

Sistemas e Sinais

Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Departamento de Engenharia Elétrica



# **Critério de Estabilidade de Nyquist**

- **Introdução**
- **Princípio do Argumento**
- **Contorno de Nyquist**
- **Exemplos**
- **Problemas Propostos**



## Critério de Estabilidade de Nyquist

**Estudo de Estabilidade** { Estabilidade absoluta  
Estabilidade relativa

- ◆ Critério de Routh-Hurwitz
- ◆ Lugar Geométrico das Raízes – LGR
- ◆ Critério de Nyquist



## Critério de Estabilidade de Nyquist

- ◆ Desenvolvido por Harry Nyquist (1932) nos laboratórios Bell.
- ◆ Estudos de instabilidade de amplificadores realimentados.
- ◆ Teoria de variáveis complexas.
- ◆ **Princípio do argumento**



## Critério de Estabilidade de Nyquist

Utilizado para estabelecer relações fundamentais entre a resposta em frequência do sistema em malha aberta com a estabilidade do sistema em malha fechada.



## Critério de Estabilidade de Nyquist

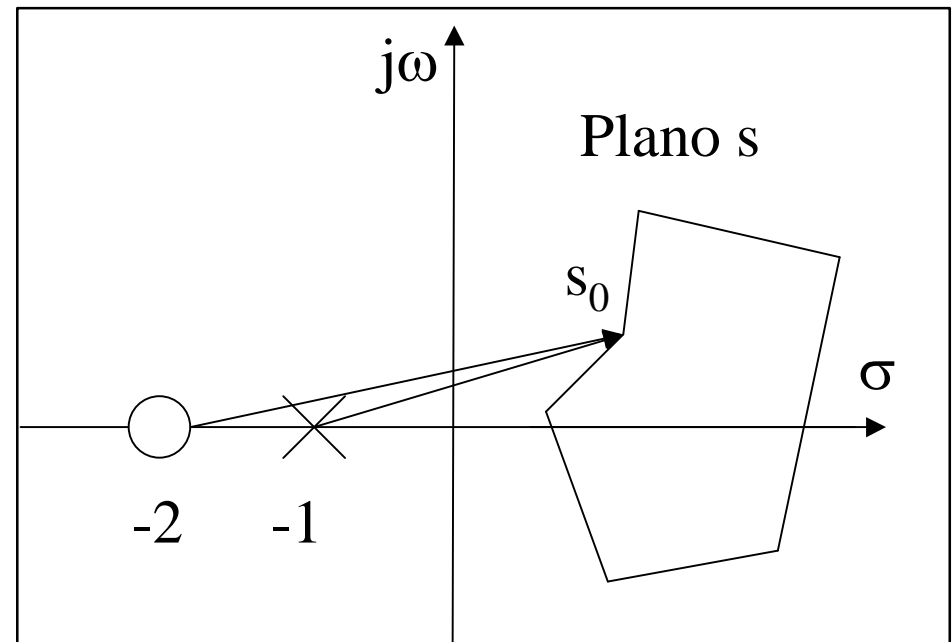
- ◆ Não necessita do conhecimento explícito da função de transferência do sistema em malha aberta.
- ◆ Estabilidade absoluta e relativa do sistema operando em malha fechada.



# Cr terio de Estabilidade de Nyquist

Princ pio do Argumento - Exemplo:

$$G(s) = \frac{(s + 2)}{(s + 1)}$$





## Critério de Estabilidade de Nyquist

$$|G(s_o)| = \frac{\sqrt{(2 + \text{Re}(s_o))^2 + (\text{Im}(s_o))^2}}{\sqrt{(1 + \text{Re}(s_o))^2 + (\text{Im}(s_o))^2}}$$

$$\theta_{s_o} = \theta_z - \theta_p$$

$$\theta_{s_o} = \text{arc tan} \left( \frac{\text{Im}(s_o)}{(2 + \text{Re}(s_o))} \right) - \text{arc tan} \left( \frac{\text{Im}(s_o)}{(1 + \text{Re}(s_o))} \right)$$

