Inversão da Transformada Z

O método das frações parciais usa o conhecimento de diversos pares de transformada Z básicos e as propriedades da transformada Z para obtenção da transformada Z inversa das funções de interesse. Admite-se então que

$$X(z)=\frac{B(z)}{A(z)}=\frac{b_0+b_1z^{-1}+\ldots+b_Mz^{-M}}{a_0+a_1z^{-1}+\ldots+a_Nz^{-N}}.$$

Inversão da Transformada Z

Se $M \geq N$, pode-se realizar a divisão de polinômios e expressar $X(z)$ na forma

$$X(z) = \sum_{k=0}^{M-N} f_k z^{-k} + \frac{\widetilde{B}(z)}{A(z)}$$

onde $\widetilde{B}(z)$ é o resto da divisão $B(z)/A(z)$, que é um polinômio de ordem *N-1*.

Inversão da Transformada Z

Em alguns casos, $X(z)$ é expresso como a razão de polinômios em z ao invés de z^{-1}, por exemplo:

$$X(z) = \frac{2z^2 - 2z + 10}{3z^3 - 6z + 9} = \frac{z^2}{3z^3}\left(\frac{2 - 2z^{-1} + 10z^{-2}}{1 - 2z^{-2} + 3z^{-3}}\right)$$

$$= \frac{1}{3}z^{-1}\left(\frac{2 - 2z^{-1} + 10z^{-2}}{1 - 2z^{-2} + 3z^{-3}}\right)$$

Inversão da Transformada Z

Aplica-se então o método das frações parciais para o termo entre parênteses, e o fator $\frac{1}{3}z^{-1}$ é incorporado posteriormente, através da propriedade do deslocamento no tempo.

Inversão da Transformada Z

Para o caso em $N > M$

$$X(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_M z^{-M}}{\prod_{k=1}^{N} \left(1 - p_k z^{-1}\right)}$$

sendo p_k os pólos de $X(z)$. Se não houverem pólos repetidos tem-se

$$X(z) = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{1 - p_k z^{-1}} \quad .$$

Inversão da Transformada Z

A transformada Z inversa, associada com cada termo é então determinada usando-se o par

$$A_k(p_k)^n u[n] \xleftrightarrow{Z} \frac{A_k}{1-p_k z^{-1}}, RDC\,|z| > p_k$$

$$-A_k(p_k)^n u[-n-1] \xleftrightarrow{Z} \frac{A_k}{1-p_k z^{-1}}, RDC\,|z| < p_k \quad .$$

Inversão da Transformada Z

Se o pólo p_i for repetido r vezes, então haverão r termos na expansão em frações parciais associados a este pólo, ou seja:

$$\frac{A_{i1}}{1-p_i z^{-1}}, \frac{A_{i2}}{(1-p_i z^{-1})^2}, \ldots, \frac{A_{i2}}{(1-p_i z^{-1})^r}$$

Inversão da Transformada Z

A transformada Z inversa de cada termo é determinada por

$$A\frac{(n+1)\cdots(n+m-1)}{(m-1)!}(p_i)^n u[n] \xleftrightarrow{Z} \frac{A}{(1-p_i)^m}$$

$$com\ RDC\,|\,z\,|>p_i$$

ou

$$-A\frac{(n+1)\cdots(n+m-1)}{(m-1)!}(p_i)^n u[-n-1] \xleftrightarrow{Z} \frac{A}{(1-p_i)^m}\ .$$

$$com\ RDC\,|\,z\,|<p_i$$

Inversão da Transformada Z

Exemplo 7.9: Determinar a transformada Z inversa de

$$X(z) = \frac{1 - z^{-1} + z^{-2}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - 2z^{-1}\right)\left(1 - z^{-1}\right)}, \, com \; RDC \;\; 1 < | \, z \, | < 2$$

.

Exercício 7.5: Refazer o exemplo anterior, supondo que a RDC é $\frac{1}{2} < | \, z \, | < 1$.

Inversão da Transformada Z

Exemplo 7.10: Determinar a transformada Z inversa de

$$X(z) = \frac{z^3 - 10z^2 - 4z + 4}{2z^2 - 2z - 4}, RDC\ |z| < 1 \quad .$$

Exercício 7.6: Determinar a transformada Z inversa de

$$X(z) = \frac{16z^2 - 4z + 1}{8z^2 + 2z - 1}, RDC\ |z| > \frac{1}{2} \quad .$$

Inversão da Transformada Z

Expansão em Série de Potências: Este método de inversão é limitado a sinais unilaterais, ou seja com RDCs na forma $|z| < a$ ou $|z| > a$. Se a RDC for $|z| > a$, $X(z)$ será expresso em potências de z^{-1} a fim de se obter um sinal unilateral direito. Se a RDC for $|z| < a$, então $X(z)$ será expresso como uma série de potências em z, a fim de representar um sinal unilateral esquerdo.

