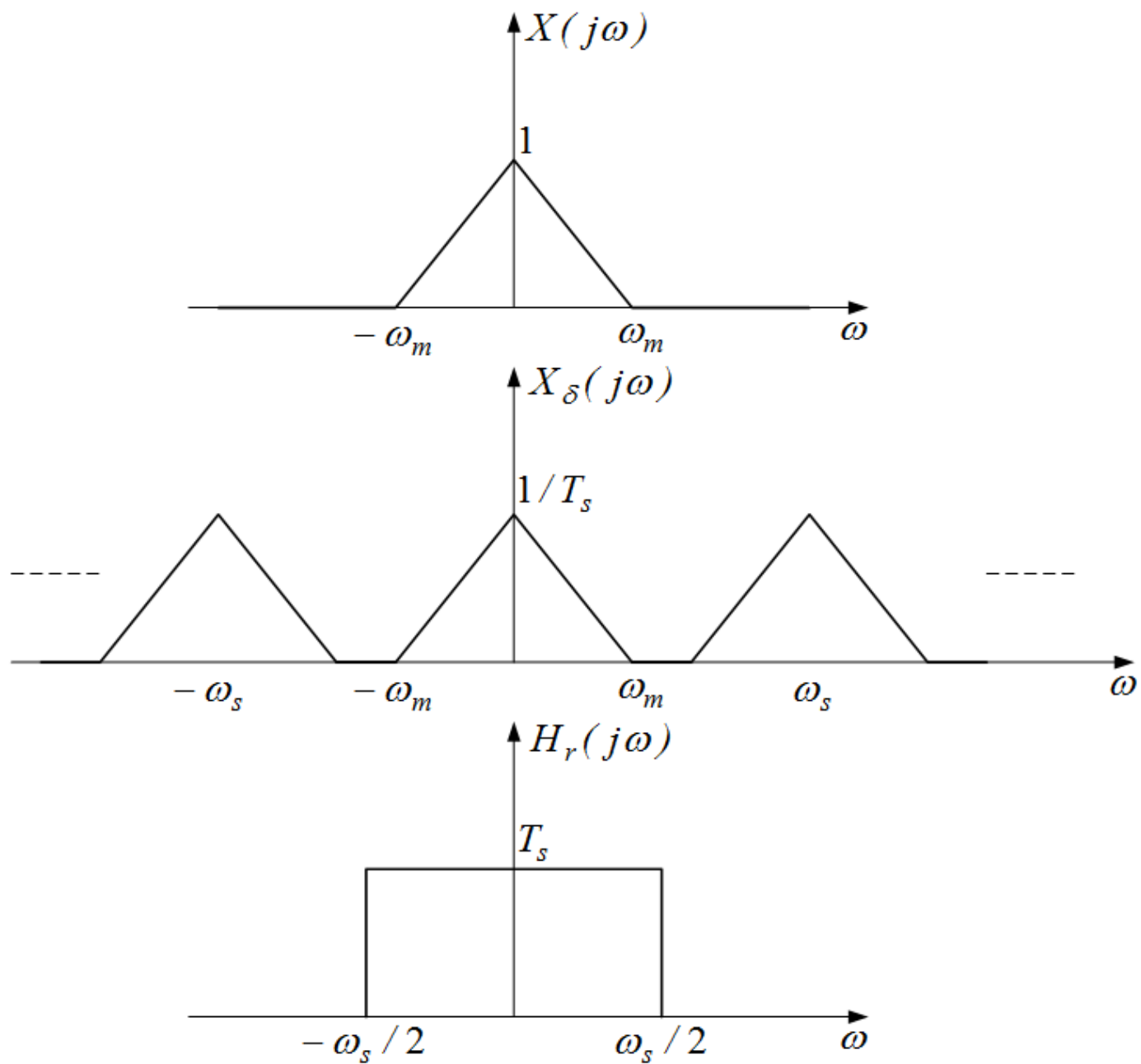
a representação em frequência do sinal $x(t)$ amostrado de forma impulsiva.



