Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Departamento de Engenharia Elétrica

Transformada de Laplace

A generalização da representação por senóides complexas de um sinal de tempo contínuo fornecida pela Transformada de Fourier é realizada em termos de sinais exponenciais complexos pela Transformada de Laplace. A Transformada de Laplace fornece uma caracterização mais ampla, podendo ser utilizada para a solução de problemas de tempo contínuo que envolvem sinais que não são absolutamente integráveis.

Transformada de Laplace

Admite-se então que e^{st} seja uma função exponencial complexa com $s = \sigma + j\omega$, ou seja:

$$e^{st} = e^{\sigma t}\cos\omega t + je^{\sigma t}sen\omega t$$

Considera-se agora o problema de aplicar um sinal $x(t) = e^{st}$ a um sistema LTI com resposta ao impulso $h(t)$.

Transformada de Laplace

A saída do sistema $y(t)$ será dada por:

$$\begin{aligned} y(t) &= H\left\{e^{st}\right\} \\ &= h(t) * e^{st} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau \end{aligned}$$

Transformada de Laplace

Logo

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{s(t-\tau)}d\tau$$

$$= e^{st}\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau$$

sendo

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau \quad tal\ que \quad H\{e^{st}\} = H(s)e^{st}$$

$$H(s) := Função\ de\ Transferência\ do\ Sistema$$

Transformada de Laplace

Desta forma, e^{st} caracteriza-se como sendo uma autofunção do sistema e $H(s)$ como seu autovalor. A função de transferência $H(s)$ pode ser representada na forma

$$H(s) = |H(s)| e^{j\phi(s)}$$

em que $|H(s)|$ e $\phi(s)$ representam, respectivamente, o módulo e a fase de $H(s)$.

Transformada de Laplace

$$y(t) = |H(s)| e^{j\phi(s)} e^{st}$$

Admitindo-se $s = \sigma + j\omega$

$$y(t) = |H(\sigma + j\omega)| e^{\sigma t} \, e^{j(\omega t + \phi(s))}$$

$$y(t) = |H(\sigma + j\omega)| e^{\sigma t} \cos(\omega t + \phi(\sigma + j\omega)) + \\ + j|H(\sigma + j\omega)| e^{\sigma t} \, sen(\omega t + \phi(\sigma + j\omega))$$

Transformada de Laplace

Conclui-se então que o sistema altera a amplitude do sinal de entrada por um fator $\left|H(\sigma + j\omega)\right|$ e desloca a fase por um fator $\phi(\sigma + j\omega)$, não alterando o fator de amorteci-mento nem a frequência do sinal de entrada.

$$H(\sigma + j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-(\sigma + j\omega)t}dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (h(t)e^{-\sigma t})\, e^{-j\omega t}dt$$

Transformada de Laplace

Logo, $H(\sigma + j\omega)$ é a transformada de Fourier de $h(t)e^{-\sigma t}$
Sendo assim, a transformada de Fourier inversa de $H(\sigma + j\omega)$ deve ser $h(t)e^{-\sigma t}$, ou seja:

$$h(t)e^{-\sigma t} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(\sigma + j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

ou ainda

$$h(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(\sigma + j\omega)e^{(\sigma + j\omega)t}d\omega \quad .$$

Transformada de Laplace

Uma vez que $s = \sigma + j\omega$, tem-se $d\omega = ds / j$, resultando em

$$h(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} H(s) e^{st} ds .$$

Transformada de Laplace

Generalizando as relações anteriores para um sinal arbitrário $x(t)$, tem-se

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt$$ transformada de Laplace de $x(t)$;

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} X(s) e^{st} ds$$ transformada inversa de Laplace de $X(s)$.