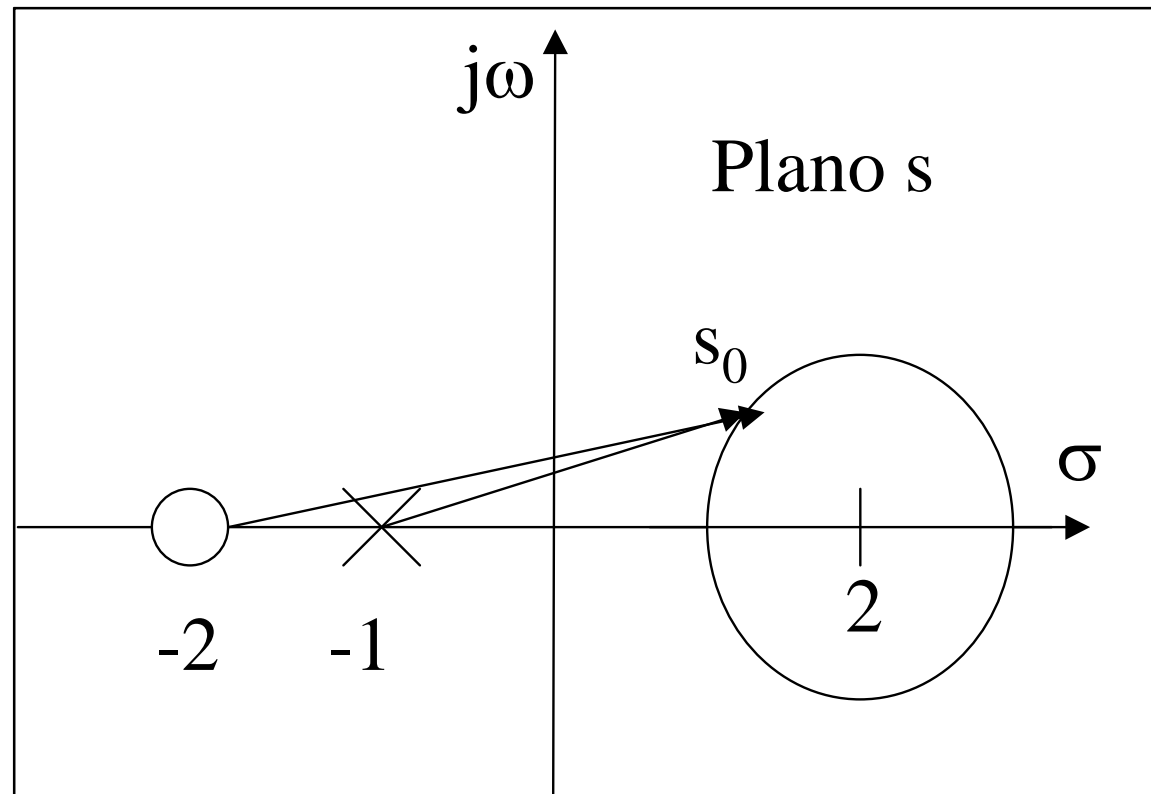


## Critério de Estabilidade de Nyquist

- Caso 1: O caminho fechado não envolve nenhum dos pólos ou zeros da função de transferência.
- Para uma volta completa partindo do ponto  $s_o$ , a contribuição angular total é nula.



# Cr terio de Estabilidade de Nyquist



## Sistemas e Sinais

Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Departamento de Engenharia Elétrica



| Valores de $s$ | Valores de $G(s)$ |
|----------------|-------------------|
| $1.0+j0.0$     | $1.5+j0.0$        |
| $1.2+j0.6$     | $1.423-j0.115$    |
| $1.4+j0.8$     | $1.375-j0.125$    |
| $1.6+j0.916$   | $1.342-j0.120$    |
| $1.8+j0.979$   | $1.318-j0.111$    |
| $2.0+j1.0$     | $1.3-j0.1$        |
| $2.2+j0.979$   | $1.285-j0.087$    |
| $2.4+j0.916$   | $1.274-j0.074$    |
| $2.6+j0.8$     | $1.264-j0.058$    |
| $2.8+j0.6$     | $1.256-j0.040$    |
| $3.0+j0.0$     | $1.25+j0.0$       |

Valores do caminho a ser percorrido no Plano  $s$   
e do mapeamento no plano  $G(s)$ .