Reconstrução Ideal

A operação de reconstrução é tal que $X_\delta(j\omega)$ seja convertido novamente em $X(j\omega)$, eliminando réplicas de $X(j\omega)$ que aparecem nas frequências $k\omega_s$. Tal operação pode ser realizada multiplicando-se $X_\delta(j\omega)$ por $H_r(j\omega)$, em que

$$H_r(j\omega) = \begin{cases} T_s, & |\omega| \leq \omega_s / 2 \\ 0, & |\omega| > \omega_s / 2 \end{cases} .$$





Reconstrução Ideal

Observa-se que as condições do Teorema da Amostragem devem ser satisfeitas para que possa ocorrer a recuperação do sinal $X(j\omega)$. Uma vez que a multiplicação no domínio frequência transforma-se em convolução no domínio tempo tem-se

$$X(j\omega) = X_{\delta}(j\omega)H_r(j\omega) \Rightarrow x(t) = x_{\delta}(t) * h_r(t)$$

onde $h_r(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} H(j\omega)$.



Reconstrução Ideal

Logo:

$$\begin{aligned}x(t) &= h_r(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \delta(t - nT_s) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] h_r(t - nT_s)\end{aligned}$$



Reconstrução Ideal

Uma vez que

$$h_r(t) = \frac{T_s \operatorname{sen}\left(\frac{\omega_s t}{2}\right)}{\pi t}$$

reescreve-se o sinal $x(t)$ na forma:

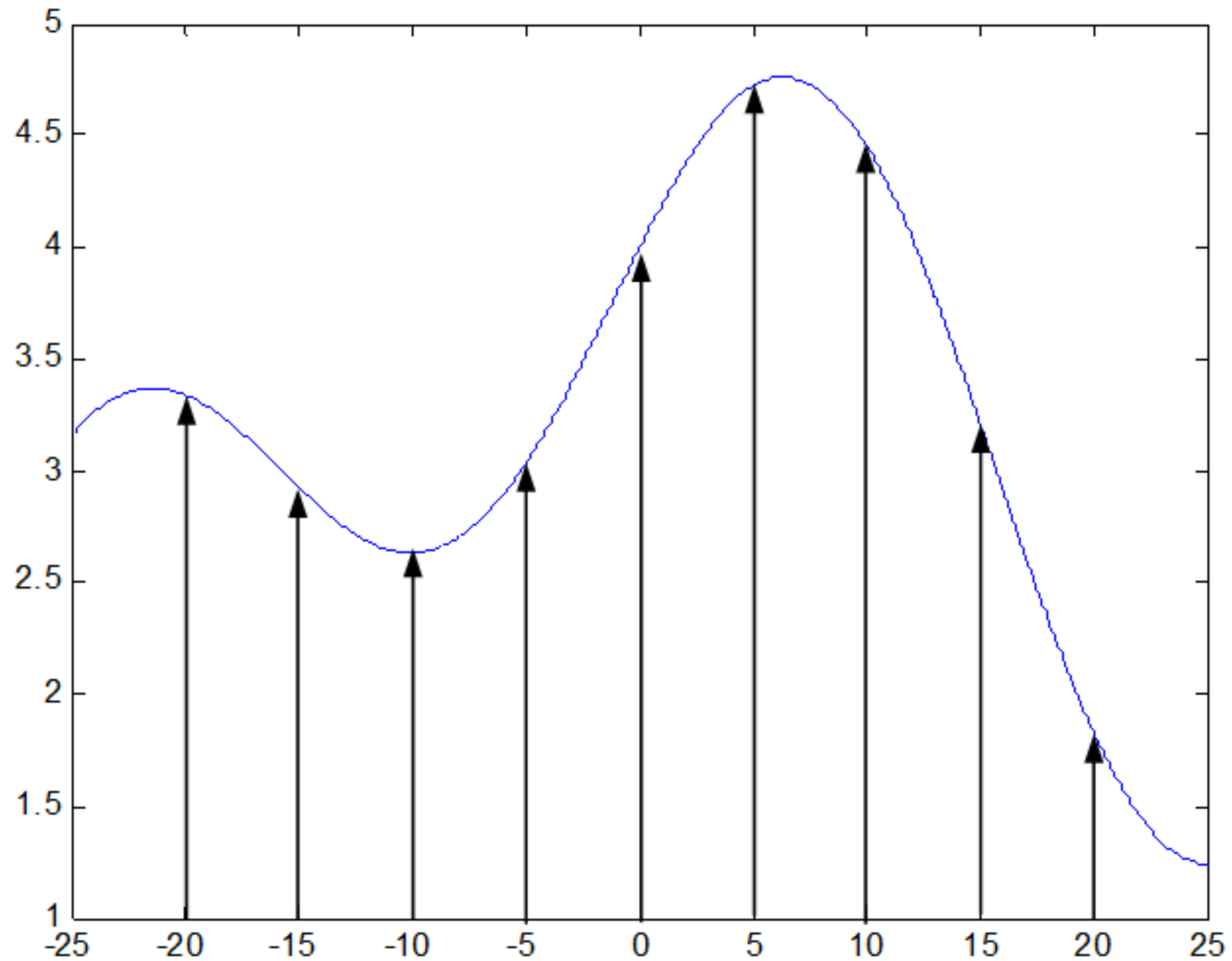
$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega_s}{2\pi}(t - nT_s)\right)$$



