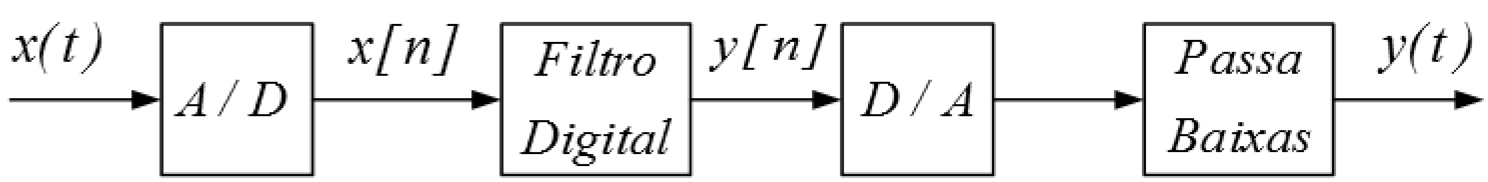
Filtros Digitais

O processo de filtragem de sinais pode ser realizado digitalmente, na forma esquematizada pelo diagrama apresentado a seguir:



Filtros Digitais

O bloco conversor *A/D* converte o sinal de tempo contínuo *x(t)* em uma sequência *x[n]*. O filtro digital processa a sequência *x[n]*, resultando em outra sequência *y[n]*, que representa o sinal filtrado na forma digital. Este sinal *y[n]* é então convertido para um sinal de tempo contínuo por um conversor *D/A* e reconstruído através de um filtro passa-baixas, cuja saída é o sinal *y(t)*, que representará a versão filtrada do sinal *x(t)*.

Filtros Digitais

Os filtros digitais são caracterizados em duas classes, dependendo da duração da sequência *y[n]* quando aplicado em sua entrada um sinal do tipo impulso.

1. Filtros Digitais cuja resposta ao impulso apresenta duração finita (*FIR – Finite Impulse Response*)

Filtros Digitais - *FIR*

Estes filtros apresentam a seguinte função de transferência discreta:

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} a_k z^{(M-k)}}{z^M}$$

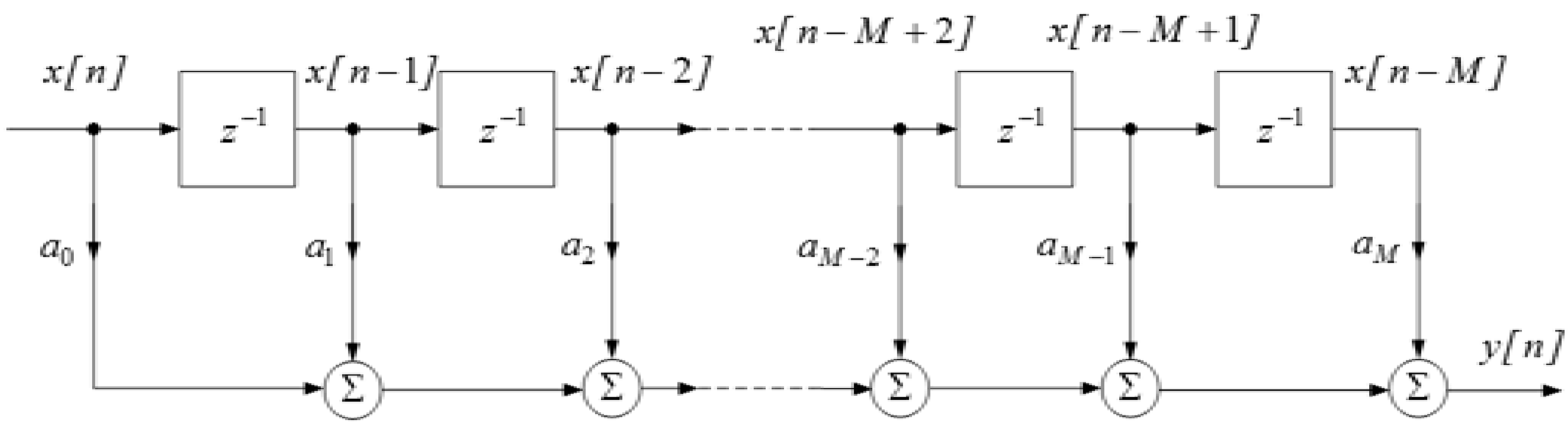
que pode ser reescrito como uma função polinomial com potências negativas de *z*.

Filtros Digitais - *FIR*

Os filtros do tipo *FIR* apresentam ainda as seguintes características:

- ✓ memória finita, portanto qualquer transitório tem duração limitada;
- ✓ são sempre *BIBO* estáveis;
- ✓ podem implementar uma resposta em módulo desejada com resposta em fase linear.