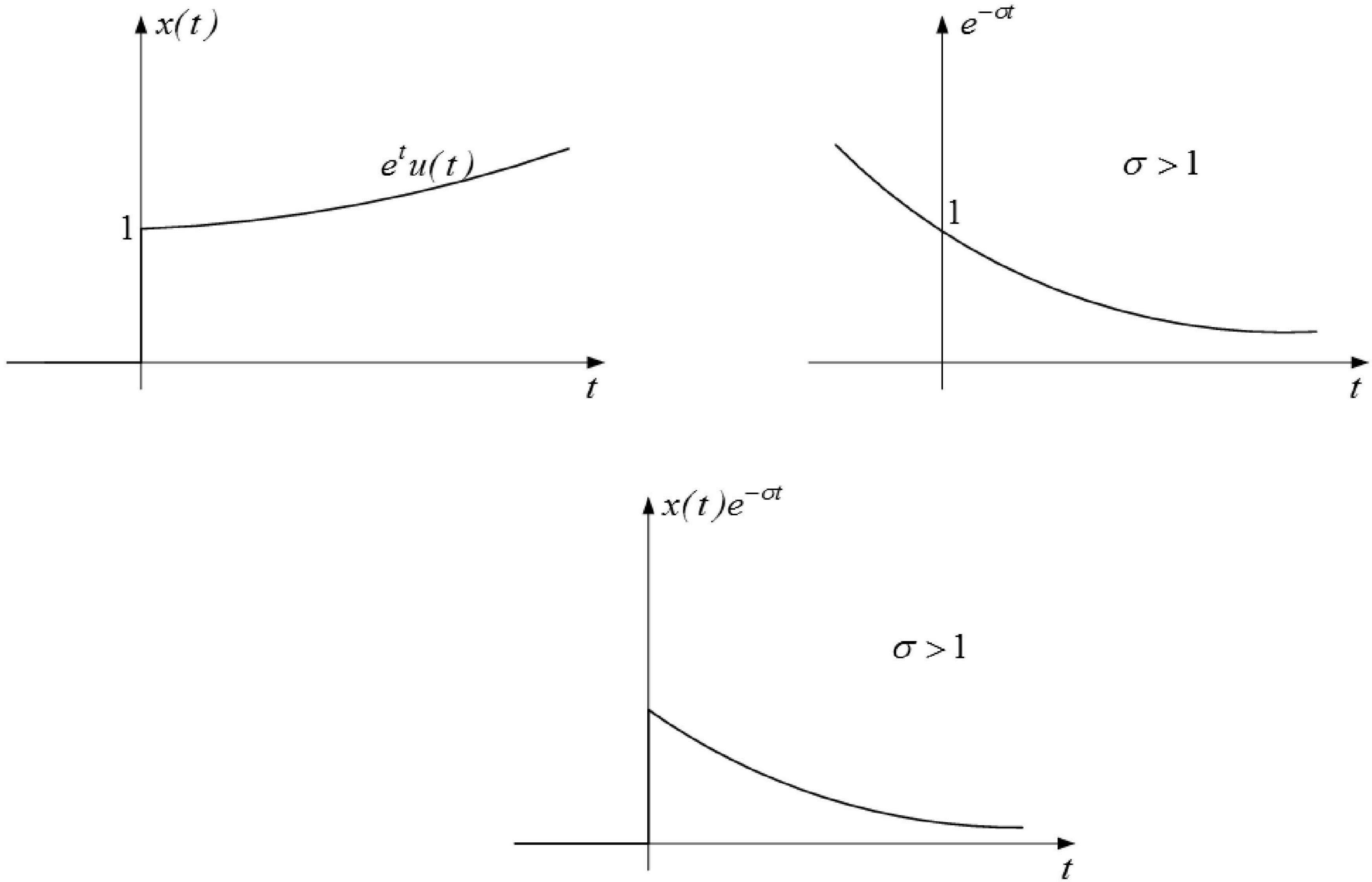
Transformada de Laplace

Ou ainda $x(t) \overset{L}{\leftrightarrow} X(s)$ .Conforme observado, a transformada de Laplace de $x(t)$ também pode ser interpretada como sendo a transformada de Fourier de $x(t)e^{-\sigma t}$, consequentemente uma condição necessária para a convergência da transformada de Laplace é a integrabilidade absoluta de $x(t)e^{-\sigma t}$, ou seja

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| x(t)e^{-\sigma t} \right| dt < \infty \; .$$

Transformada de Laplace

A faixa de σ para a qual a transformada de Laplace converge é denominada de região de convergência RDC.


