Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Departamento de Engenharia Elétrica

Transformada Z

Semelhante ao apresentado anteriormente, entre a relação das transformadas de Fourier e de Laplace, será visto que a generalização da representação senoidal complexa de um sinal de tempo discreto pela DTFT, será realizada em termos de sinais exponenciais complexos pela transformada Z.

Transformada Z

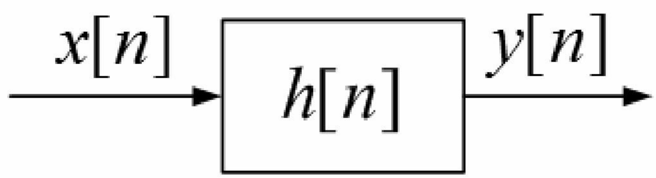
A transformada Z será apresentada, definindo $z = re^{j\Omega}$, ou seja um número complexo de módulo r e fase Ω. Admite-se então o sinal $x[n] = z^n$ como sendo um sinal exponencial complexo que pode ser expresso na forma

$$x[n] = r^n cos(\Omega n) + jr^n sen(\Omega n)$$

sendo r o fator de amortecimento e Ω a frequência do sinal senoidal.

Transformada Z

Considera-se então o sinal $x[n]$ aplicado a um sistema de tempo discreto com resposta ao impulso $h[n]$, ou seja:



$$
\begin{aligned}
y[n] &= H\{x[n]\} \\
&= h[n] * x[n] \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\,x[n-k]
\end{aligned}
$$

Transformada Z

Substituindo $x[n] = z^n$ obtém-se

$$y[n] = z^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] z^{-k}$$

Define-se então $$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) z^{-k}$$

como sendo a função de transferência do sistema, de forma que $H\{z^n\} = H(z)z^n$.

Transformada Z

Observa-se então que z^n é uma autofunção associada ao autovalor $H(z)$. A função de transferência do sistema, também pode ser representada na forma polar, ou seja, $H(z) = |H(z)|\, e^{j\phi(z)}$, sendo possível escrever o sinal de saída do sistema como

$$y[n] = |H(z)|\, e^{j\phi(z)} z^n$$

Transformada Z

Substituindo $z = re^{j\Omega}$, obtém-se:

$$y[n] = |H(re^{j\Omega})|\, r^n \cos(\Omega n + \phi(re^{j\Omega})) +$$
$$+\, j\, |H(re^{j\Omega})|\, r^n sen(\Omega n + \phi(re^{j\Omega}))$$

Observa-se, pela comparação entre o sinal aplicado a entrada do sistema, $x[n]$, e o sinal de saída $y[n]$, que o sistema altera a amplitude do sinal de entrada pelo fator $|H(re^{j\Omega})|$ e desloca a fase em $\phi(re^{j\Omega})$.

Transformada Z

Uma vez que

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] z^{-k}$$

pode-se reescrever $H(z)$, considerando $z = re^{j\Omega}$ na forma

$$H(re^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (h[n] r^{-n}) e^{-j\Omega n}$$

Transformada Z

Conclui-se então que $H(re^{j\Omega})$ corresponde a DTFT de $h[n]r^{-n}$, logo, a DTFT inversa de $h[n]r^{-n}$ pode ser escrita na forma

$$h[n]r^{-n} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(re^{j\Omega})e^{j\Omega n}d\Omega$$

ou ainda

$$h[n] = \frac{r^n}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(re^{j\Omega})e^{j\Omega n}d\Omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(re^{j\Omega})(re^{j\Omega})^n d\Omega \, .$$

Transformada Z

Uma vez que $z = re^{j\Omega}$ pode-se realizar a troca de variá-veis, sendo $dz = rje^{j\Omega}d\Omega$, logo

$$h[n] = \frac{1}{2\pi j}\oint H(z)z^{n-1}dz$$

sendo $\oint$ denota que a integração é realizada ao longo de

um círculo de raio $|z| = r$.

Transformada Z

Para um sinal arbitrário $x[n]$ tem-se então

$$X[z] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$$ Transformada Z

e

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint X(z) z^{n-1} dz$$ Transforma Z Inversa