Filtros Digitais - *FIR*



Filtros Digitais - *IIR*

2. Filtros Digitais cuja resposta ao impulso apresenta duração infinita (*IIR – Infinite Impulse Response*)

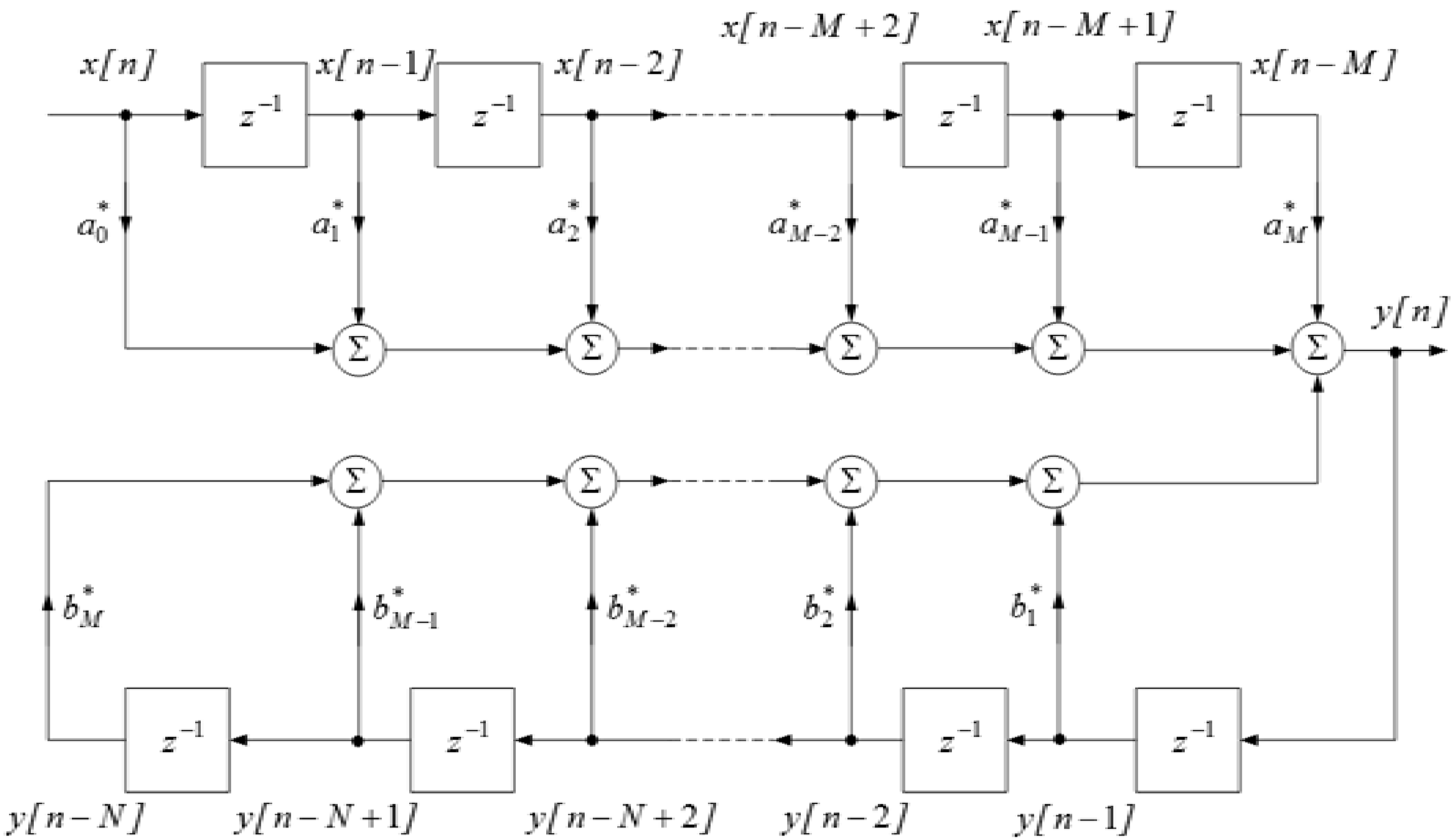
$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} a_k z^{(M-k)}}{\sum_{j=0}^{N} b_j z^{(N-j)}}$$

que também pode ser reescrito como uma função racional com potências negativas de *z*.

Filtros Digitais - *IIR*

No filtro *IIR* as características de entrada e saída são regidas por equações lineares de diferenças com coeficientes constantes de natureza recursiva, conforme pode se observar na figura a seguir.

