Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Departamento de Engenharia Elétrica

Inversão da Transformada de Laplace

A determinação da transformada de Laplace inversa será realizada empregando a relação biunívoca entre um sinal no tempo e sua transformada unilateral. Considerando a função que se pretende obter a transformada inversa representada na forma

$$X(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_M s^M + b_{M-1} s^{M-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{s^N + a_1 s^{N-1} + \ldots + a_1 s + a_0}\ ,\ M < N\ .$$

Inversão da Transformada de Laplace

A função $X(s)$ pode ser representada também na forma

$$X(s) = \frac{b_M s^M + b_{M-1} s^{M-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{\prod_{k=1}^{N} (s - p_k)} \quad .$$

Se todos os pólos p_k forem distintos, pode-se escrever $X(s)$ como soma de termos simples usando a expansão em frações parciais, da seguinte forma:

Inversão da Transformada de Laplace

$$X(s) = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{s - p_k}$$

sendo

$$A_k e^{p_k t} u(t) \overset{L}{\leftrightarrow} \frac{A_k}{s - p_k}$$

Inversão da Transformada de Laplace

Se o pólo p_i for repetido *r* vezes, então haverão *r* termos na expansão em frações parciais associadas a este pólo, na forma

$$\frac{A_{i1}}{s-p_i}, \frac{A_{i2}}{(s-p_i)^2}, \ldots, \frac{A_{ir}}{(s-p_i)^r} .$$

A transformada de Laplace inversa de cada termo é obtida usando-se o par

$$\frac{At^{n-1}}{(n-1)!} e^{p_k t} u(t) \overset{L}{\leftrightarrow} \frac{A}{(s-p_k)^n} .$$

Inversão da Transformada de Laplace

Para o caso em que $X(s)$ apresenta pólos complexos conjugados na forma $p_{1,2} = \alpha \pm j\omega_0$, é conveniente representar estes termos por pares transformados já conhecidos, por exemplo:

$$C_1 e^{\alpha t} cos(\omega_0 t) \overset{L}{\leftrightarrow} C_1 \frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2 + \omega_0^2}$$

$$C_2 e^{\alpha t} sen(\omega_0 t) \overset{L}{\leftrightarrow} C_2 \frac{\omega_0}{(s-\alpha)^2 + \omega_0^2}$$

Inversão da Transformada de Laplace

Exemplo:

$$X(s) = \frac{(s+2)}{s\,(s+1)(s+4)}$$

$$= \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+4}$$

$$A(s+1)(s+4)\Big|_{s=0} = s+2 \Rightarrow A = 0.5$$

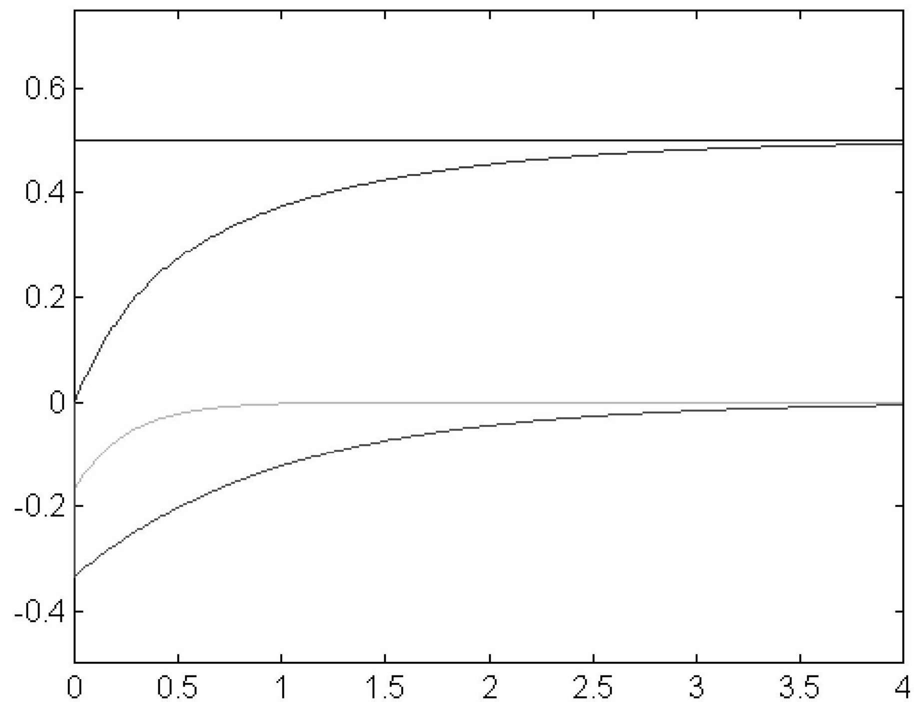
$$B(s)(s+4)\Big|_{s=-1} = s+2 \Rightarrow B = -1/3$$