Transformada Z

Ou ainda, a relação entre $x[n]$ e $X(z)$ é expressa na forma

$$x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z) \quad .$$

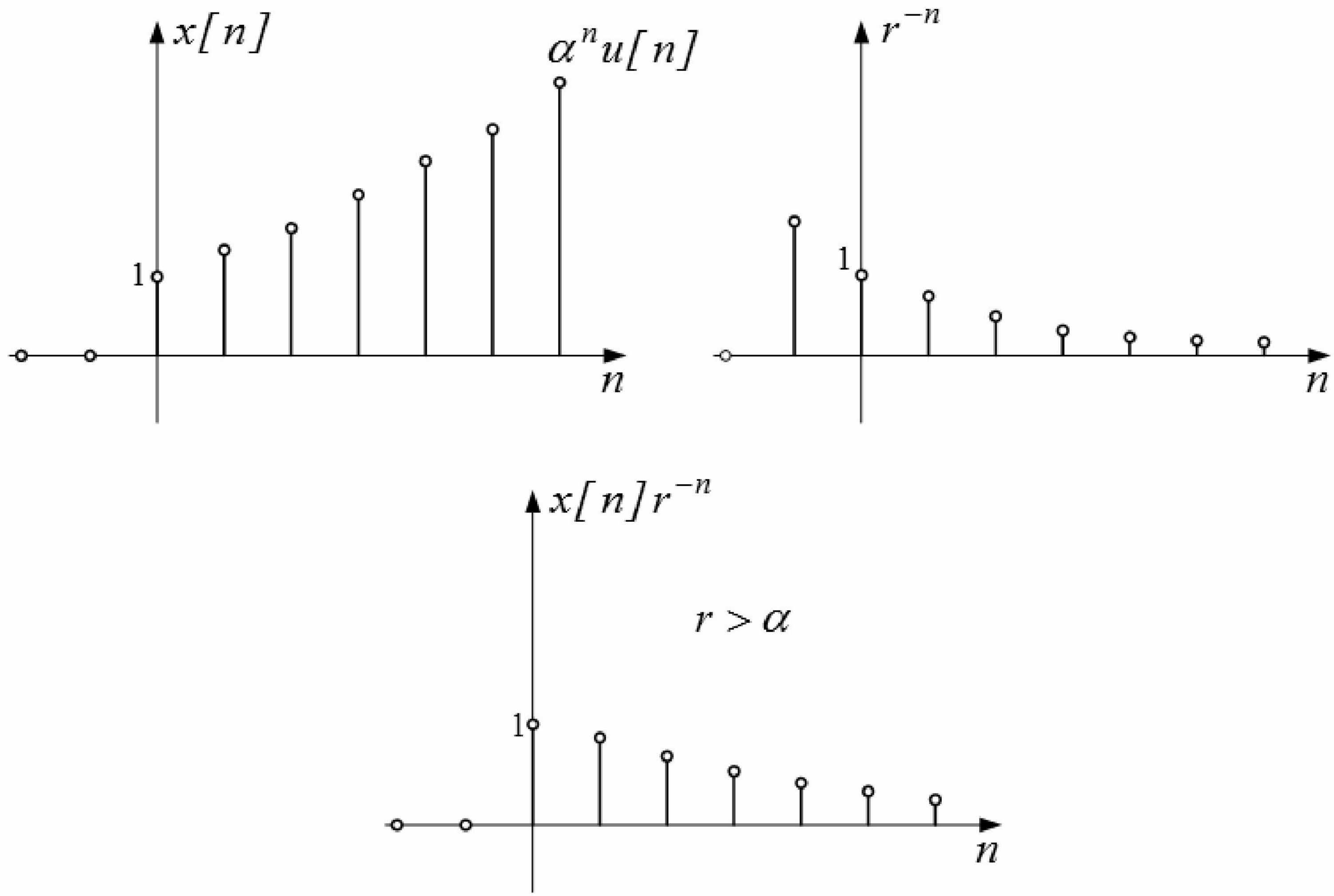
Uma vez que $|x[n]z^{-n}| = |x[n]r^{-n}|$, deve-se ter

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]r^{-n}| < \infty$$

De forma a garantir a somabilidade de $x[n]z^{-n}$.

Transformada Z

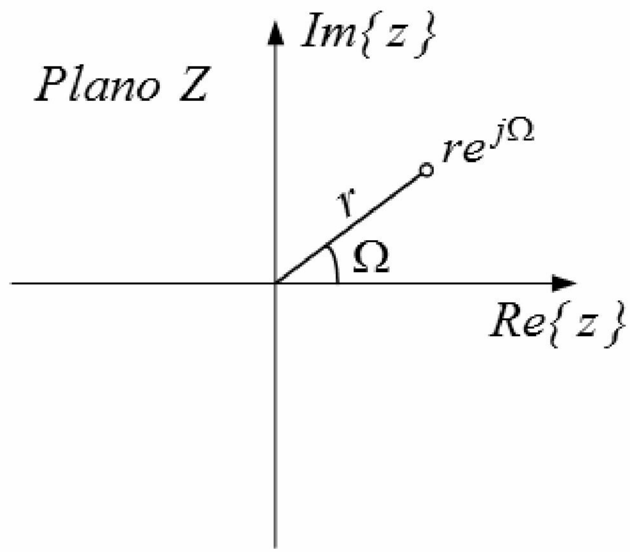
A faixa de valores de r que satisfaz esta condição é denominada de Região de Convergência. Conclui-se então, que a transformada Z existirá para sinais que não tem DTFT.