Observa-se que no diagrama de blocos do filtro *IIR*, os termos a_k^* , $k=0,1,\ldots,M$, e os termos b_j^* , $j=1,\ldots, N$, são os termos da função de transferência $Y(z)/X(z)$, normalizados pelo termo b_0 .



x[n]
x[n-1]
x[n-2]
x[n-M+2]
x[n-M+1]
x[n-M]
z^-1
a*0
a*1
a*2
a*M-2
a*M-1
a*M
y[n]
Σ
b*M
b*M-1
b*M-2
b*2
b*1
y[n-N]
y[n-N+1]
y[n-N+2]
y[n-2]
y[n-1]

Projetos de Filtros *FIR*

Uma vez que os filtros *FIR* apresentam resposta em frequência com fase linear, o projeto deste filtros resume-se a aproximar a resposta em módulo desejada. Admitindo $h[n]$ como sendo a resposta ao impulso de um filtro *FIR*, sendo $H(e^{j\Omega})$ a transformada discreta de Fourier de $h[n]$. Uma vez definida a ordem do filtro, por exemplo M, deve-se então determinar os a_k , $k=0,1,\ldots,M$, coeficientes do filtro.

Projetos de Filtros *FIR*

O objetivo na determinação dos coeficientes é que $H(e^{j\Omega})$ forneça uma boa aproximação de $H_d(e^{j\Omega})$, que é a função resposta em frequência desejada ao longo do intervalo de frequências $-\pi < \Omega \leq \pi$. Uma forma de avaliar a qualidade desta aproximação é através do erro médio quadrático entre $h_d[n]$ e $h[n]$, ou seja:

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| h_d[n] - h[n] \right|^2$$

Projetos de Filtros *FIR*

Os únicos parâmetros ajustáveis na equação anterior são os coeficientes do filtro $H(e^{j\Omega})$, a_k , $k=0,1,\ldots,M$, sendo a medida do erro minimizada fazendo

$$h[n] = \begin{cases} h_d[n] \text{ , } 0 \leq n \leq M \\ 0 \text{ , } caso\ contrário \end{cases}$$

Projetos de Filtros *FIR*

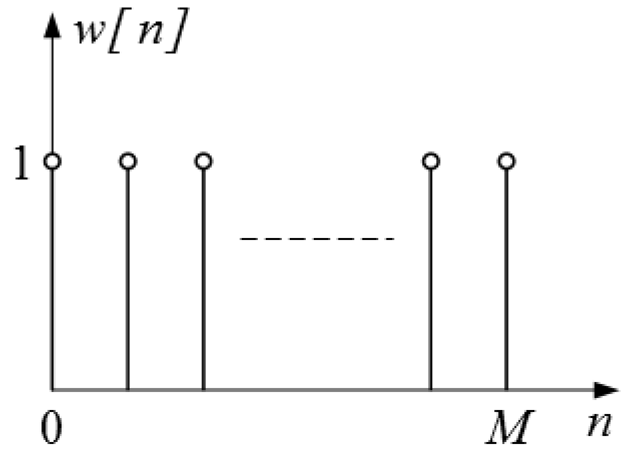
A relação apresentada anteriormente equivale ao uso de uma janela retangular definida por

$$w[n] = \begin{cases} 1\,,\; 0 \le n \le M \\ 0\,,\; caso\ contrário \end{cases}$$

portanto $$h[n] = w[n]h_d[n]$$

que conhecido como o método da janela.