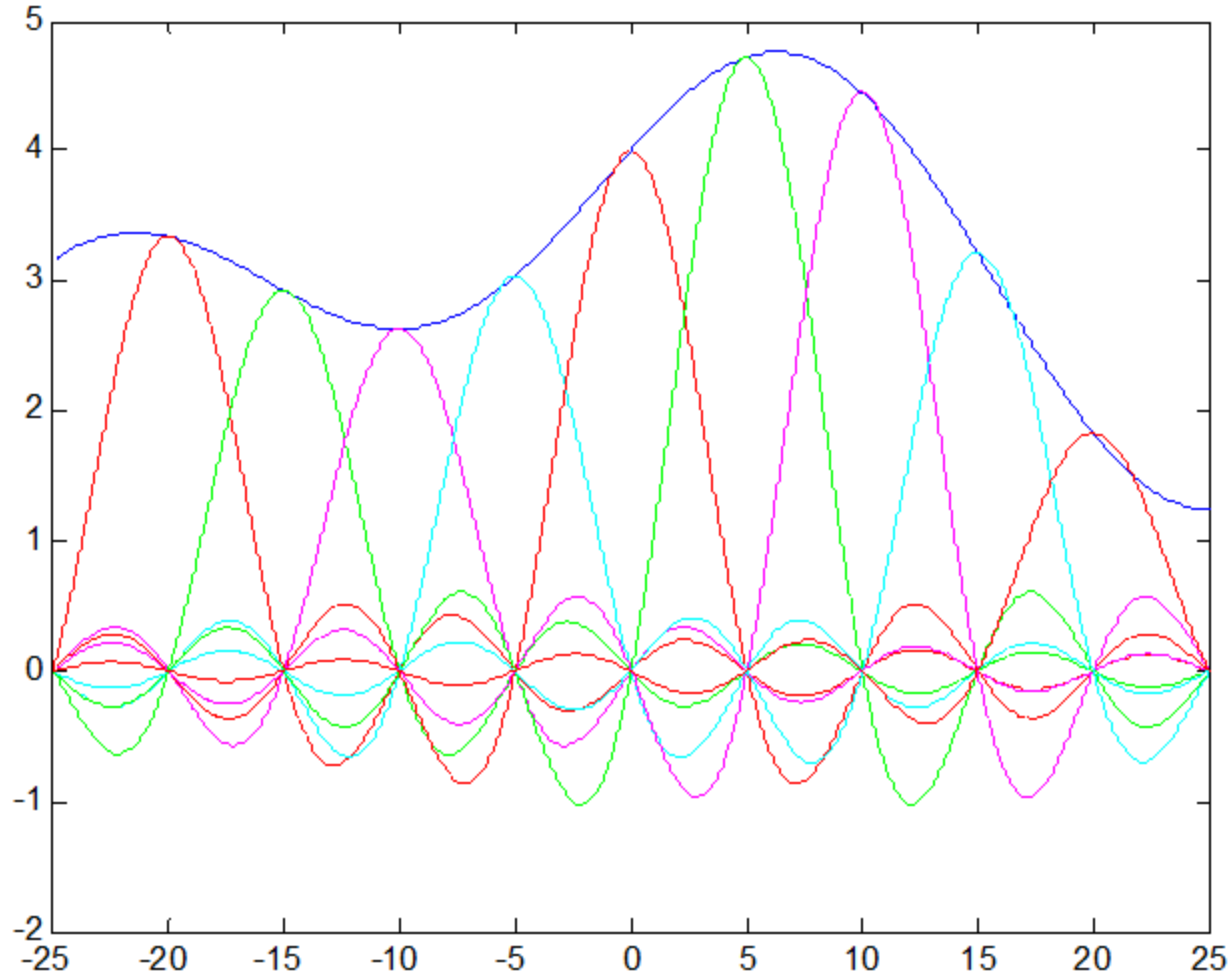
Reconstrução Ideal

Ou seja, no domínio do tempo, o sinal é reconstruído através da soma ponderada de funções “sinc” deslocadas pelo período de amostragem, com os pesos de cada uma das funções correspondendo aos valores da sequência de tempo discreto em cada um dos instantes de amostragem.

