Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Departamento de Engenharia Elétrica

Aplicações de Filtros

Para extrair o conteúdo de informação fundamental de um sinal é necessário um dispositivo que selecione as frequências de interesse que compõe o sinal. Este dispositivo é denominando de filtro, cuja resposta em frequência é caracterizada por uma faixa de passagem, por uma faixa de rejeição, as quais estão separadas por uma faixa de transição ou faixa de guarda.

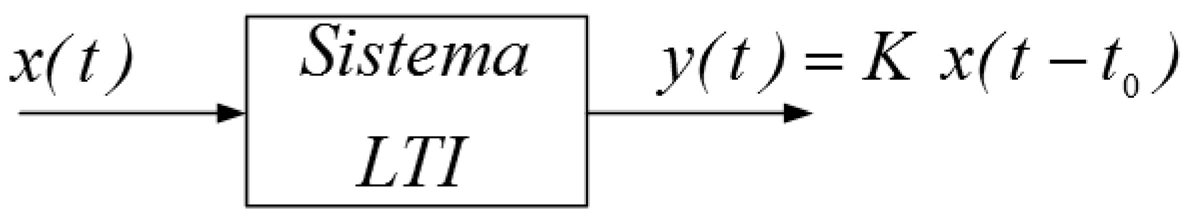
Aplicações de Filtros

Sinais com frequência dentro da faixa de passagem são recuperados com pouca ou nenhuma distorção, ao passo que aqueles sinais que têm frequências dentro da faixa de rejeição são efetivamente atenuados.

Desta forma, os filtros podem ser do tipo passa baixas, passa altas, passa faixa ou rejeita faixa.

Aplicações de Filtros

Como exemplo considera-se o filtro passa baixas ideal, o qual preserva todas as frequências dentro da faixa de passagem e atenua por completo todas as frequências dentro da faixa de rejeição, sendo nula a faixa de transição. Tal filtro será obtido tomando por base o seguinte sistema linear e invariante no tempo:



Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Departamento de Engenharia Elétrica

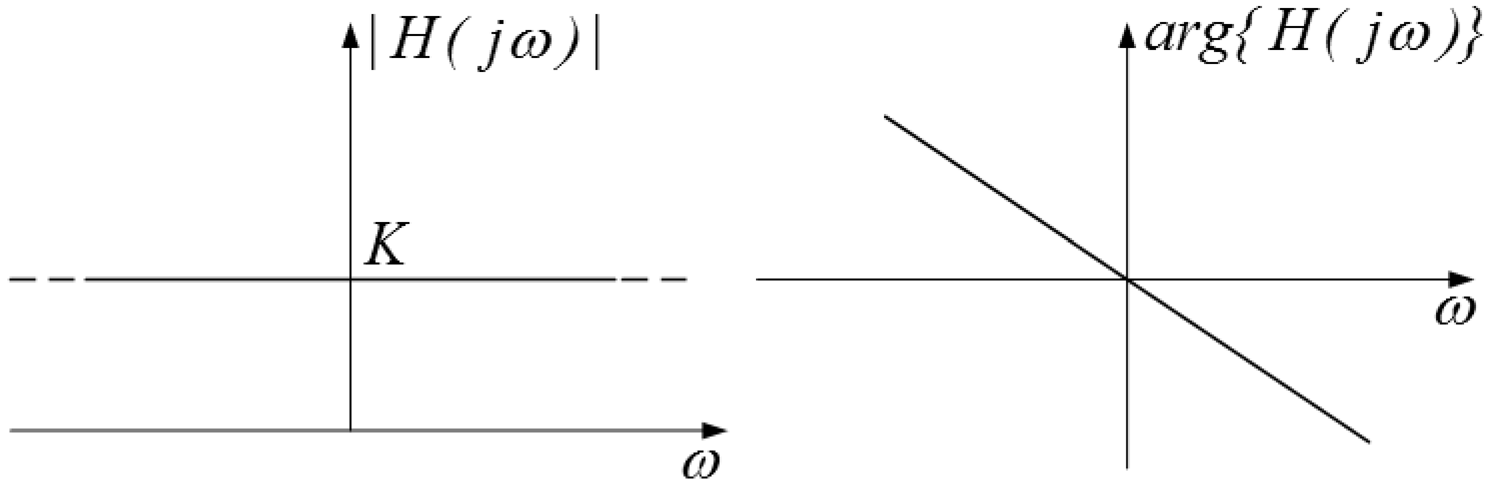
Aplicações de Filtros

Aplicando a transformada de Fourier para os sinais de entrada e de saída deste sistema pode-se obter sua função resposta em frequência, ou seja:

$$Y(j\omega) = K\ X(j\omega)e^{-j\omega t_0} \Rightarrow H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = K\ e^{-j\omega t_0}$$