Inversão da Transformada Z

Exemplo 7.11: Determinar a transformada Z inversa de

$$X(z) = \frac{2 + z^{-1}}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}}, RDC \, | \, z \, | > \frac{1}{2} \quad .$$

Refazer o exercício admitindo a RDC como $| \, z \, | < \frac{1}{2}$.

Análise com Transformada de Sistemas LTI

A saída $y[n]$ de um sistema LTI é expressa em termos da resposta ao impulso $h[n]$ e a entrada $x[n]$ na forma:

$$y[n] = h[n] * x[n] \xleftrightarrow{Z} Y(z) = H(z)X(z)$$

Portanto, a função de transferência de um sistema LTI de tempo discreto pode ser representado como a razão entre as transformadas Z dos sinais de saída e de entrada do sistema, ou seja

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}.$$

Análise com Transformada de Sistemas LTI

Uma vez que a equação de diferenças de *n-ésima* ordem que relaciona a entrada $x[n]$ com a saída $y[n]$ pode ser representada como

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] \quad .$$

Uma vez que

$$w[n-n_0] \xleftrightarrow{Z} z^{-n_0} W(z)$$

Pode-se obter a seguinte representação no domínio Z para a equação de diferenças anterior:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} X(z)$$

Através desta última expressão, obtém-se a função de transferência do sistema em função dos coeficientes da equação de diferenças, ou seja

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}} \; .$$

Análise com Transformada de Sistemas LTI

Exemplo 7.13: Encontre a descrição com equação de diferenças de um sistema com a seguinte função de transferência:

$$H(z) = \frac{5z + 2}{z^2 + 3z + 2}$$

Análise com Transformada de Sistemas LTI

A função de transferência de um sistema pode ser obtida a partir da representação do sistema na forma de espaço de estados, sendo o procedimento para os casos contínuos e discretos realizados de forma análoga. Será inicialmente obtida a função de transferência para o caso contínuo dado por

$$\begin{aligned} \dot{q}(t) &= Aq(t) + Bx(t) \\ y(t) &= Cq(t) + Dx(t) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} sQ(s) &= AQ(s) + BX(s) \\ Y(s) &= CQ(s) + DX(s) \end{aligned}$$

Análise com Transformada de Sistemas LTI

Da primeira equação do sistema representado no domínio frequência obtém-se a seguinte relação

$$(sI - A)Q(s) = BX(s) \Longrightarrow Q(s) = (sI - A)^{-1}BX(s)$$

Tal relação pode ser substituída na equação da saída *Y(s)* do sistema, resultando em $Y(s) = [C(sI - A)^{-1}B + D]X(s)$

logo

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = [C(sI - A)^{-1}B + D] \quad .$$

Análise com Transformada de Sistemas LTI

Para o caso discreto realiza-se um procedimento similar ao caso contínuo, ou seja:

$$q[n+1] = Aq[n] + Bx[n]$$
$$y[n] = Cq[n] + Dx[n]$$

$$\Rightarrow$$

$$zQ(z) = AQ(z) + BX(z)$$
$$Y(z) = CQ(z) + DX(z)$$

Análise com Transformada de Sistemas LTI

Da primeira equação para o caso discreto obtém-se

$$(zI - A)Q(z) = BX(z) \Longrightarrow Q(z) = (zI - A)^{-1}BX(z)$$

Tal relação pode ser substituída na equação da saída ***Y(z)*** do sistema, resultando em $Y(z) = [C(zI - A)^{-1}B + D]X(z)$ logo

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = [C(zI - A)^{-1}B + D] \; .$$

Análise com Transformada de Sistemas LTI

Exemplo 7.14: Determinar a função de transferência de um sistema LTI que possui a seguinte representação por variáveis de estados:

$$q[n+1] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1[n] \\ q_2[n] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} x[n]$$