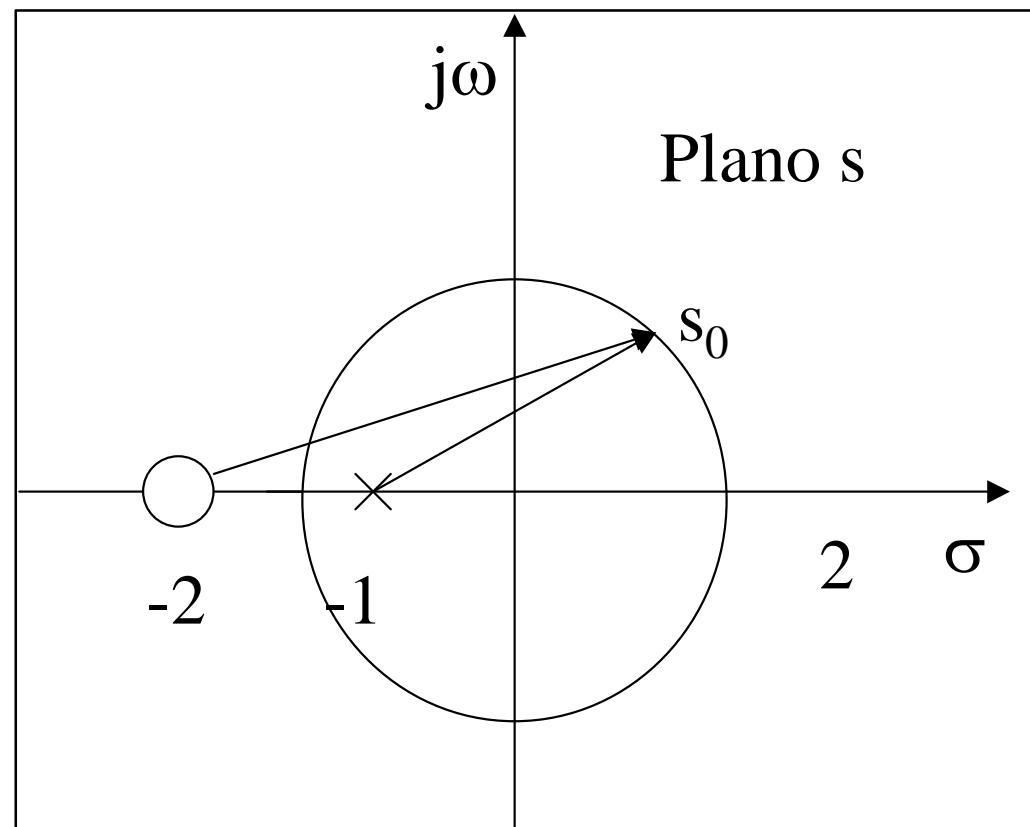


## Critério de Estabilidade de Nyquist

- Caso 2: O caminho fechado envolve um pólo da função de transferência.
- Para uma volta completa partindo do ponto  $s_o$ , a origem do Plano  $G(s)$  é envolvida uma vez no sentido oposto contrário ao sentido percorrido no Plano  $s$ .



# Cr terio de Estabilidade de Nyquist



# Sistemas e Sinais

Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Departamento de Engenharia Elétrica



| Valores de $s$ | Valores de $G(s)$ |
|----------------|-------------------|
| $-1.5+j0.0$    | $-1.0+j0.0$       |
| $-1.2+j0.9$    | $0.77-j1.06$      |
| $-0.9+j1.2$    | $1.07-j0.83$      |
| $-0.6+j1.37$   | $1.19-j0.67$      |
| $-0.3+j1.47$   | $1.26-j0.55$      |
| $0.0+j1.5$     | $1.30-j0.46$      |
| $0.3+j1.47$    | $1.33-j0.38$      |
| $0.6+j1.37$    | $1.36-j0.31$      |
| $0.9+j1.2$     | $1.38-j0.24$      |
| $1.2+j0.9$     | $1.39-j0.16$      |
| $1.5+j0.0$     | $1.4+j0.0$        |

Valores do caminho a ser percorrido no Plano  $s$   
e do mapeamento no plano  $G(s)$ .