Projetos de Filtros *FIR*



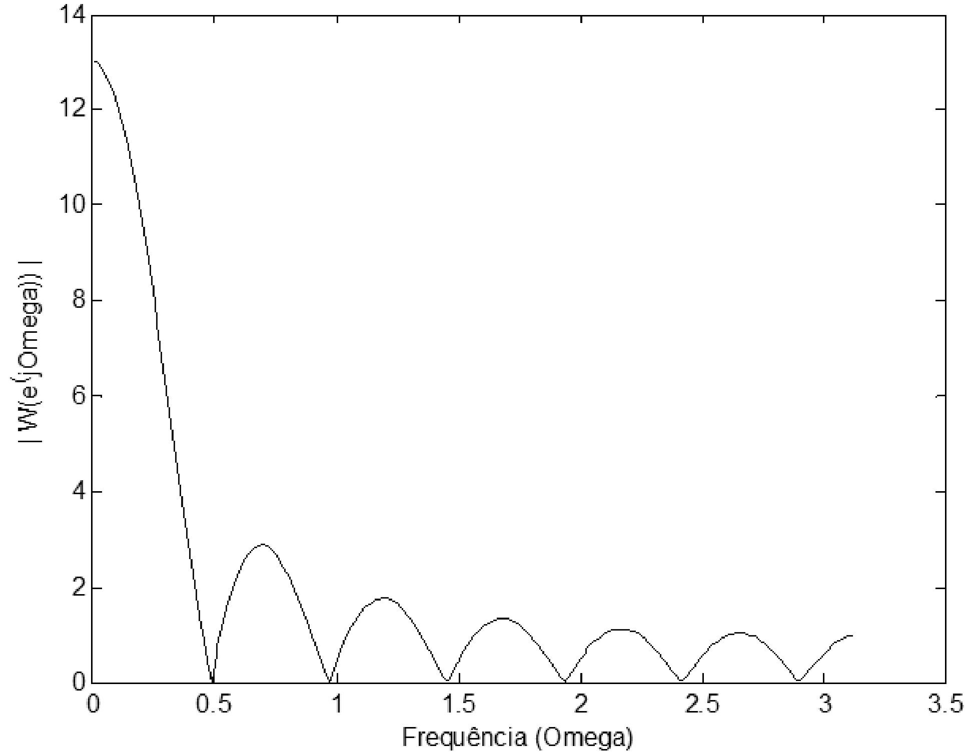
DTFT

$$W(e^{j\Omega}) = \frac{sen\left(\Omega\left(\frac{M+1}{2}\right)\right)}{sen\left(\frac{\Omega}{2}\right)} e^{-j(\Omega(M+1)/2)}, -\pi < \Omega \leq \pi$$

Projetos de Filtros *FIR*

A convolução de $W(e^{j\Omega})$ com $H_d(e^{j\Omega})$ resulta em uma aproximação oscilatória da função resposta em frequência desejada por $H(e^{j\Omega})$ do filtro *FIR*. Tais oscilações podem ser reduzidas modificando-se a janela a ser utilizada.

Resposta em frequência da janela retangular.