$x[n]$
$\alpha^n u[n]$
1
n
r^{-n}
1
n
$x[n]r^{-n}$
$r > \alpha$
1
n

Transformada Z

Pode-se representar o número complexo z por sua localização no plano complexo, denominado de Plano Z, na forma



Transformada Z

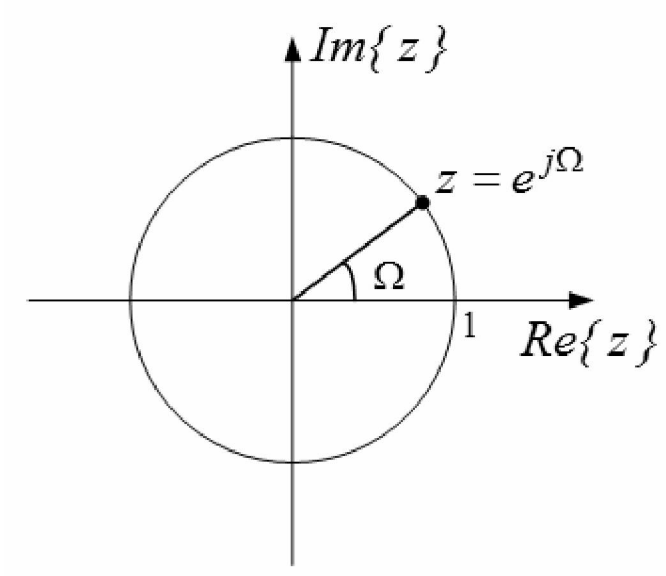
Observa-se que se $x[n]$ for absolutamente somável, a DTFT é obtida da transformada Z, fazendo-se $r = 1$, sendo $z = e^{j\Omega}$ na equação

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n} .$$

A relação $z = e^{j\Omega}$ descreve um círculo de raio unitário com centro na origem do Plano Z.

Transformada Z

A frequência Ω da DTFT corresponde ao ponto do círculo de raio unitário com ângulo Ω em relação ao eixo real positivo.



Transformada Z

Exemplo 7.1: Determinar a transformada Z do sinal

$$x[n] = \begin{cases} 1, n = -1 \\ 2, n = 0 \\ -1, n = 1 \\ 1, n = 2 \\ 0, caso\ contrário \end{cases} .$$

Transformada Z

É comum encontrar-se a transformada Z de um sinal ou da função de transferência discreta de um sistema na forma de uma função racional em z^{-1}, ou seja:

$$X(z) = \frac{b_o + b_1 z^{-1} + \ldots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_N z^{-N}}$$

ou ainda

$$X(z) = \frac{b_o \prod_{k=1}^{M} (1 - c_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N} (1 - p_k z^{-1})}$$

Transformada Z

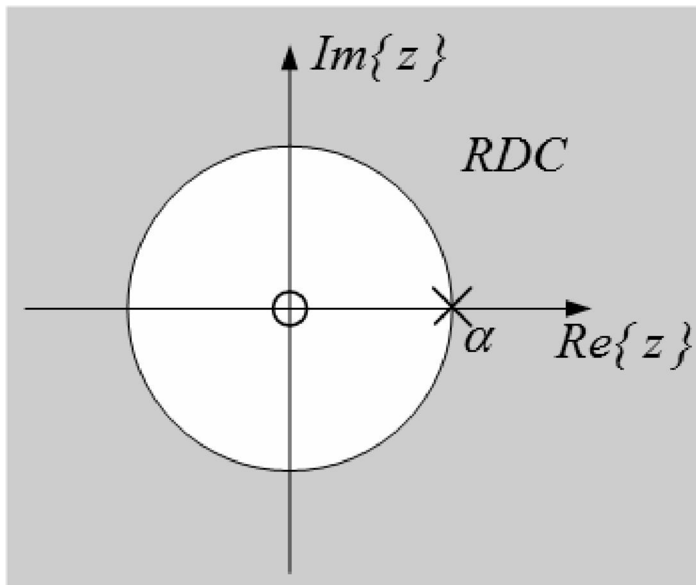
Sendo c_k as raízes do polinômio do numerador, ou os zeros de $X(z)$, e p_k as raízes do denominador, ou os pólos de $X(z)$.

Exemplo 7.2: Determinar a transformada Z do sinal

$$x[n] = \alpha^n u[n]$$

juntamente com a RDC e as localizações dos pólos e zeros de $X(z)$ no Plano Z.