x(t)
e^t u(t)
1
t
e^{-σt}
σ > 1
1
t
x(t)e^{-σt}
σ > 1
t

Transformada de Laplace

A forma mais comum de representação da transformada de Laplace de $X(s)$ é dada por uma função racional em s, na forma

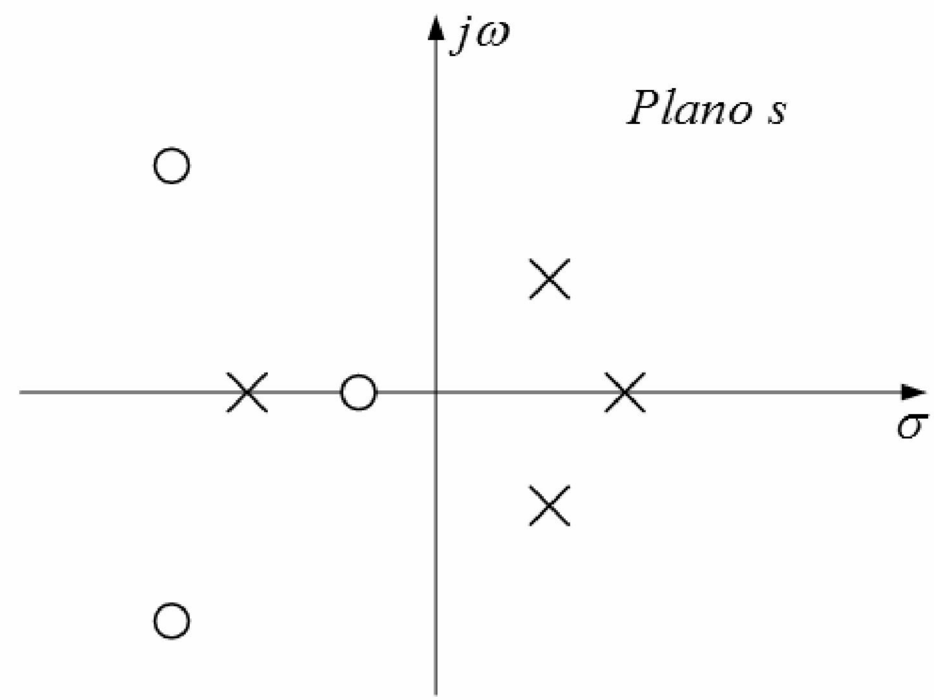
$$X(s) = \frac{b_M s^M + b_{M-1} s^{M-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{s^N + a_{N-1} s^{N-1} + \ldots + a_1 s + a_0}$$

$$= \frac{b_M \prod_{k=1}^{M} (s - z_k)}{\prod_{k=1}^{N} (s - p_k)} \quad .$$

Transformada de Laplace

Sendo z_k as raízes do polinômio do numerador, denominados de zeros finitos de $X(s)$. Da mesma forma, p_k representam as raízes do polinômio do denominador de $X(s)$, e são definidos como sendo os pólos de $X(s)$. A diferença entre os graus dos polinômios do numerador e do denominador de, $N-M$, é definido como sendo o grau relativo de $X(s)$.

Diagrama de Pólos e Zeros



Transformada de Laplace

Exemplo 6.1: Determinar a transformada de Laplace e a RDC de $x(t) = e^{at}u(t)$.

Exemplo 6.2: Determinar a transformada de Laplace e a RDC de $x(t) = -e^{at}u(-t)$.

Exercício 6.1: Determinar a transformada de Laplace e a RDC de $x(t) = u(t-5)$.

Transformada de Laplace Unilateral

Em muitas aplicações os sistemas considerados são causais, interessando apenas o comportamento do sistema em instantes $t \geq 0$. Sendo assim é comum a utilização da transformada de Laplace unilateral, avaliadas para $t > 0$.