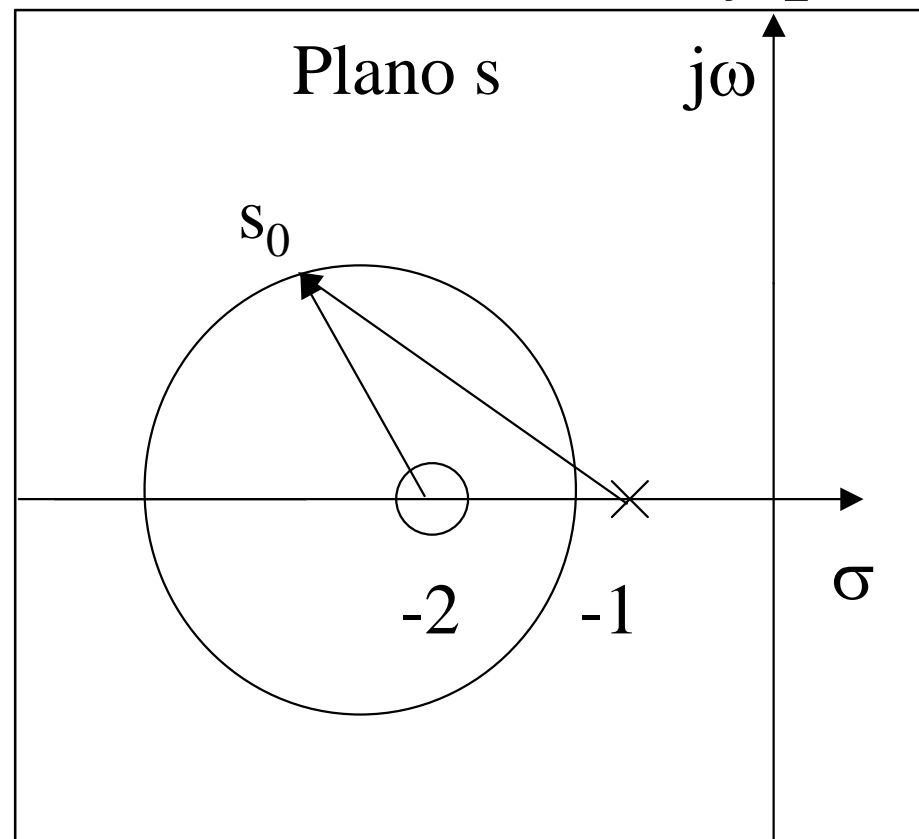


## Critério de Estabilidade de Nyquist

- Caso 3: O caminho fechado envolve um zero da função de transferência.
- Para uma volta completa partindo do ponto  $s_o$ , a origem do Plano  $G(s)$  é envolvida uma vez mantendo o sentido percorrido no Plano  $s$ .



# Critério de Estabilidade de Nyquist



## Sistemas e Sinais

Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Departamento de Engenharia Elétrica



| Valores de $s$ | Valores de $G(s)$ |
|----------------|-------------------|
| -4.5+j0.0      | 0.714+j0.0        |
| -4.2+j0.9      | 0.710-j0.081      |
| -3.9+j1.2      | 0.705-j0.122      |
| -3.6+j1.37     | 0.699-j0.156      |
| -3.3+j1.47     | 0.691-j0.197      |
| -3.0+j1.5      | 0.680-j0.240      |
| -2.7+j1.47     | 0.663-j0.291      |
| -2.4+j1.37     | 0.636-j0.357      |
| -2.1+j1.2      | 0.584-j0.453      |
| -1.8+j0.9      | 0.448-j0.620      |
| -1.5+j0.0      | -1.0+j0.0         |

Valores do caminho a ser percorrido no Plano  $s$   
e do mapeamento no plano  $G(s)$ .



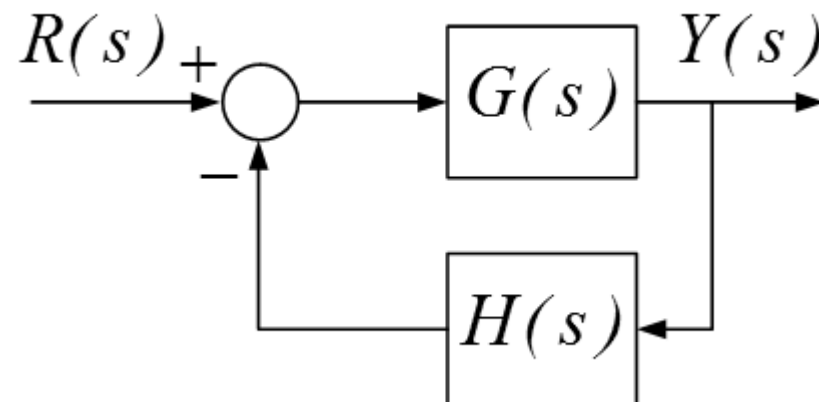
## ■ Princípio do argumento

- ◆ Se  $P$  representa o número de pólos e  $Z$  o número de zeros de uma função  $G(s)$  envolvidos por um caminho fechado, percorrido a partir de **um ponto arbitrário  $s_0$ , localizado sobre o caminho fechado do Plano  $s$** , no sentido horário, então o número líquido de vezes que o caminho fechado mapeado no plano  $G(s)$  envolverá a origem do plano  $G(s)$  será  $N = Z - P$ .



# Critério de Estabilidade de Nyquist

Sistemas de controle de malha fechada.