$$C(s)(s+1)\Big|_{s=-4} = s+2 \Rightarrow C = -1/6$$

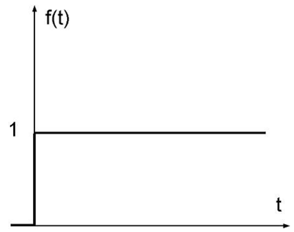
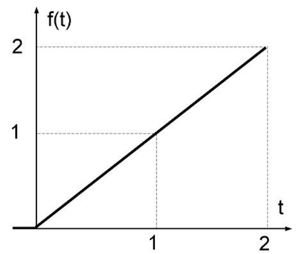
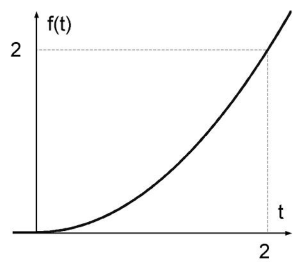
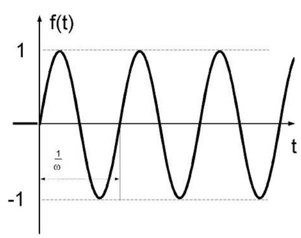
Inversão da Transformada de Laplace

Resposta temporal:

$$x(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}e^{-t} - \frac{1}{6}e^{-4t}$$



f(t) para t≥0	F(s)
$\delta(t)\begin{cases} 0 \rightarrow t \neq 0 \\ \infty \rightarrow t = 0 \end{cases}$	1
$u(t)\begin{cases} 0 \rightarrow t < 0 \\ 1 \rightarrow t \geq 0 \end{cases}$	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
$t^k e^{-at}$	$\frac{k!}{(s+a)^{k+1}}$
$\mathrm{sen}(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$e^{-at}\,\mathrm{sen}(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
$e^{-at}\cos(\omega t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$

Gráfico	Nome	f(t)	F(s)
	Degrau	$u(t)$	$\frac{1}{s}$
	Rampa	$t \cdot u(t)$	$\frac{1}{s^2}$
	Parábola	$\frac{t^2}{2} u(t)$	$\frac{1}{s^3}$
	Senoidal	$\text{sen}(\omega t)u(t)$ ω: freqüência [rad/s]	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$

Inversão da Transformada de Laplace

Exemplo 6.6: Determinar a transformada de Laplace inversa de

$$X(s) = \frac{3s+4}{(s+1)(s+2)^2}$$

Confira o resultado encontrado utilizando os Teoremas do Valor Final e Inicial.

Inversão da Transformada de Laplace

Exercício 6.6: Determinar a transformada de Laplace inversa de

$$X(s)=\frac{-5s-7}{(s+1)(s-1)(s+2)}$$

Confira o resultado encontrado utilizando os Teoremas do Valor Final e Inicial.

Inversão da Transformada de Laplace

Exemplo 6.7: Determinar a transformada de Laplace inversa de

$$X(s) = \frac{4s^2 + 6}{s^3 + s^2 - 2} \; .$$

Exercício 6.7: Obter a transformada de Laplace inversa de

$$X(s) = \frac{s^2 + s - 2}{s^3 + 3s^2 + 5s + 3} \; .$$

Resolvendo Equações Diferenciais com Condições Iniciais

Uma das aplicações da transformada unilateral de Laplace em análise de sistemas é resolver equações diferenciais com condições iniciais diferentes de zero. Para isto é utilizado a propriedade da diferenciação.

Resolvendo Equações Diferenciais com Condições Iniciais

Exemplo 6.8: Obter a resposta temporal $y(t)$ do sistema descrito por

$$\frac{dy(t)}{dt} + 5y(t) = x(t)$$

considerando como entrada $x(t) = 3e^{-2t}u(t)$, sendo a condição inicial $y(0^+) = -2$.

Resolvendo Equações Diferenciais com Condições Iniciais

Dado um sistema *LTI* descrito na forma de equações diferenciais, a resposta temporal do sistema pode ser obtida de forma sistemática utilizando as transformadas de Laplace da resposta forçada e da resposta natural do sistema.

Resolvendo Equações Diferenciais com Condições Iniciais

$$Y(s) = Y^n(s) + Y^f(s)$$

$Y^f(s)$ É obtido considerando condições iniciais nulas;

$Y^n(s)$ É obtido considerando entrada nula.

Resolvendo Equações Diferenciais com Condições Iniciais

Exemplo 6.9: Obter a saída do sistema $y(t)$ considerando

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 5\frac{dy(t)}{dt} + 6y(t) = 2\frac{dx(t)}{dt} + x(t)$$

sendo $x(t) = u(t)$, assumindo condições iniciais $y(0^+) = 1$ e $\left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{t=0^+} = 2$.

Resolvendo Equações Diferenciais com Condições Iniciais

Exemplo 6.10: Considere o sistema massa, mola, amortecedor

$$m\frac{d^2y(t)}{dt^2}+f\frac{dy(t)}{dt}+ky(t)=x(t)$$

Com $m=2\ kg,\ f=4\ N.s/m,\ k=202\ N/m$, $y(0^+)=5m$ $\left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{t=0^+}=-5\ m/s$ com entrada $x(t)=2[u(t)-u(t-1)]$.