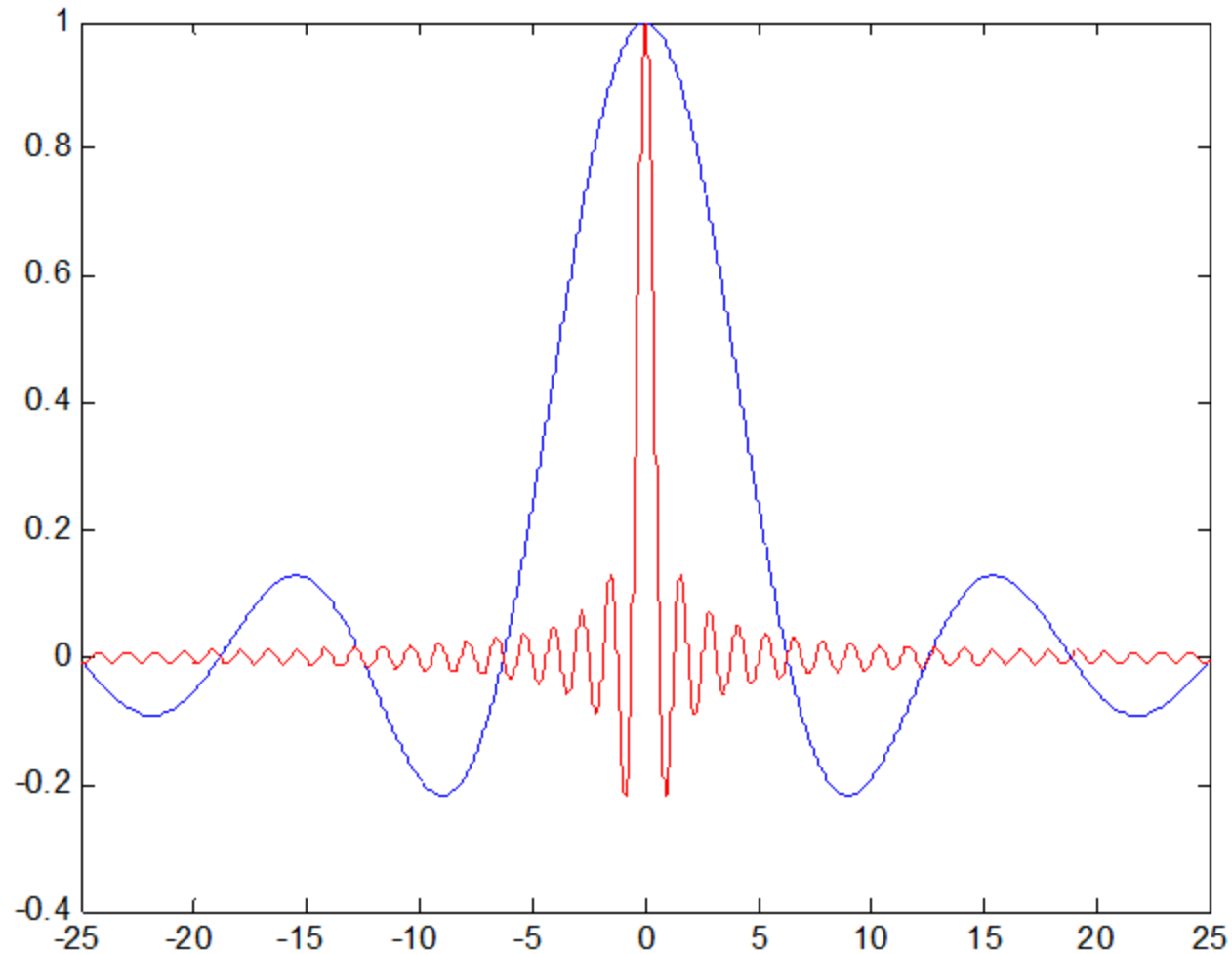
Amostras Impulsivas do Sinal de Tempo Contínuo



Aproximação pela Soma Ponderada de Funções Sinc



Relação entre Largura de Faixa do Filtro de Janela com a Função Sinc





Reconstrução Ideal

O valor de $x(t)$ em $t = nT_s$ é igual a $x[n]$ porque todas as outras funções sinc deslocadas cruzam por zero em $t = nT_s$, exceto a n -ésima, e seu valor é $x[n]$. O valor de $x(t)$ entre múltiplos inteiros de T_s é determinado a partir de todos os valores da sequência $x[n]$.