## Critério de Estabilidade de Nyquist

Malha aberta:

$$G(s)H(s)$$

Malha fechada:

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

Equação característica:  $Q(s) = 1 + G(s)H(s)$



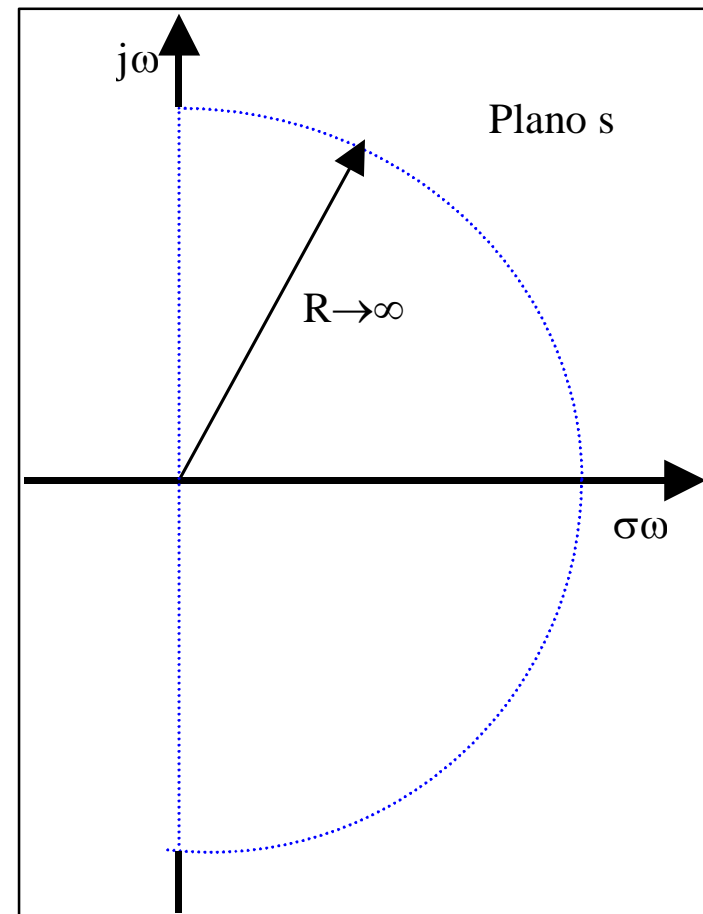
## Critério de Estabilidade de Nyquist

A estabilidade do sistema de controle dependerá da localização das raízes da equação característica no Plano  $s$ , ou seja da localização dos pólos de malha fechada.



## Cr terio de Estabilidade de Nyquist

O crit rio de estabilidade originalmente proposto por Nyquist utiliza o princ pio do argumento considerando como caminho fechado a ser percorrido, conforme a Figura ao lado, todo o semiplano direito do Plano  $s$ .





## Critério de Estabilidade de Nyquist

Plano  $s$   $\Leftrightarrow$  Plano  $1+G(s)H(s)$

O princípio do argumento  
pode ser empregado para determinar  
a diferença líquida entre  
o número de zeros e pólos de  $1+G(s)H(s)$   
localizados no  
semiplano direito do Plano  $s$



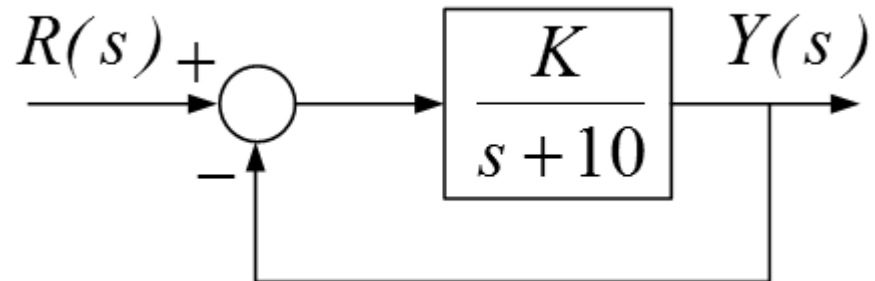
## Critério de Estabilidade de Nyquist

Plano  $1+G(s)H(s)$   $\Leftrightarrow$  Plano  $G(s)H(s)$

A origem  $(0,0)$  do Plano  $1+G(s)H(s)$  coincide com o ponto  $-1.0$  no eixo real do Plano  $G(s)H(s)$ , podendo-se realizar a análise de estabilidade empregando o princípio do argumento, avaliando-se o número líquido e o sentido dos envoltimentos do ponto  $-1.0+j0.0$  no plano  $G(s)H(s)$ .