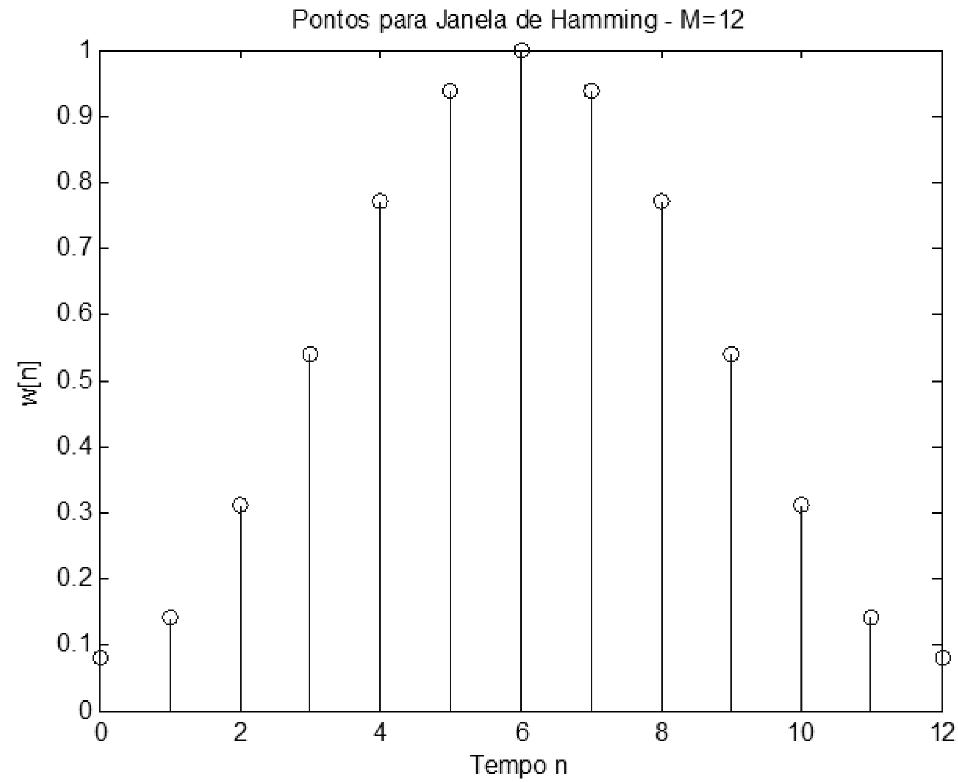


Projetos de Filtros *FIR*

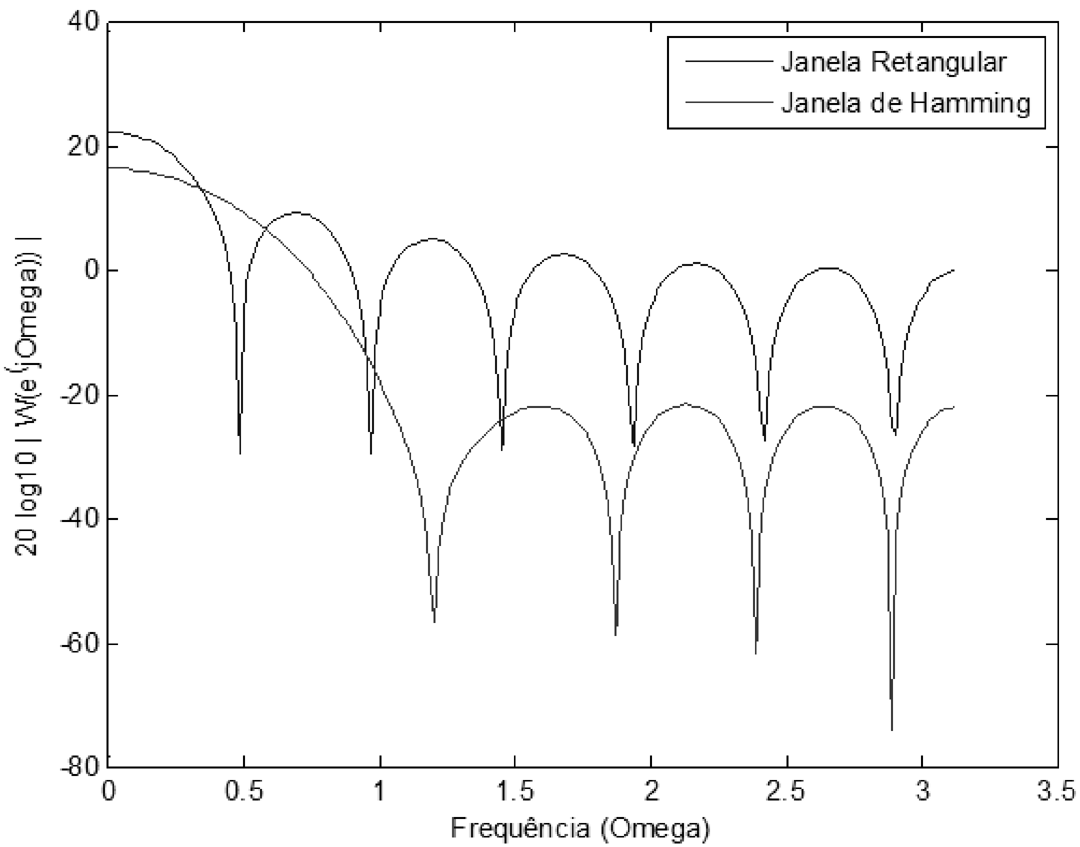
Uma janela comumente utilizada é a janela de Hamming, definida por

$$w[n] = \begin{cases} 0.54 - 0.46\, cos\left(\dfrac{2\pi n}{M}\right), \; 0 \le n \le M \\ 0 \;, \; caso\ contr\acute{a}rio \end{cases}$$

Característica da janela de Hamming



Resposta de frequência das duas janelas



Projetos de Filtros *FIR*

Pelo apresentado nas curvas de resposta em frequência das duas janelas conclui-se:

- ✓ o lóbulo principal da janela retangular tem aproximadamente a metade da largura do lóbulo principal da janela de Hamming;
- ✓ a magnitude dos lóbulos laterais da janela de Hamming são bem mais reduzidos se comparados com o da janela retangular.