Reconstrução Ideal

A operação descrita por

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega_s}{2\pi}(t - nT_s)\right)$$

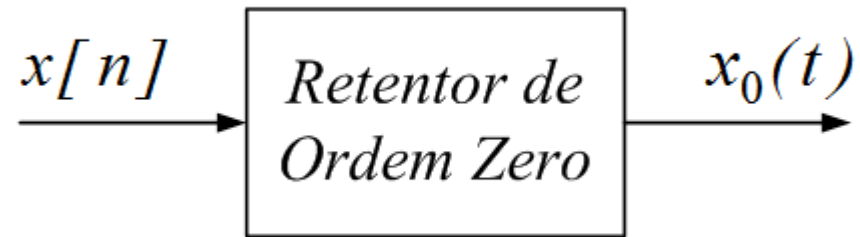
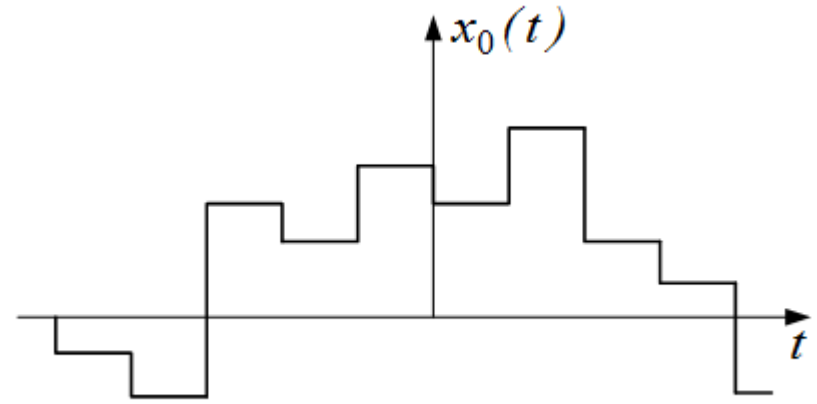
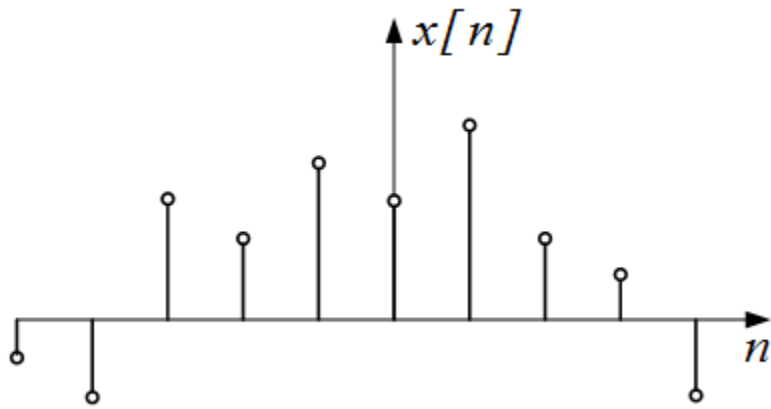
é denominada de *interpolação ideal limitada em faixa*.

Praticamente este interpolador não pode ser implementado pois representa um sistema não-causal, ou seja, a saída $x(t)$ depende de valores passados e futuros de $x[n]$. Além disso, a influência de cada amostra estende-se ao longo de um intervalo infinito de tempo.



Reconstrução Prática – Retentor de Ordem Zero

A reconstrução prática de sinais de tempo contínuo muitas vezes é implementada com um dispositivo conhecido como retentor de ordem zero, o qual mantém o valor de $x[n]$ durante T_s segundos.