Aplicações de Filtros

Com base na função resposta em frequência de $H(j\omega)$ determina-se sua resposta de magnitude e de fase, ou seja:



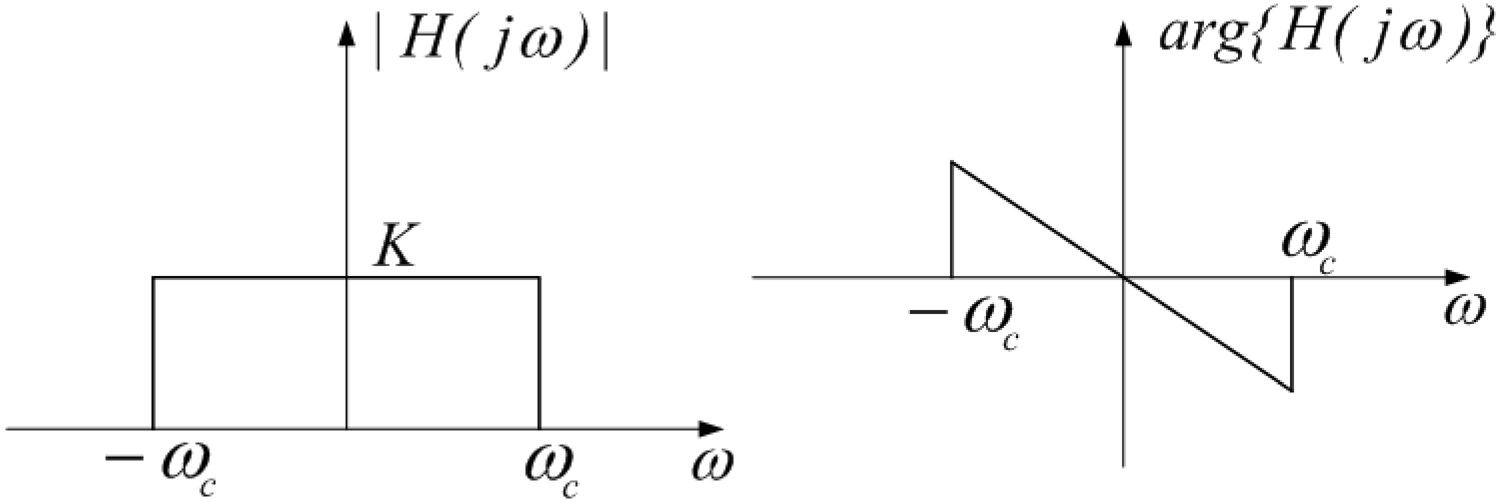
Aplicações de Filtros

O que o caracterizará como um filtro passa baixas ideal é se no projeto deste filtro for definida uma frequência de corte ω_c tal que sua função resposta em frequência seja redefinida na forma

$$H(j\omega) = \begin{cases} K\, e^{-j\omega t_0}, & -\omega_c \le \omega \le \omega_c \\ 0, & |\omega| > \omega_c \end{cases}.$$

Aplicações de Filtros

Resultando na seguinte resposta de magnitude e fase.