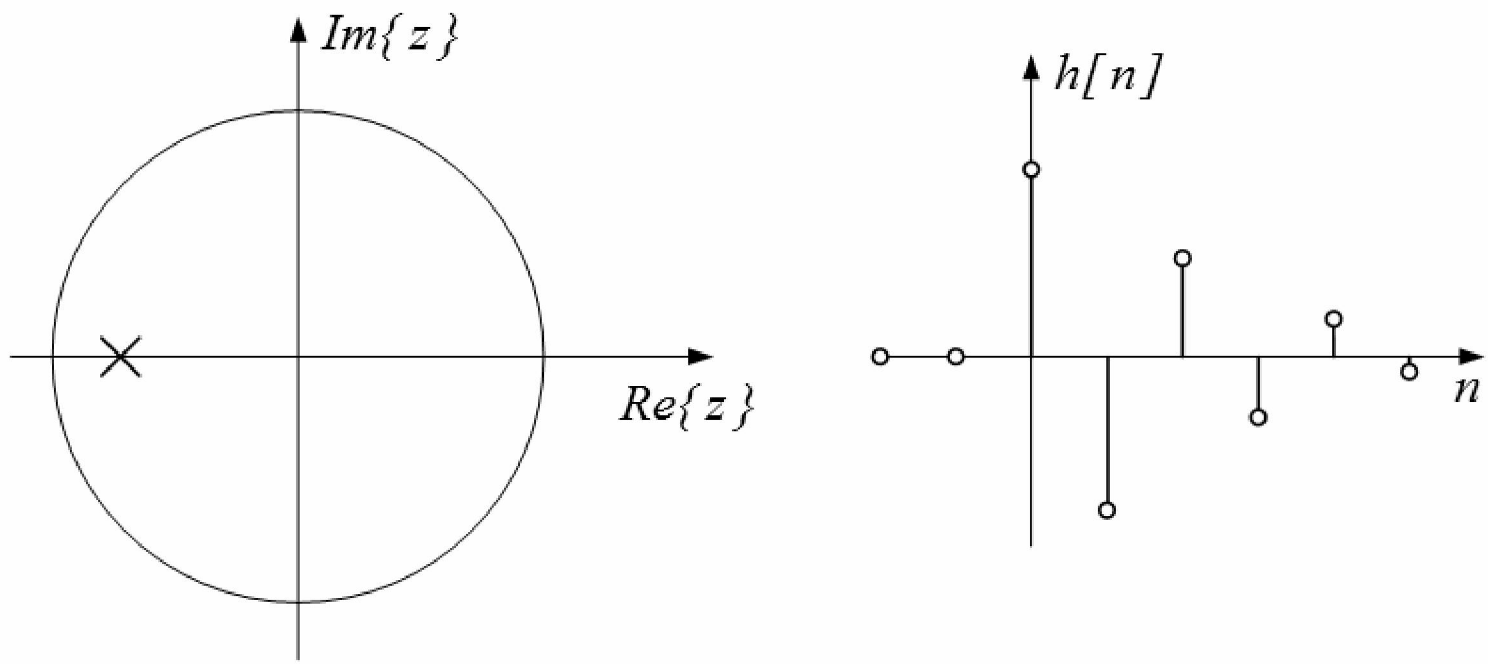
$$y[n] = [3 \quad 0] \begin{bmatrix} q_1[n] \\ q_2[n] \end{bmatrix}$$

Estabilidade e Causalidade

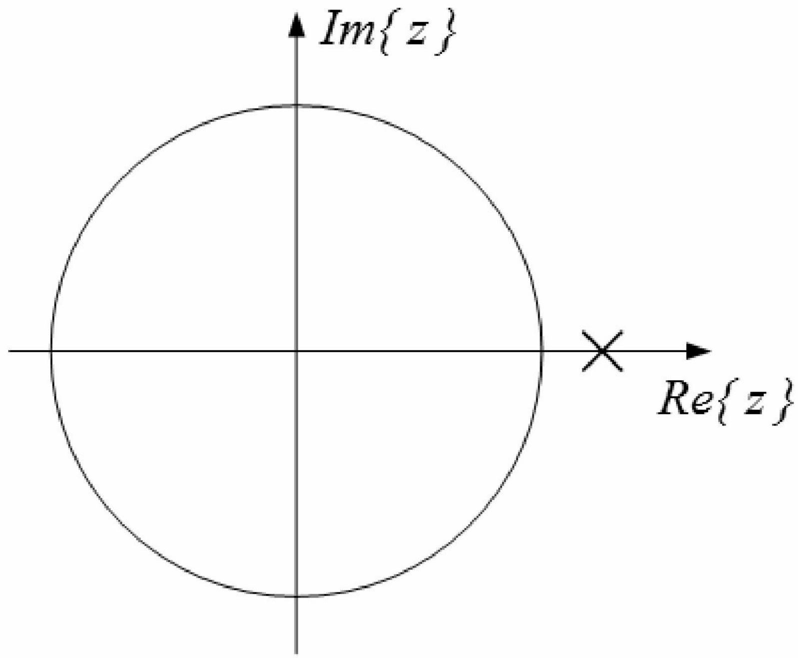
A resposta ao impulso de um sistema causal é zero para $n<0$. Portanto, a resposta ao impulso de um sistema causal é determinada a partir da função de transferência, admitindo sequência unilateral direita.