Reconstrução Prática – Retentor de Ordem Zero

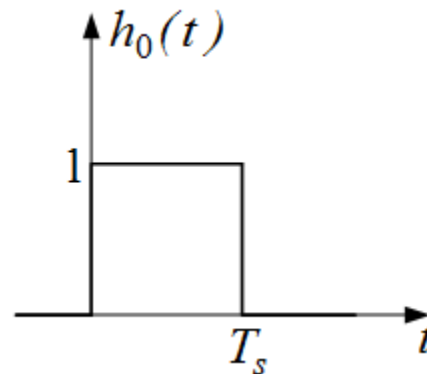
Sendo assim, o sinal $x_0(t)$ caracteriza-se por uma aproximação em degraus do sinal de tempo contínuo $x(t)$.

O retentor de ordem zero é representado matematicamente como a soma ponderada de pulsos retangulares deslocados de múltiplos inteiros do intervalo de amostragem.

$$h_0(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < T_s \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$



Reconstrução Prática – Retentor de Ordem Zero



O sinal de saída do retentor de ordem zero, expresso em função de $h_0(t)$ é dado por

$$x_0(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] h_0(t - nT_s) .$$



Reconstrução Prática – Retentor de Ordem Zero

Ou ainda

$$\begin{aligned}x_0(t) &= h_0(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \delta(t - nT_s) \\ &= h_0(t) * x_\delta(t)\end{aligned}$$

sendo

$$h_0(t) * x_\delta(t) \stackrel{FT}{\leftrightarrow} H_0(j\omega) X_\delta(j\omega)$$