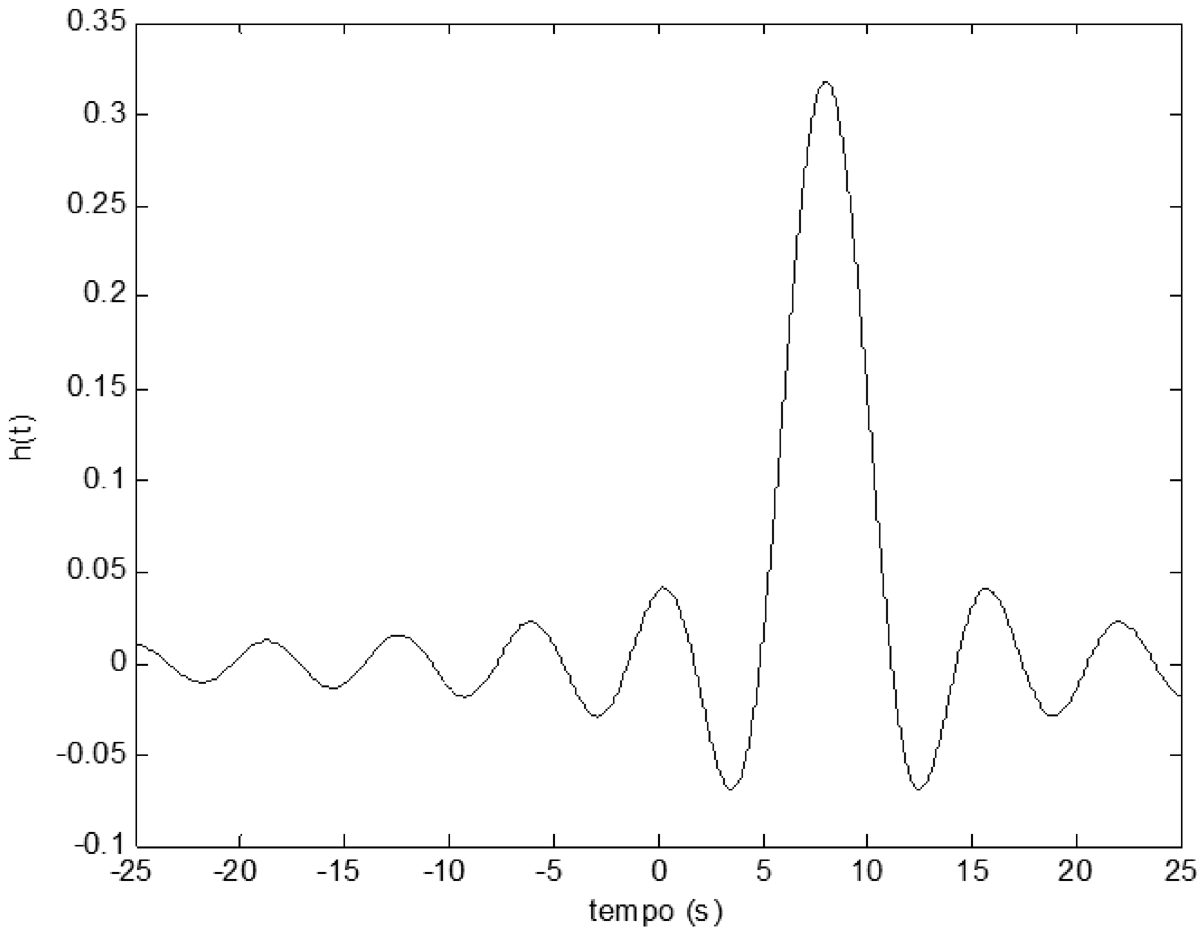
Aplicações de Filtros

A resposta ao impulso deste filtro passa baixas ideal pode ser obtida através da transformada de Fourier inversa de *H(jω)*, resultando em

$$h(t) = \frac{\omega_c}{\pi} \, sinc\left(\frac{\omega_c}{\pi}(t - t_0)\right)$$

que se caracteriza por ser uma resposta não causal, conforme apresentado na figura a seguir.

Resposta ao impulso do filtro ideal, admitindo t_0 = *8* segundos.



Projeto de Filtros

Diferentemente dos filtros ideais, não realizáveis fisicamente, no projeto de filtros tolera-se alguns desvios, que são utilizados como parâmetros de projeto, relacionados a seguir:

- Dentro da faixa de passagem a resposta do filtro deve situar-se entre 1 e 1-ε.

$$1-\varepsilon \leq |H(j\omega)| \leq 1,\ para\ \omega_{p1} \leq \omega \leq \omega_{p2}$$

Projeto de Filtros

Em que $\omega_{p2} - \omega_{p1}$ define a faixa de passagem do filtro e ε é um parâmetro de tolerância.

- Dentro da faixa de rejeição, a resposta em módulo do filtro não deve ultrapassar a δ:

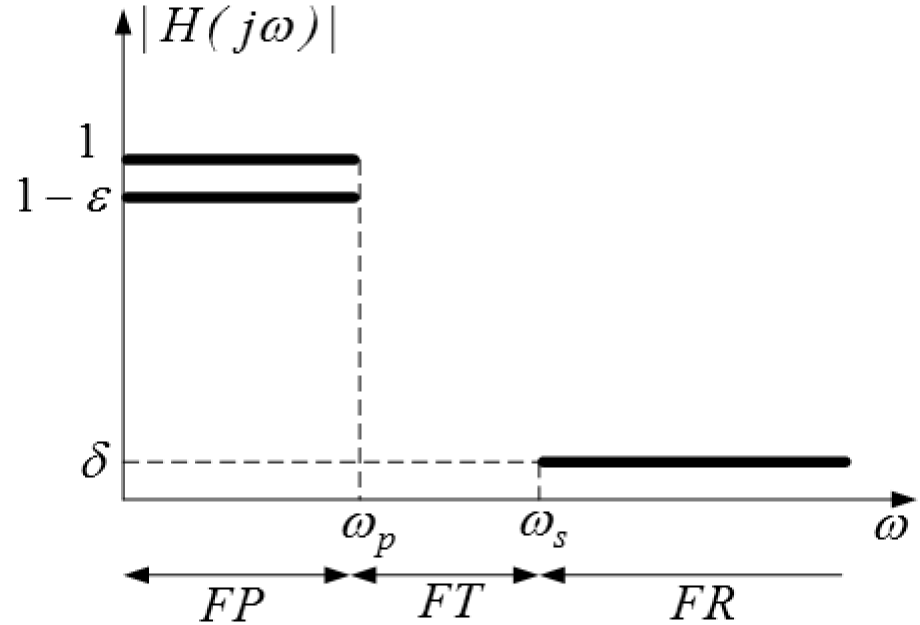
$$|H(j\omega)| \leq \delta$$

com ω pertencente a faixa de rejeição e δ outro parâmetro de tolerância.