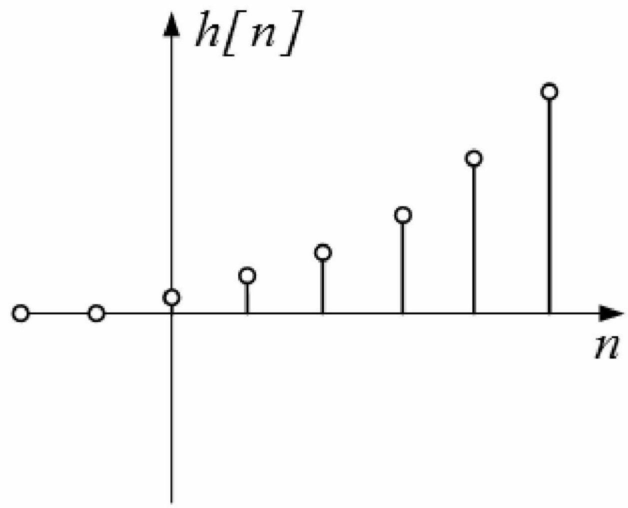
Pólos dentro do círculo de raio unitário contribuem em termos exponenciais decrescentes para a resposta ao impulso, ao passo que pólos fora do círculo de raio unitário contribuirão com termos exponenciais crescentes.

Estabilidade e Causalidade



Estabilidade e Causalidade





Estabilidade e Causalidade

Exemplo 7.15: Um sistema apresenta a seguinte função de transferência discreta:

$$H(z)=\frac{2}{1-0.9e^{j\frac{\pi}{4}}z^{-1}}+\frac{2}{1-0.9e^{-j\frac{\pi}{4}}z^{-1}}+\frac{3}{1+2z^{-1}}$$

Determinar a resposta ao impulso do sistema supondo que a sequência resultante seja (a) convergente, (b) causal.

Estabilidade e Causalidade

Exercício 7.8: Um sistema estável e causal é descrito pela equação de diferenças

$$y[n]+\frac{1}{4}y[n-1]-\frac{1}{8}y[n-2]=-2x[n]+\frac{5}{4}x[n-1]\;.$$

Determinar a resposta ao impulso deste sistema.

A Transformada Z Unilateral

A transformada Z unilateral de um sinal $x[n]$ é definida como

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

o qual depende somente de $x[n]$ para $n \geq 0$, e será denotada por

$$x[n] \xleftrightarrow{Z_u} X(z)$$

.

A partir da utilização da transformada Z unilateral, será possível a obtenção da resposta de sistemas descritos por equações de diferenças, sujeitos a condições iniciais. Para a inclusão de condições iniciais, considera-se a propriedade do deslocamento, admitindo $w[n] = x[n-1]$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

sendo

$$W(z) = \sum_{n=0}^{\infty} w[n] z^{-n}$$

Reescrevendo $W(z)$ em relação a $x[n]$ tem-se:

$$W(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n-1] z^{-n}$$

$$= x[-1] + \sum_{n=1}^{\infty} x[n-1] z^{-n}, \textit{fazendo}\, m = n-1$$

$$= x[-1] + \sum_{m=0}^{\infty} x[m] z^{-(m+1)}$$

$$= x[-1] + z^{-1} \sum_{m=0}^{\infty} x[m] z^{-m}$$

$$= x[-1] + z^{-1} X(z)$$

A Transformada Z Unilateral

Generalizando para um retardo de *k* unidades de tempo

$$x[n-k] \xleftrightarrow{Z_u} x[-k] + x[-k+1]z^{-1} + \ldots + \\ + x[-1]z^{-k+1} + z^{-k}, \; k > 0 \quad .$$

A generalização para um avanço de *k* unidades de tempo será

$$x[n+k] \xleftrightarrow{Z_u} -x[0]^{k} - x[1]z^{k-1} - \ldots - \\ + x[k-1]z + z^{k}X(z), \; k > 0 \quad .$$

A Transformada Z Unilateral

Exemplo 7.19: Considere o sistema descrito pela equação de diferenças

$$y[n]-0.9y[n-1]=x[n] \ .$$

Encontre a saída se a entrada $x[n]=u[n]$ e se a condição inicial da saída for $y[-1]=2$.

A Transformada Z Unilateral

Exercício 7.11: Determinar a resposta forçada $y^f[n]$ e a resposta natural $y^n[n]$, e a saída $y[n]$ do sistema descrito pela equação de diferenças

$$y[n]+3y[n-1]=x[n]+x[n-1]$$

sendo $x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$ e $y[-1]=1$.