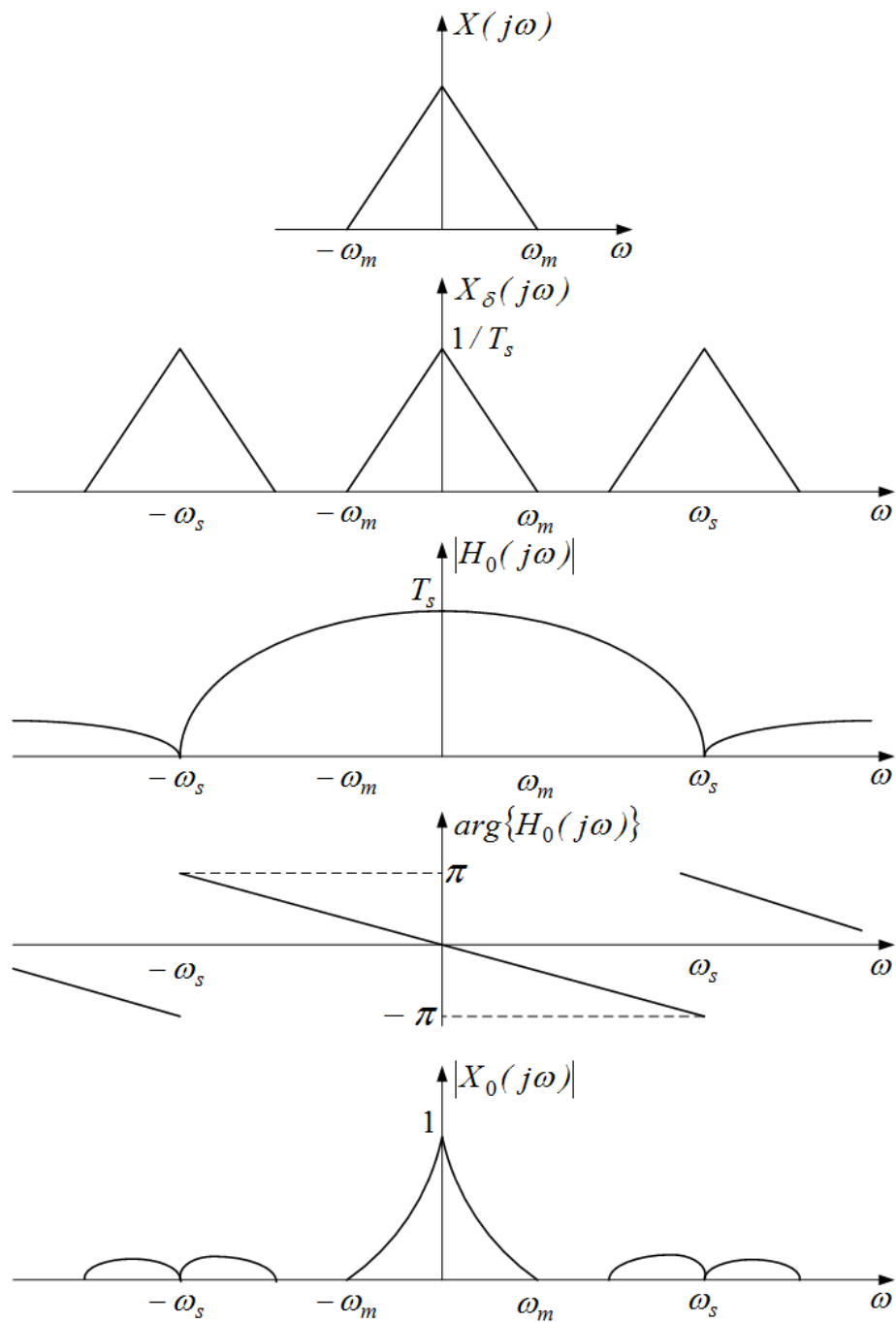
com

$$h_0(t) \stackrel{FT}{\leftrightarrow} H_0(j\omega) = 2e^{-j\omega T_s/2} \frac{\text{sen}\left(\omega \frac{T_s}{2}\right)}{\omega} \cdot$$



Efeitos da Retenção de Ordem Zero

1. Defasamento linear correspondente ao atraso de $T_s / 2$ segundos;
2. A parte de $X_s(j\omega)$ entre $-\omega_m$ e ω_m é distorcida pela curvatura do lóbulo principal de $H_0(j\omega)$;
3. Versões distorcidas e atenuadas de $X(j\omega)$ permanecem centralizadas em múltiplos diferentes de zero de ω_s .





Filtro Anti-Imagem

Em algumas aplicações as modificações associadas ao efeito do elemento de retenção de ordem zero são aceitáveis. Em outras faz-se necessário um processamento adicional de $x_0(t)$ de forma a minimizar os efeitos da retenção de ordem zero. Desta forma pode-se utilizar um filtro com as seguintes características:

$$H_c(j\omega) = \begin{cases} \frac{\omega T_s}{2 \operatorname{sen}(\omega T_s / 2)}, & |\omega| \leq \omega_m \\ 0, & |\omega| > \omega_s - \omega_m \end{cases}$$



Filtro Anti-Imagem

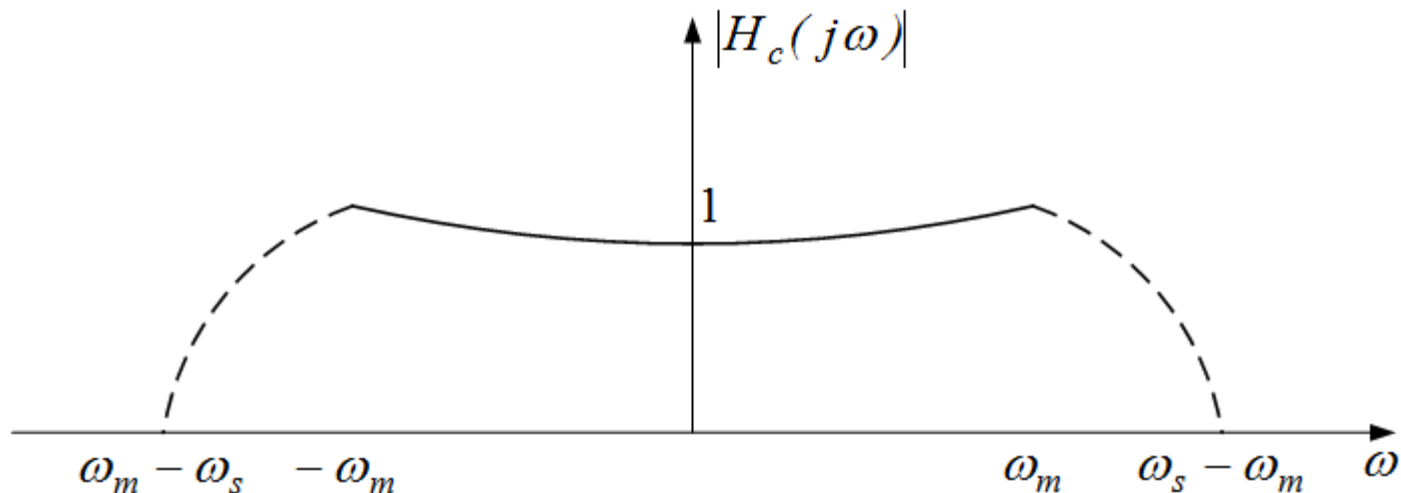
- $|\omega| \leq \omega_m$ O filtro compensa a distorção introduzida pelo lóbulo principal de $H_0(j\omega)$;
- $|\omega| > \omega_s - \omega_m$ O filtro remove a energia de $X_0(j\omega)$ centralizada em múltiplos diferentes de zero de ω_s .