- A faixa de transição é composta pelas frequências contidas entre a faixa de passagem e a faixa de rejeição.

A figura apresentada a seguir ilustra o conjunto de especificações definidas para a resposta em frequência de um filtro passa baixas.

FP:=Faixa de Passagem
FT:=Faixa de Transição
FR:= Faixa de Rejeição



Projeto de Filtros

Uma classe de sistemas *LTI* que é utilizada para obtenção da curva de resposta em frequência com módulo $|H(j\omega)|$ caracterizada na figura anterior são os filtros de *Butterworth.* A síntese dos filtros de *Butterworth* é realizada com base nas frequências nas faixas de frequências de passagem, de rejeição, nos parâmetros ε e δ, e na função que representa o quadrado da magnitude da função resposta em frequência para este tipo de filtro.

Projeto de Filtros

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1+\left(\dfrac{j\omega}{j\omega_c}\right)^{2N}}$$

Onde ω_c é a frequência de corte do filtro *Butterworth* passa baixas de ordem *N*. Uma vez que

$$|H(j\omega)|^2 = H(j\omega)H^*(j\omega) = H(j\omega)H(-j\omega)$$

Projeto de Filtros

Tem-se, admitindo $H(s)\big|_{s=j\omega} = H(j\omega)$,

$$H(s)H(-s) = \frac{1}{1+\left(\dfrac{s}{j\omega_c}\right)^{2N}}$$

cujas raízes do denominador corresponde aos pólos de *H(s)H(-s)*, e são obtidos através da solução da equação

$$0 = 1+\left(\frac{s}{j\omega_c}\right)^{2N} \Rightarrow s_p = (-1)^{1/2N}(j\omega_c)$$

Projeto de Filtros

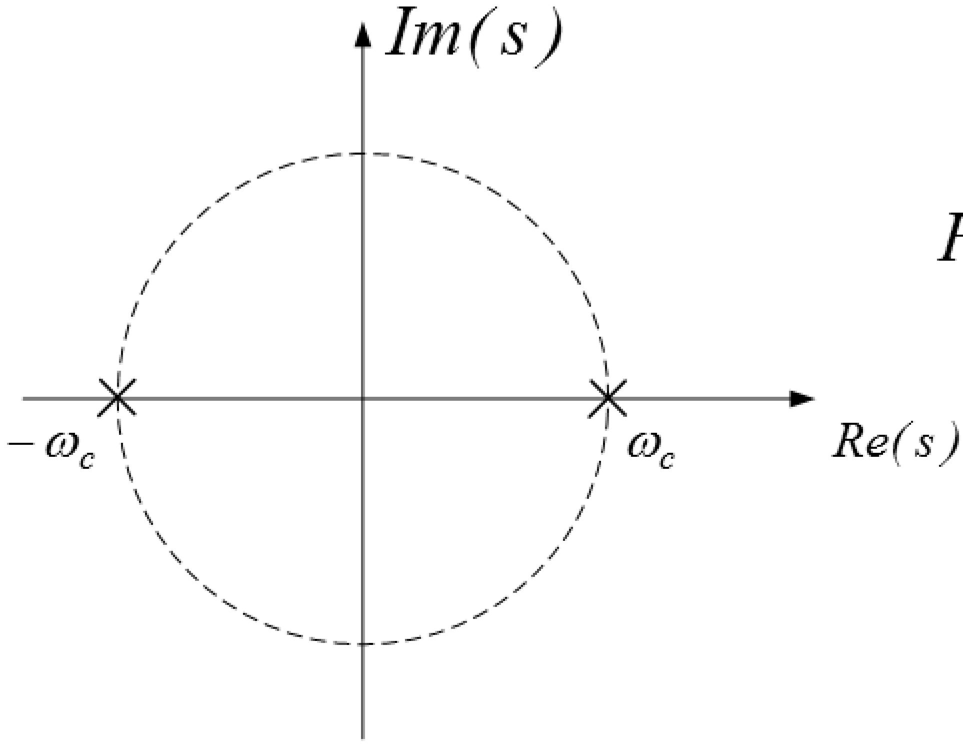
Resultando em

$$|s_p| = \omega_c \text{ e } arg\{s_p\} = \frac{\pi(2k+1)}{2N} + \frac{\pi}{2}, \;\; k = 0, 1, 2, \ldots, 2N-1$$