Pólos, Zeros e RDC



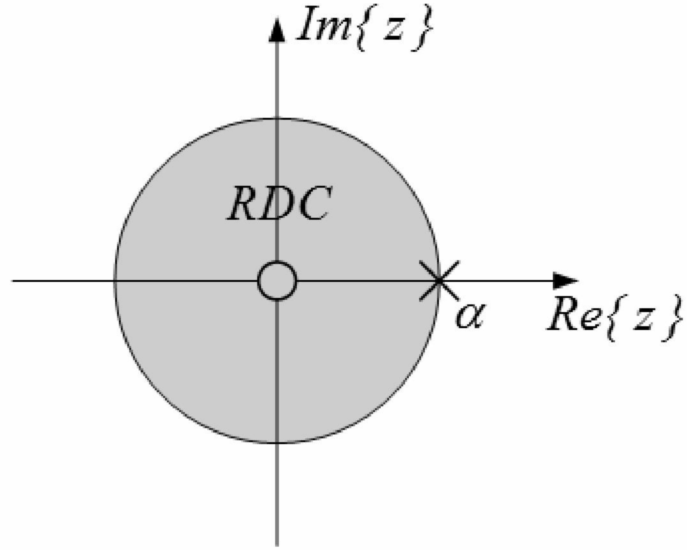
Transformada Z

Exemplo 7.3: Determinar a transformada Z do sinal

$$y[n] = -\alpha^{n} u[-n-1]$$

juntamente com a RDC e as localizações dos pólos e zeros no Plano Z.

Pólos, Zeros e RDC



Transformada Z

Exemplo 7.4: Determinar a transformada Z do sinal

$$x[n] = -u[-n-1] + \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

juntamente com a RDC e as localizações dos pólos e zeros no Plano Z.

Transformada Z

Exercício 7.1: Determinar a transformada Z, a RDC e a localização dos pólos e zeros de $X(z)$ para

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n] .$$

Transformada Z

Exercício 7.2: Determinar a transformada Z, a RDC e a localização dos pólos e zeros de $X(z)$ para

$$x[n] = e^{j\Omega_0 n}u[n] \; .$$

Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Departamento de Engenharia Elétrica

Propriedades da Transformada Z

A maioria das propriedades da transformada Z é análoga as da DTFT. Nas propriedades apresentadas a seguir supõe-se que

$$x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z)\ com\ RDC\ R_x$$

$$y[n] \xleftrightarrow{Z} Y(z)\ com\ RDC\ R_y$$

Propriedades da Transformada Z

Linearidade: A transformada Z de uma soma de sinais é igual a soma das transformadas Z individuais, ou seja,

$$ax[n] + by[n] \stackrel{Z}{\longleftrightarrow} aX(z) + bY(z)\, com$$

$$RDC\, no\, mínimo\, R_x \cap R_y$$

Exemplo 7.6: Suponha que

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \left(\frac{3}{2}\right)^n u[-n-1] \xleftrightarrow{z} X(z) = \frac{-z}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{3}{2}\right)}$$

$$com\ RDC\ \frac{1}{2} < |z| < \frac{3}{2}$$

$$y[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] - \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \xleftrightarrow{z} Y(z) = \frac{-\frac{1}{4}z}{\left(z-\frac{1}{4}\right)\left(z-\frac{1}{2}\right)}$$

$$com\ RDC\ |z| > \frac{1}{2}$$

avaliar as transformadas Z de $ax[n] + by[n]$.

Propriedades da Transformada Z

Inversão no Tempo:

$$x[-n] \xleftrightarrow{Z} X\left(\frac{1}{z}\right) com\, RDC\, \frac{1}{R_x}$$

Ou reflexão, corresponde a substituir z por z^{-1}.

Propriedades da Transformada Z

Deslocamento no Tempo:

$$x[n-n_0] \xleftrightarrow{Z} z^{-n_0} X(z)\, com\, RDC\; R_x$$

Propriedades da Transformada Z

Multiplicação por Sequência Exponencial:

Admitindo que α seja um número complexo

$$\alpha^n x[n] \stackrel{Z}{\longleftrightarrow} X(z/\alpha) \; com \; RDC \; |\alpha| R_x$$

Propriedades da Transformada Z

Convolução:

$$x[n] * y[n] \stackrel{Z}{\longleftrightarrow} X(z)Y(z)$$

$$\text{com RDC no mínimo } R_x \cap R_y$$

Propriedades da Transformada Z

Diferenciação no Domínio Z:

$$nx[n] \xleftrightarrow{Z} -z\frac{d}{dz}X(z) \; com \; RDC \; R_x$$

Propriedades da Transformada Z

Exemplo 7.7: Determinar a transformada Z do sinal

$$x[n] = \left(n(-1/2)^n\right)u[n] * (1/4)^{-n}u[-n]$$

Exemplo 7.8: Determinar a transformada Z do sinal

$$x[n] = a^n\ cos(\Omega_0 n)\, u[n]$$

Exercício 7.4: Determinar a transformada Z de

$$x[n] = u[n-2] * \left(\frac{2}{3}\right)^n u[n]$$