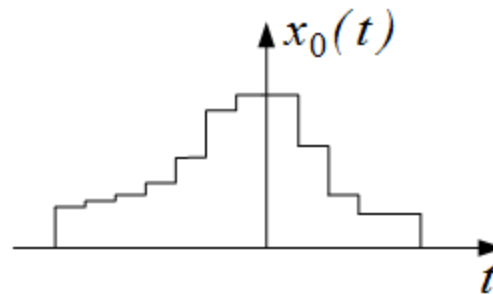
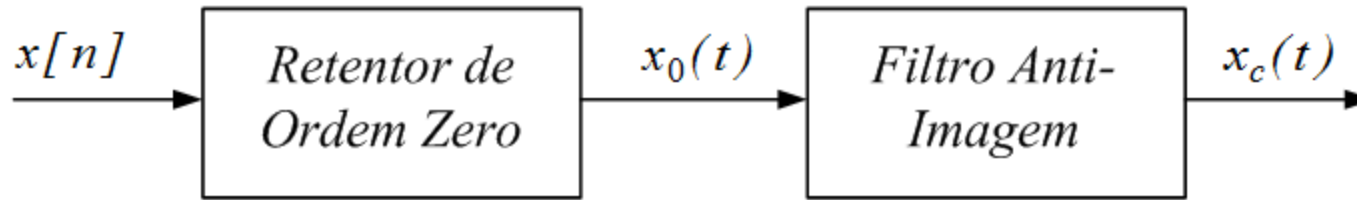
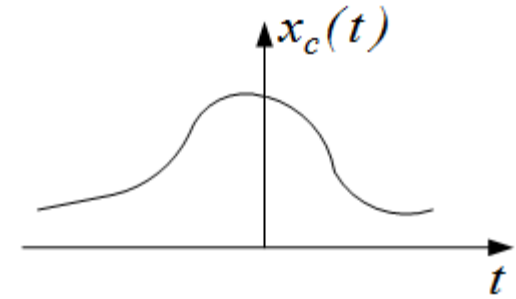
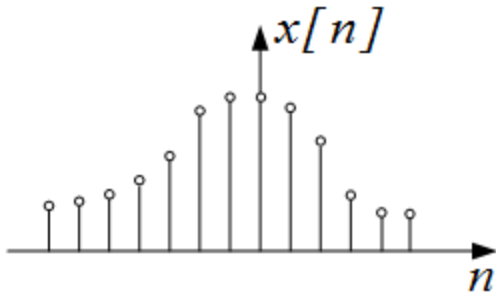
Na faixa de frequência em que $\omega_m < |\omega| < \omega_s - \omega_m$, $H_c(j\omega)$ não interfere pois $X_0(j\omega)$ é nulo.



Filtro Anti-Imagem

Tal filtro é denominado de filtro anti-imagem porque elimina as imagens distorcidas de $X(j\omega)$.







Filtro Anti-Imagem

Em muitos casos a fase linear na faixa de passagem, $|\omega| \leq \omega_m$ é aceitável uma vez que a distorção de fase linear corresponde a um retardo adicional. A dificuldade de aproximar $|H_c(j\omega)|$ depende da separação entre ω_m e $\omega_s - \omega_m$. Se a distância for grande a curvatura do lóbulo principal de $H_o(j\omega)$ será pequena e uma aproximação muito boa será obtida para $|H_c(j\omega)| = 1$.



Filtro Anti-Imagem

Na faixa $\omega_m < \omega < \omega_s - \omega_m$ ocorre a transição da faixa de passagem para a faixa de rejeição. Se $\omega_s - 2\omega_m$ for grande, a faixa de transição será grande, facilitando o projeto do filtro. Conseqüentemente, as exigências de um filtro anti-imagem são significativamente menores escolhendo-se T_s suficientemente pequeno, tipicamente $\omega_s \gg 2\omega_m$.