Definição: A transformada de Laplace unilateral de um sinal $x(t)$ é definida por

$$X(s) = \int_{0^+}^{\infty} x(t)e^{-st}dt \quad .$$

Transformada de Laplace Unilateral

O limite inferior 0^+ implica não incluir o ponto $t = 0$ na integral, excluindos as descontinuidades e impulsos em $t = 0$. Sendo assim, representa-se

$$x(t) \overset{L_u}{\leftrightarrow} X(s)$$

Por exemplo

$$e^{at}u(t) \overset{L_u}{\leftrightarrow} \frac{1}{s-a}$$

equivale a

$$e^{at}u(t) \overset{L_u}{\leftrightarrow} \frac{1}{s-a} \quad com\, RDC\ Re\{s\} > a$$

Transformada de Laplace - Propriedades

As propriedades da transformada de Laplace são similares as da transformada de Fourier. Nas propriedades apresentadas a seguir será considerado

$$x(t) \overset{L}{\leftrightarrow} X(s) \quad \text{e} \quad y(t) \overset{L}{\leftrightarrow} Y(s)$$

sendo omitido doravante o "u" de unilateral.

Transformada de Laplace - Propriedades

Linearidade:

$$ax(t)+by(t)\overset{L}{\leftrightarrow}aX(s)+bY(s)$$

Mudança de Escala:

$$x(at)\overset{L}{\leftrightarrow}\frac{1}{|a|}X\left(\frac{s}{a}\right)$$

Transformada de Laplace - Propriedades

Deslocamento no tempo:

$$x(t-\tau) \overset{L}{\leftrightarrow} e^{-s\tau} X(s)$$

para todo τ tal que $x(t-\tau)u(t) = x(t-\tau)u(t-\tau)$.

Transformada de Laplace - Propriedades

Deslocamento no Domínio s:

$$e^{s_o t}x(t) \overset{L}{\leftrightarrow} X(s - s_o)$$

A multiplicação por uma exponencial complexa no domínio tempo introduz um deslocamento na frequência complexa da transformada de Laplace.

Transformada de Laplace - Propriedades

Convolução:

$$x(t) * y(t) \overset{L}{\leftrightarrow} X(s)Y(s)$$

Diferenciação no Domínio s:

$$-tx(t) \overset{L}{\leftrightarrow} \frac{d}{ds} X(s)$$

Transformada de Laplace - Propriedades

Exemplo 6.3: Determinar a transformada de Laplace unilateral de

$$x(t) = (-e^{3t}u(t)) * (tu(t)).$$

Exercício 6.3: Determinar a transformada de Laplace unilateral de

$$x(t) = e^{-t}(t-2)u(t-2).$$

Transformada de Laplace - Propriedades

Diferenciação no Domínio Tempo:

$$\frac{d}{dt}x(t) \overset{L}{\leftrightarrow} \int_{0^+}^{\infty}\left(\frac{d}{dt}x(t)\right)e^{-st}dt$$

Exercício: A partir da expressão anterior deduzir a relação:

$$\frac{d}{dt}x(t) \overset{L}{\leftrightarrow} sX(s) - x(0^+)$$

Transformada de Laplace - Propriedades

Exercício: Obter a transformada de Laplace de $\frac{d^2 x(t)}{dt^2}$ e generalize para o caso de $\frac{d^n x(t)}{dt^n}$.

Transformada de Laplace - Propriedades

Propriedade da Integração:

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau \overset{L}{\leftrightarrow} \frac{x^{(-1)}(0^+)}{s} + \frac{X(s)}{s}$$

em que

$$x^{(-1)}(0^+) = \int_{-\infty}^{0^+} x(\tau)\,d\tau$$

é o valor da integral para $t \in (-\infty; 0^+]$.

Transformada de Laplace - Propriedades

Exercício 6.4: Obter a transformada de Laplace de $x(t) = tu(t)$.

Teoremas do Valor Inicial e Final

Permite concluir, a partir da expressão de $X(s)$, valores de $x(0^+)$ e $x(\infty)$.

Teorema do Valor Inicial: $\lim_{s\to\infty} sX(s) = x(0^+)$

Teorema do Valor Final: $\lim_{s\to 0} sX(s) = x(\infty)$

Teoremas do Valor Inicial e Final

Exercício 6.5: Determinar os valores inicial e final de $x(t)$ sendo

$$X(s) = -e^{-5s}\,\frac{2}{s(s+2)}$$

Exercício: Determinar o valor final de $x(t)$ sendo

$$X(s) = \frac{7s+10}{s(s-2)}$$