## Critério de Estabilidade de Nyquist

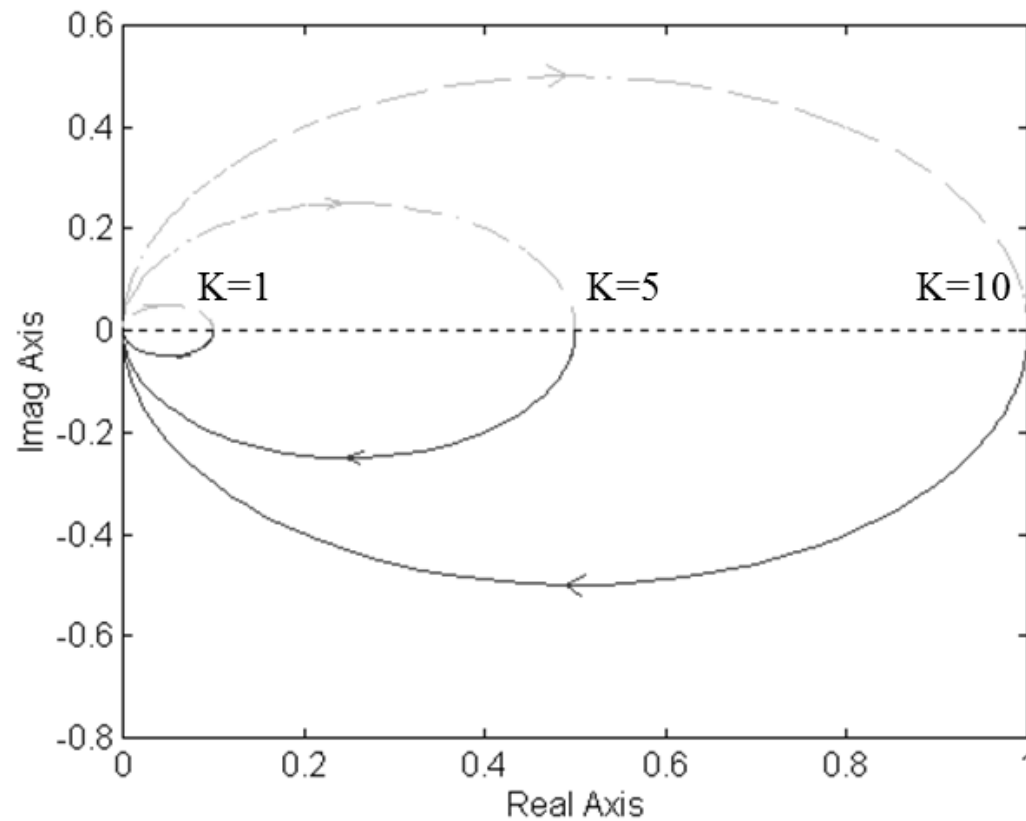


$$T(s) = \frac{K}{s + 10 + K}$$

$\Rightarrow$  logo para  $K > 0$  o sistema é estável.



# Cr terio de Estabilidade de Nyquist





## Critério de Estabilidade de Nyquist

- Independente do valor de  $K > 0$  não há nenhum envolvimento do ponto  $-1.0 + j0.0$  do plano  $G(s)H(s)$ , resultado em  $N = 0$ .
- Uma vez que não existem pólos de  $G(s)H(s)$  localizados no semiplano direito do Plano  $s$ , implica em  $P = 0$ .
- $Z = N + P = 0$ .

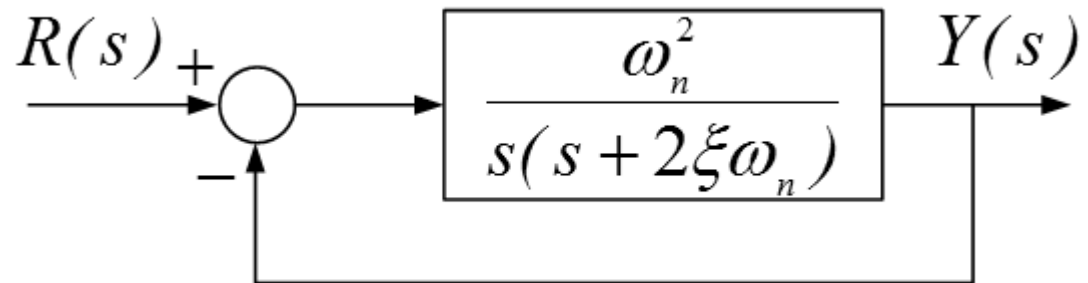


## Critério de Estabilidade de Nyquist

- Neste caso não existem zeros da função  $1+G(s)H(s)$ , que coincidam com os pólos de malha fechada localizados no semiplano direito do Plano  $s$  e o sistema permanecerá estável para qualquer  $K>0$ .