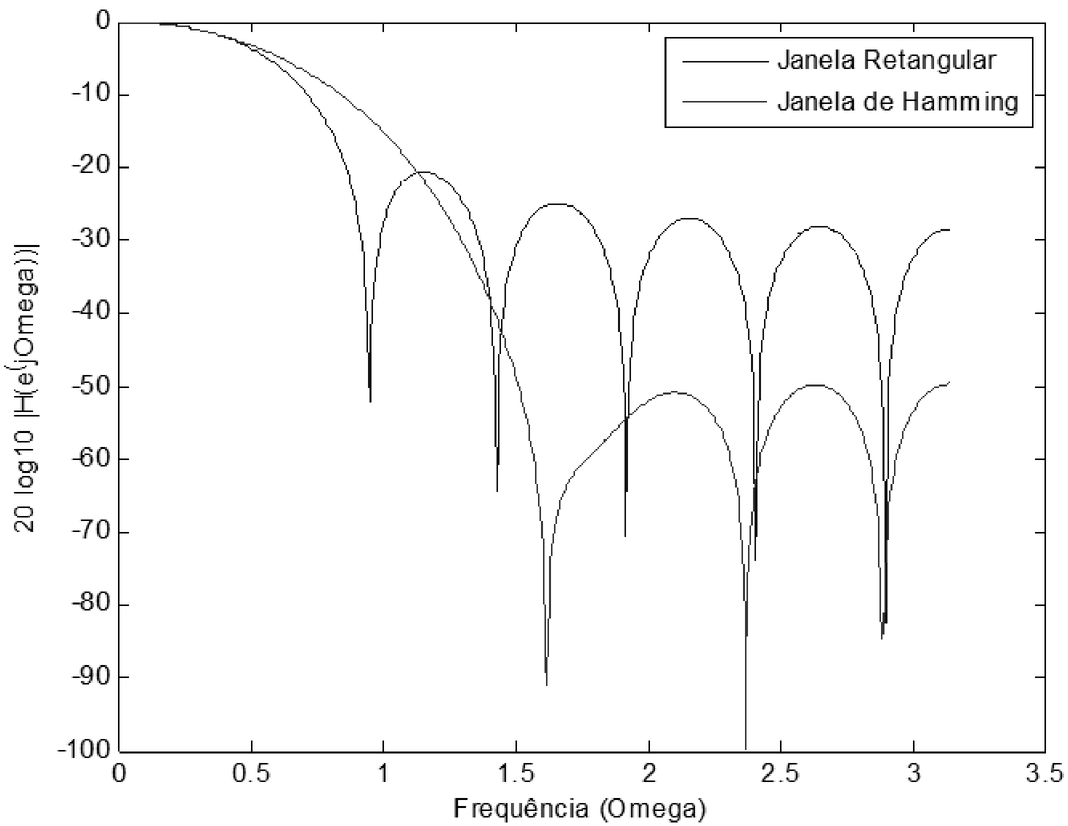
Exemplo 8.5:

Considere a resposta em frequência desejada

$$H_d(e^{j\Omega}) = \begin{cases} e^{-jM\Omega/2}, |\Omega| \leq \Omega_c \\ 0, \Omega_c < |\Omega| \leq \pi \end{cases}$$

que representa a função resposta em frequência de um filtro passa baixas ideal, com fase linear. Avaliar a resposta em frequência para $M=12$, $\Omega_c=0.2\pi$, sendo:
(a) janela retangular e (b) janela de Hamming.

Exemplo 8.15 - Resposta



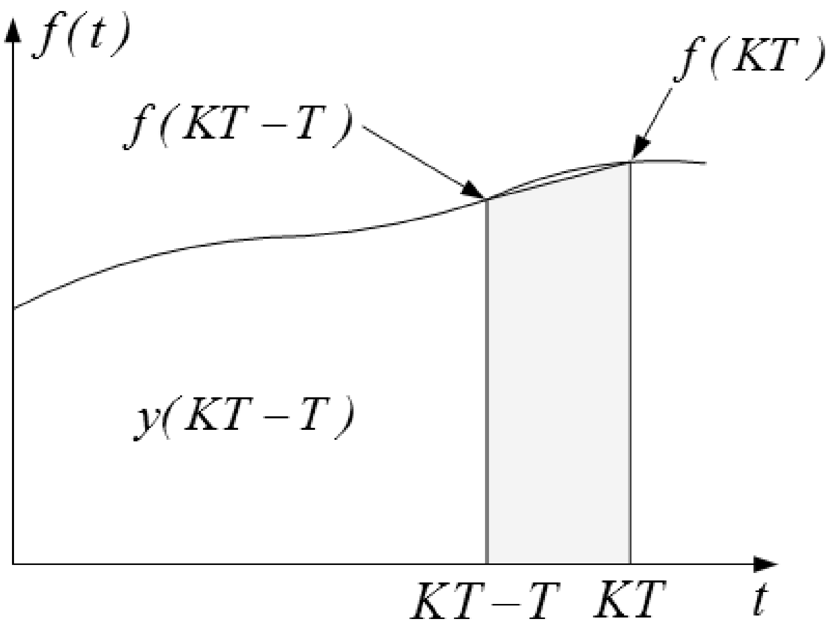
Coeficientes normalizados para $| H(z) |_{z=1} = 1$

n	$h[n]$ Janela Retangular	$h[n]$ Janela de Hamming
0	-0.0281	-0.0027
1	0.0000	0.0000
2	0.0421	0.0158
3	0.0909	0.0594
4	0.1364	0.1271
5	0.1686	0.1914
6	0.1802	0.2180
7	0.1686	0.1914
8	0.1364	0.1271
9	0.0909	0.0594
10	0.0421	0.0158
11	0.0000	0.0000
12	-0.0281	-0.0027

Projetos de Filtros *IIR*

Uma das formas de projetos de filtros digitais do tipo *IIR* é através da aproximação entre funções de transferências contínuas por funções de transferências discretas equivalentes. Desta forma, considera-se a seguinte aproximação em tempo discreto da função integração.