ou ainda

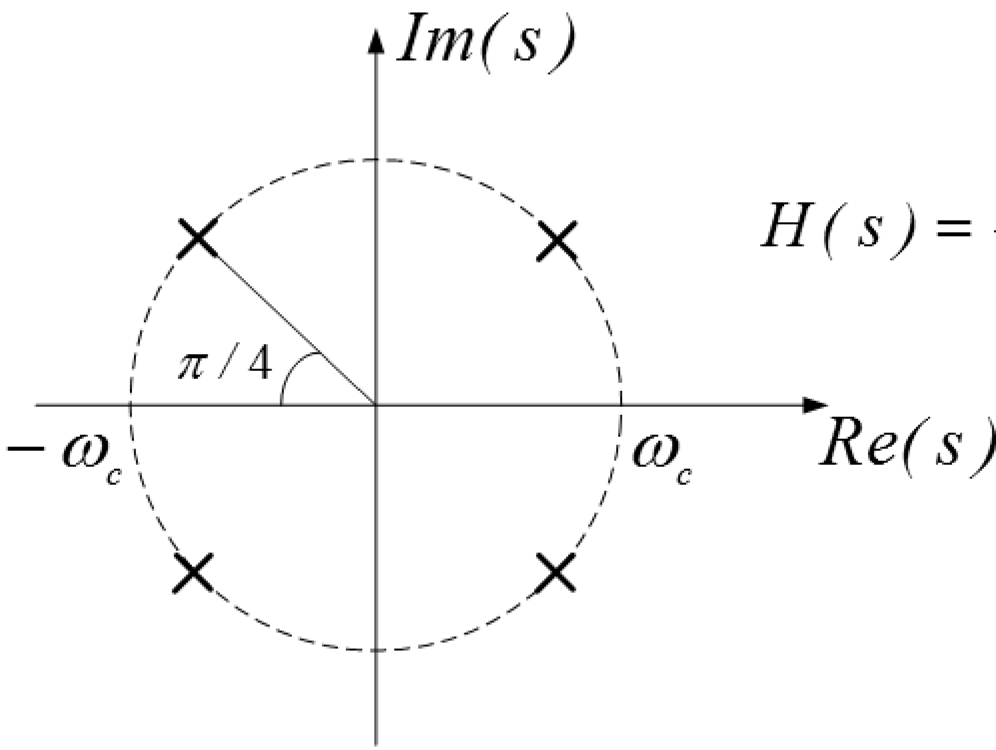
$$s_p = \omega_c \, exp\left(j\left[\frac{\pi(2k+1)}{2N} + \frac{\pi}{2} \right] \right).$$

Projeto de Filtros - Caso em que N=1



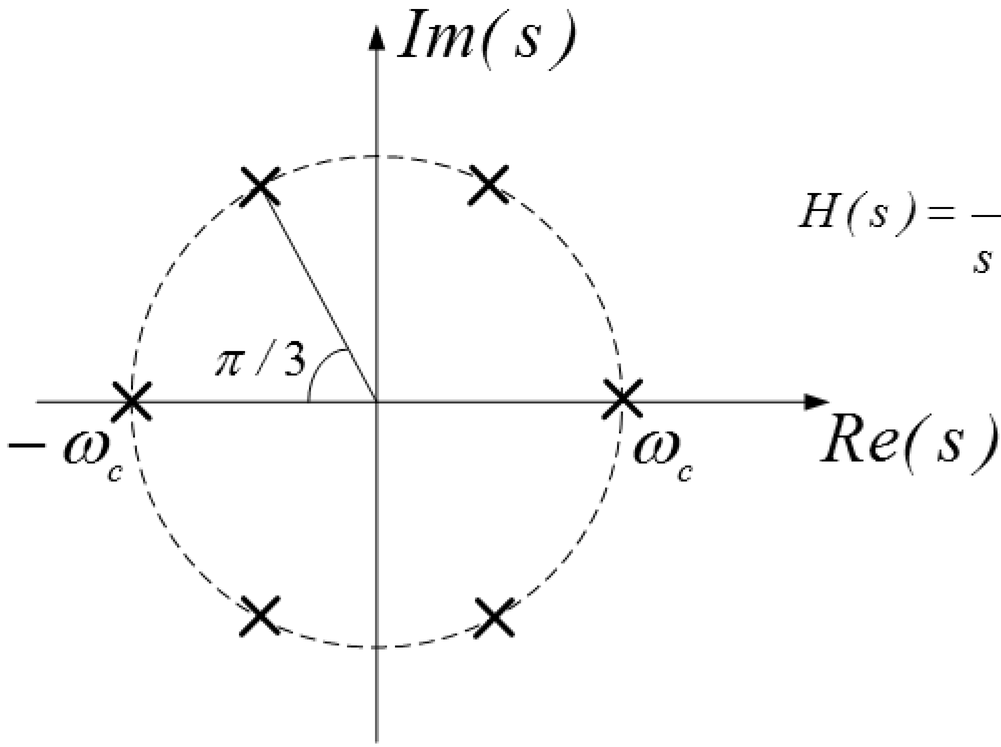
$$H(s) = \frac{\omega_c}{s + \omega_c}$$