# Critério de Estabilidade de Nyquist



$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$



## Exemplo 2: Sistema de Segunda Ordem

$$p_1 = -\xi\omega_n + \sqrt{4\xi^2\omega_n^2 - 4\omega_n^2}$$

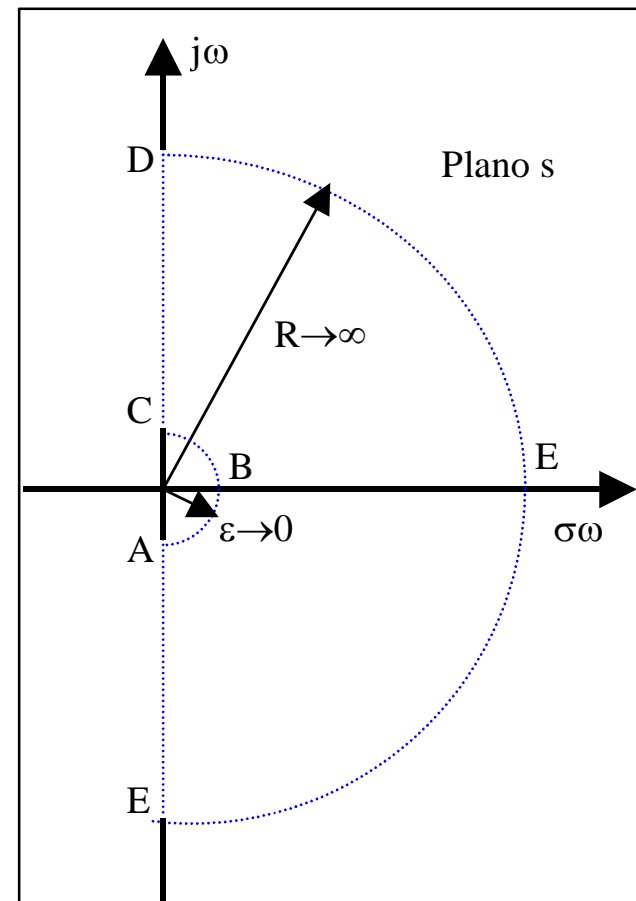
$$p_2 = -\xi\omega_n - \sqrt{4\xi^2\omega_n^2 - 4\omega_n^2}$$

- $\xi > 0$  e  $\omega_n > 0$
- Pólos do sistema em malha fechada localizados no semiplano esquerdo.
- Sistema estável em malha fechada.



## Exemplo 2: Sistema de Segunda Ordem

Modificação do caminho fechado para não incluir o pólo de malha aberta localizado na origem do Plano  $s$ .





## Exemplo 2: Sistema de Segunda Ordem

Valores e pontos do Plano  $s$  com seus respectivos pontos mapeados no plano  $G(s)H(s)$ .

| Ponto no Plano $s$ | Valor de $s$    | Ponto no Plano $G(s)H(s)$ | Valor de $G(s)H(s)$  |
|--------------------|-----------------|---------------------------|----------------------|
| A                  | $-j\varepsilon$ | $A^*$                     | $1/4\xi^2 + j\infty$ |
| B                  | $\varepsilon$   | $B^*$                     | $+\infty$            |
| C                  | $j\varepsilon$  | $C^*$                     | $1/4\xi^2 - j\infty$ |
| D                  | $j\infty$       | $D^*$                     | 0                    |
| E                  | $\infty$        | $E^*$                     | 0                    |
| F                  | $-j\infty$      | $F^*$                     | 0                    |