Projetos de Filtros *IIR*



$$y(KT) = y[KT - T] + \frac{T}{2}\left(f(KT) + f(KT - T)\right)$$

Projetos de Filtros *IIR*

Aplicando na equação anterior o operador *z*, obtém-se

$$Y(z)(z-1)=\frac{T}{2}(z+1)F(z)\Rightarrow\frac{Y(z)}{F(z)}=\frac{T}{2}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$$

implicando na seguinte aproximação

$$\frac{Y(z)}{F(z)}\cong\frac{1}{s}\Rightarrow s\cong\frac{2}{T}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)$$

Projetos de Filtros *IIR*

De forma semelhante pode-se representar *z* em função de *s*, ou seja

$$s = \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1} \Rightarrow z = \frac{2+sT}{2-sT}$$

Admitindo $s=\sigma+j\omega$ pode-se definir regiões do Plano *s* e suas regiões equivalentes no Plano *z*.

Projetos de Filtros *IIR*

Ou seja:

$$z = \frac{2+\sigma T + j\omega T}{2-\sigma T - j\omega T} \Leftrightarrow re^{j\Omega}$$

$$r = |\, z \,| = \left(\frac{(2+\sigma T)^2 + (\omega T)^2}{(2-\sigma T)^2 + (\omega T)^2} \right)^{1/2}$$

$$\Omega = arg\{ z \} = atan\left(\frac{\omega T}{2+\sigma T} \right) + atan\left(\frac{\omega T}{2-\sigma T} \right)$$

Projetos de Filtros *IIR*

Portanto, tem-se:

$$T > 0, \sigma < 0 \;\Rightarrow r < 1$$

$$T > 0, \sigma = 0 \;\Rightarrow r = 1$$

$$T > 0, \sigma > 0 \;\Rightarrow r > 1$$

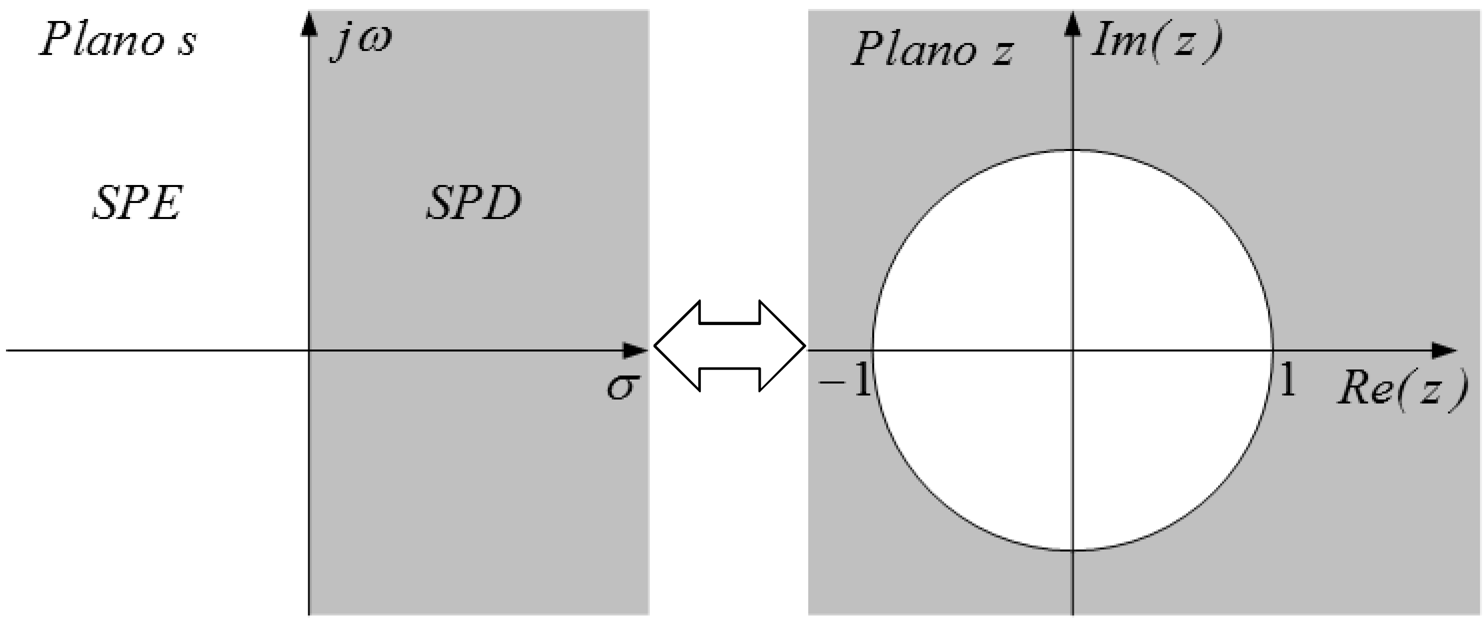
$$\Omega = 2\, tg^{-1}\left(\frac{\omega T}{2}\right) \;\; se \;\; \sigma = 0$$

Projetos de Filtros *IIR*

Resultando nas seguintes propriedades para este tipo de aproximação:

1. O semiplano esquerdo do Plano s é mapeado no interior do círculo de raio unitário no Plano z;
2. O eixo $j\omega$ é inteiramente mapeado sobre o circulo de raio unitário do Plano z;
3. O semiplano direito do Plano s é mapeado no exterior do círculo de raio unitário no Plano z.