Projeto de Filtros – Caso em que N=2



$$H(s) = \frac{\omega_c^2}{s + \sqrt{2}\,\omega_c s + \omega_c^2}$$

Projeto de Filtros – Caso em que N=3



$$H(s) = \frac{\omega_c^3}{s + 2\omega_c s^2 + 2\omega_c^2 s + \omega_c^3}$$

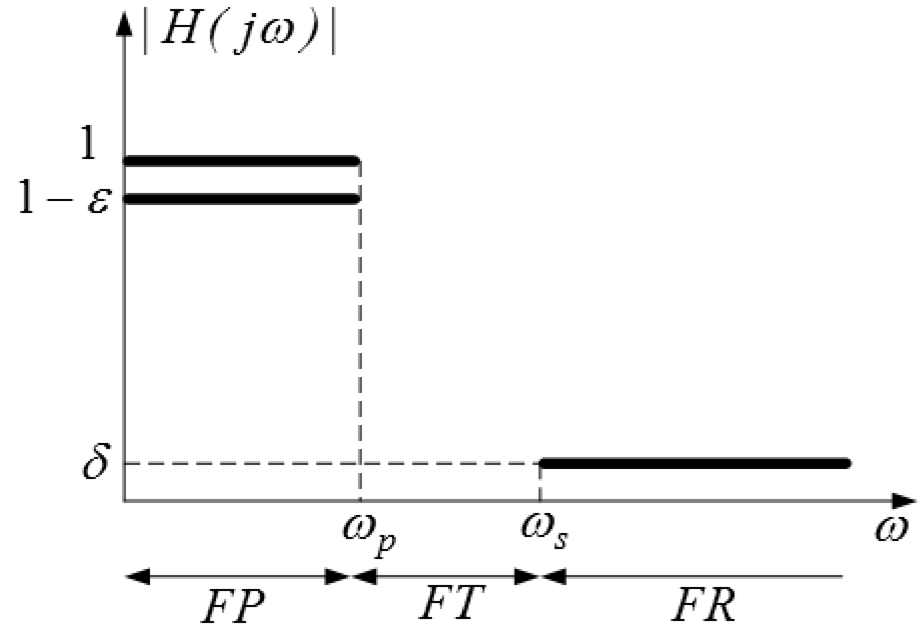
Resumo dos Filtros de Butterworth

$$H(s) = \frac{\omega_c^n}{Q(s)}$$

Ordem do Filtro n	*Polinômio Q(s)*
1	$s + \omega_c$
2	$s^2 + \sqrt{2}\,\omega_c s + \omega_c^2$
3	$s^3 + 2\omega_c s^2 + 2\omega_c^2 s + \omega_c^3$
4	$s^4 + 2.6131\omega_c s^3 + 3.4142\omega_c^2 s^2 + 2.6131\omega_c^3 s + \omega_c^4$
5	$s^5 + 3.2361\omega_c s^4 + 5.2361\omega_c^2 s^3 + 5.2361\omega_c^3 s^2 + 3.2361\omega_c^4 s + \omega_c^5$
6	$s^6 + 3.8637\omega_c s^5 + 7.4641\omega_c^2 s^4 + 9.1416\omega_c^3 s^3 + 7.4641\omega_c^4 s^2 + 3.8637\omega_c^5 s + \omega_c^6$

Projeto de Filtros – Determinação da Ordem

A ordem do filtro de Butterworth pode ser determinada com base nas especificações de $|H(j\omega)|$, através dos seguintes procedimentos.



Projeto de Filtros – Determinação da Ordem

$$(1-\varepsilon)^2 = \left| H(j\omega) \right|^2_{\omega=\omega_p}$$

$$(1-\varepsilon)^2 = \frac{1}{1+\left(\dfrac{\omega_p}{\omega_c}\right)^{2N}} \Rightarrow \omega_p = \omega_c \left(\frac{2\varepsilon - \varepsilon^2}{(1-\varepsilon)^2} \right)^{1/2N}$$

Projeto de Filtros – Determinação da Ordem

$$\delta^2 = \left| H(j\omega) \right|^2_{\omega=\omega_s}$$

$$\delta^2 = \frac{1}{1+\left(\dfrac{\omega_s}{\omega_c}\right)^{2N}} \Rightarrow \omega_s = \omega_c \left(\frac{1-\delta^2}{\delta^2}\right)^{1/2N}$$