Projetos de Filtros *IIR*



Projetos de Filtros *IIR*

Uma implicação imediata da propriedade 1 é que se o filtro analógico representado pela função de transferência $H_a(s)$ for estável e causal, o filtro digital dele derivado através da transformação bilinear será garantidamente estável e causal.

Projetos de Filtros *IIR*

Para $\sigma = 0$, tem-se $\Omega = 2\, tg^{-1}(\omega T/2)$, concluindo-se que a faixa de frequência $-\infty < \omega < \infty$, é comprimida em uma faixa finita de frequências contida no intervalo $-\pi < \Omega < \pi$ de um filtro digital. Esta forma de distorção não linear é conhecida como *warping*.

Projetos de Filtros *IIR*

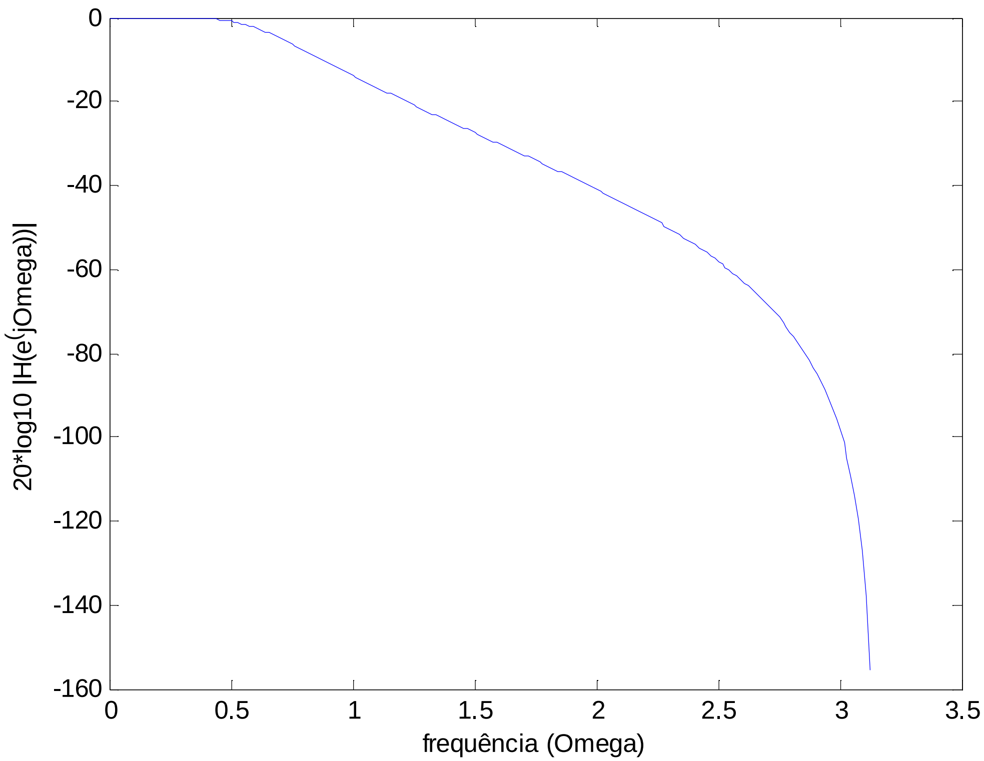
Tal distorção de fase pode ser compensada no projeto do filtro analógico através de um procedimento denominado *pré-warping*. Especificamente, para as frequências críticas (frequências de corte para a faixa de passagem e de rejeição), o procedimento de *pré-warping* é realizado de acordo com a relação

$$\omega = \frac{2}{T} tg\left(\frac{\Omega}{2}\right)$$

Projetos de Filtros *IIR*

Exemplo 8.7: Usando um filtro analógico com uma função de transferência de Butterworth de ordem 3, projetar um filtro *IIR* passa baixas com frequência de corte $\Omega_c = 0.2\pi$.

Projetos de Filtros *IIR* – Curva de Magnitude



Projetos de Filtros *IIR – Resposta ao Impulso*