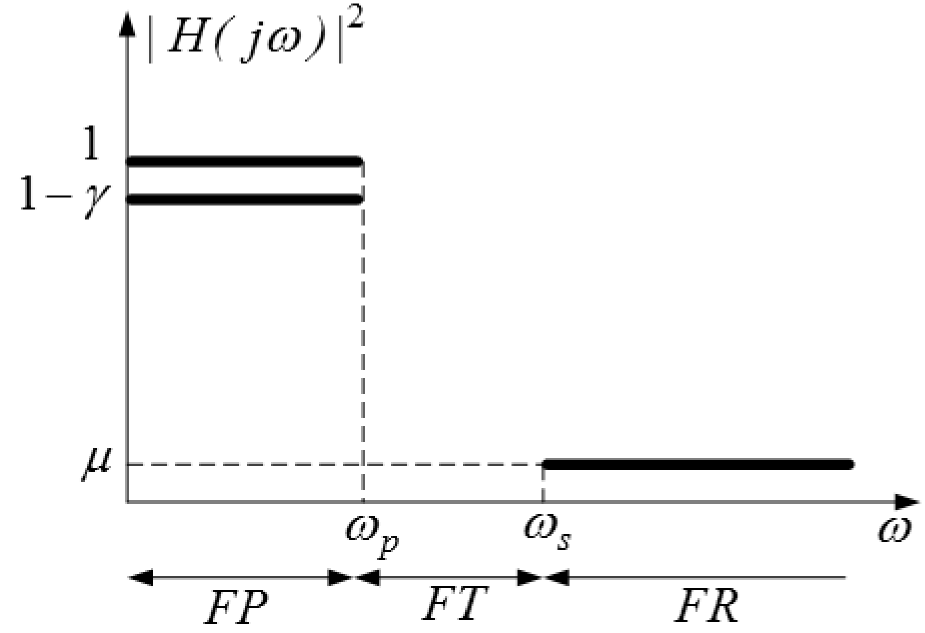
Projeto de Filtros – Determinação da Ordem

$$\frac{\omega_p}{\omega_s} = \frac{\omega_c\left(\dfrac{2\varepsilon-\varepsilon^2}{(1-\varepsilon)^2}\right)^{1/2N}}{\omega_c\left(\dfrac{1-\delta^2}{\delta^2}\right)^{1/2N}} = \left(\frac{(2\varepsilon-\varepsilon^2)\delta^2}{(1-\varepsilon)^2(1-\delta^2)}\right)^{1/2N}$$

$$N = \frac{log\left(\dfrac{(2\varepsilon-\varepsilon^2)}{(1-\varepsilon)^2(1-\delta^2)}\right)}{2\,log\left(\dfrac{\omega_p}{\omega_s}\right)}$$

Projeto de Filtros – Determinação da Ordem

- Outra forma possível para determinação da ordem do filtro de Butterworth é diretamente das especificações de $|H(j\omega)|^2$, de forma análoga a anterior.



Projeto de Filtros – Determinação da Ordem

$$1-\gamma = \left| H(j\omega) \right|^2_{\omega=\omega_p}$$

$$1-\gamma = \frac{1}{1+\left(\frac{\omega_p}{\omega_c}\right)^{2N}} \Rightarrow \omega_p = \omega_c \left(\frac{\gamma}{1-\gamma}\right)^{1/2N}$$

Projeto de Filtros – Determinação da Ordem

$$\mu = \left| H(j\omega) \right|^2_{\omega=\omega_s}$$

$$1-\gamma = \frac{1}{1+\left(\dfrac{\omega_s}{\omega_c}\right)^{2N}} \Rightarrow \omega_s = \omega_c \left(\frac{1-\mu}{\mu}\right)^{1/2N}$$

Projeto de Filtros – Determinação da Ordem

$$\frac{\omega_p}{\omega_s} = \frac{\left(\dfrac{\gamma}{1-\gamma}\right)^{1/2N}}{\left(\dfrac{1-\mu}{\mu}\right)^{1/2N}} = \left(\frac{\gamma\mu}{(1-\gamma)(1-\mu)}\right)^{1/2N}$$

$$N = \frac{\log\left(\dfrac{\gamma\mu}{(1-\gamma)(1-\mu)}\right)}{2\log\left(\dfrac{\omega_p}{\omega_s}\right)}$$

Projeto de Filtros

Exercício: Mostrar que para cada um dos filtros de Butterworth apresentados anteriormente, $N=1$, $N=2$ e $N=3$, a frequência ω_c corresponde a frequência de meia potência do sinal aplicado ao filtro.

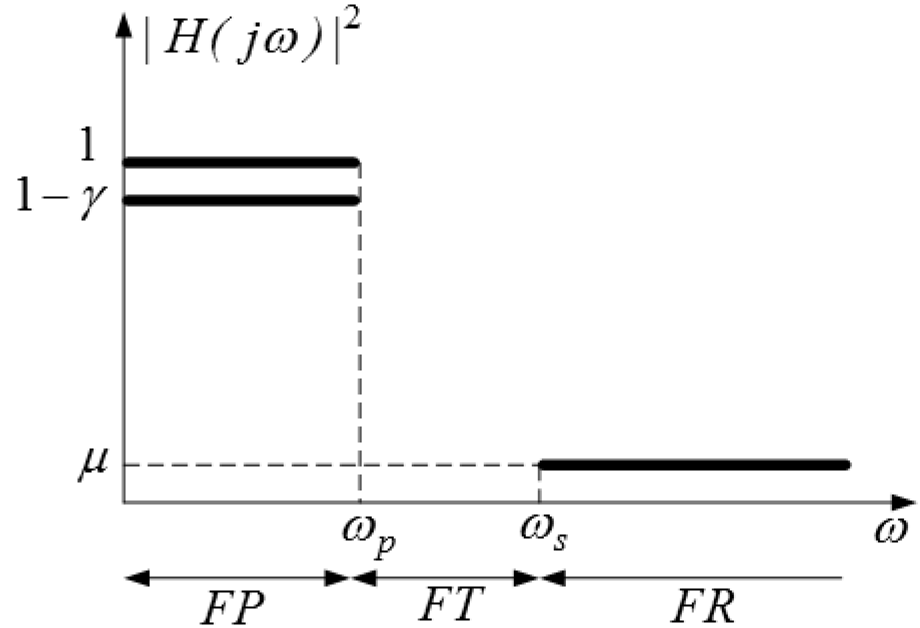
Exemplo 8.3: Determinar a função de transferência de um filtro passa baixas de Butterworth de ordem 3, com $\omega_c = 1.0$ rad/s.

Projeto de Filtros

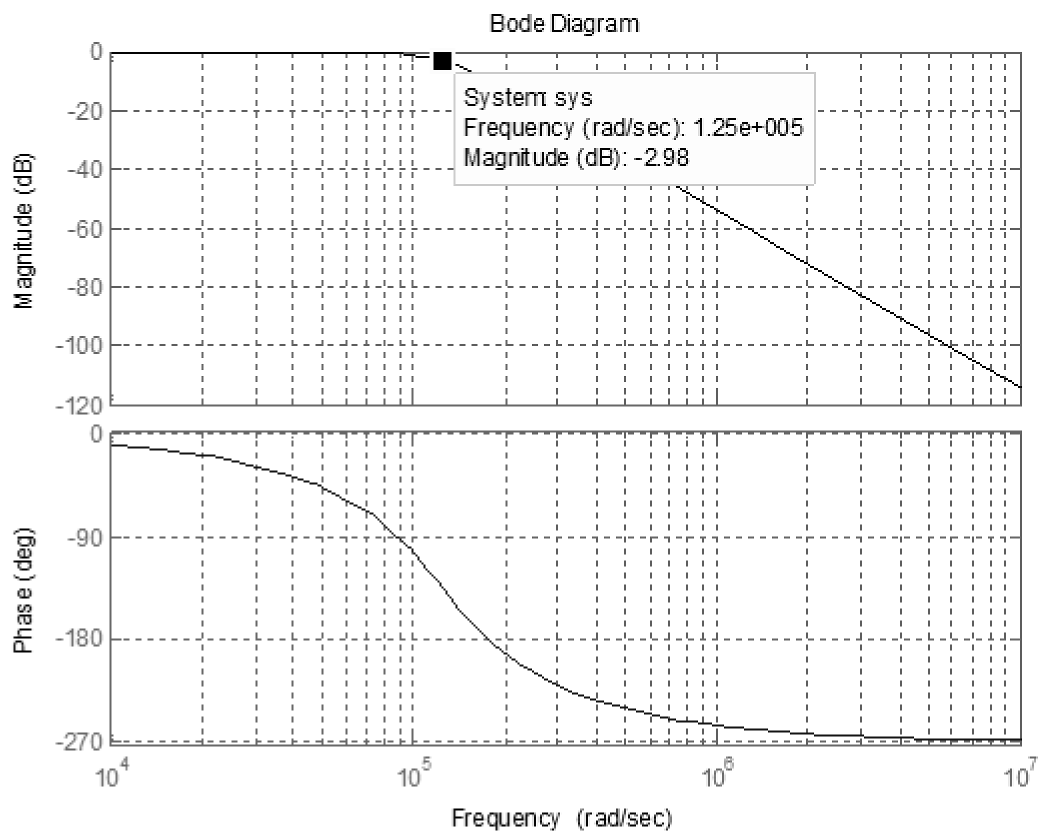
Projete um filtro passa baixas de Butterworth que satisfaça as seguintes especificações:

$$\omega_p = 10kHz, \gamma = 5\%$$

$$\omega_s = 40kHz, \mu = 5\%$$



Resposta: N=3, ω_c = 40000π rad/s



Projeto de Filtros