Exemplo: Ponto A no Plano  $s \Rightarrow$  Plano  $G(s)H(s)$

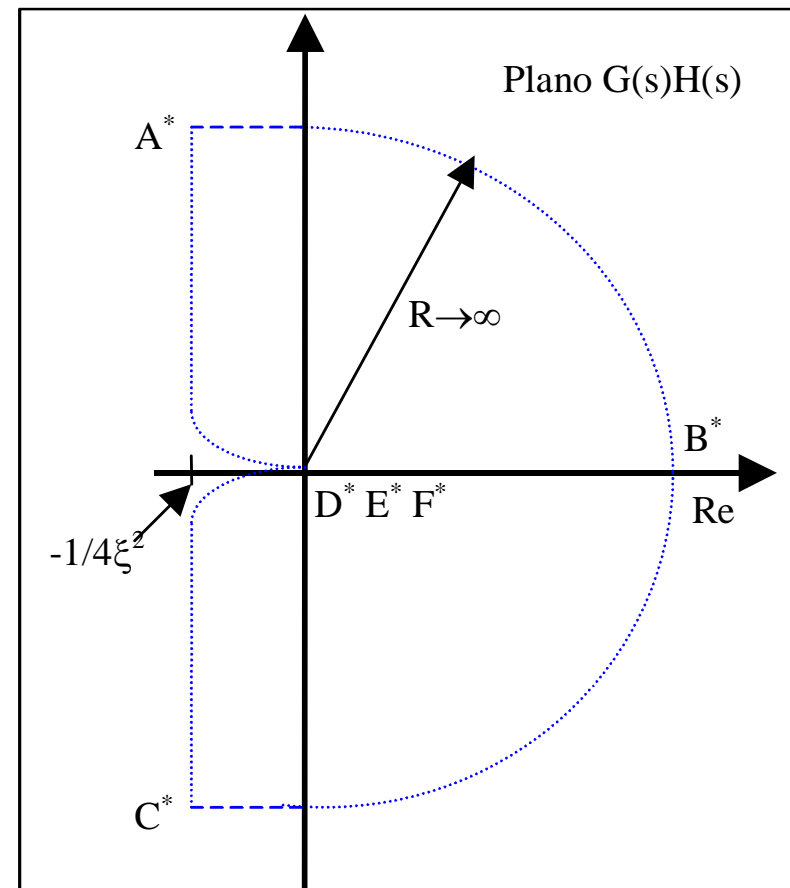
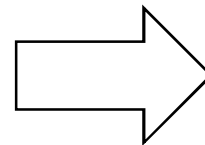
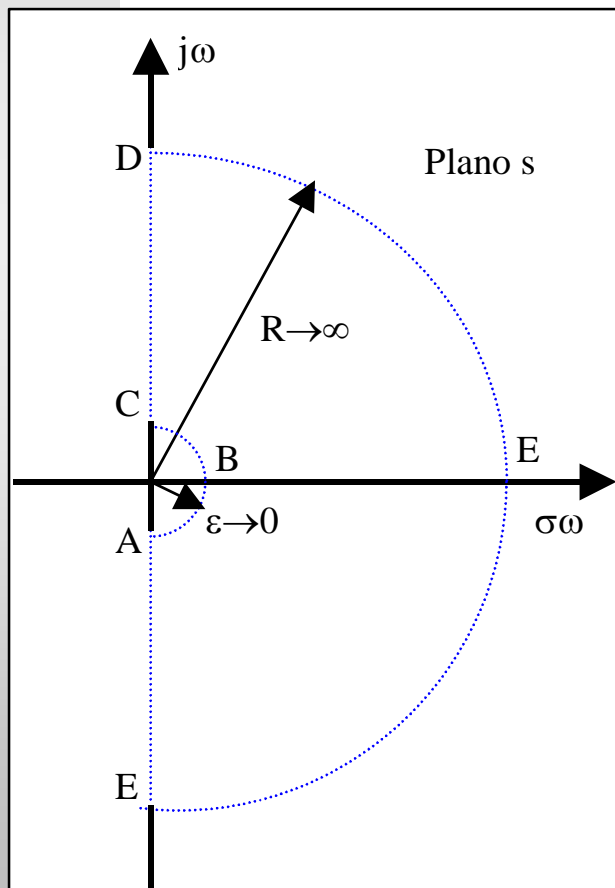
$$G(-j\varepsilon)H(-j\varepsilon) = \frac{\omega_n^2}{-j\varepsilon(-j\varepsilon + 2\xi\omega_n)} = \omega_n^2 \frac{(-\varepsilon^2 + j2\xi\omega_n\varepsilon)}{(\varepsilon^4 + 4\xi^2\omega_n^2\varepsilon^2)}$$

$$\text{Re}[G(s)H(s)]_{s=-j\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( -\frac{\omega_n^2\varepsilon^2}{\varepsilon^4 + 4\xi^2\omega_n^2\varepsilon^2} \right) = -\frac{1}{4\xi^2}$$

$$\text{Im}[G(s)H(s)]_{s=-j\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( j \frac{2\xi\omega_n^3\varepsilon}{\varepsilon^4 + 4\xi^2\omega_n^2\varepsilon^2} \right) = j\infty$$

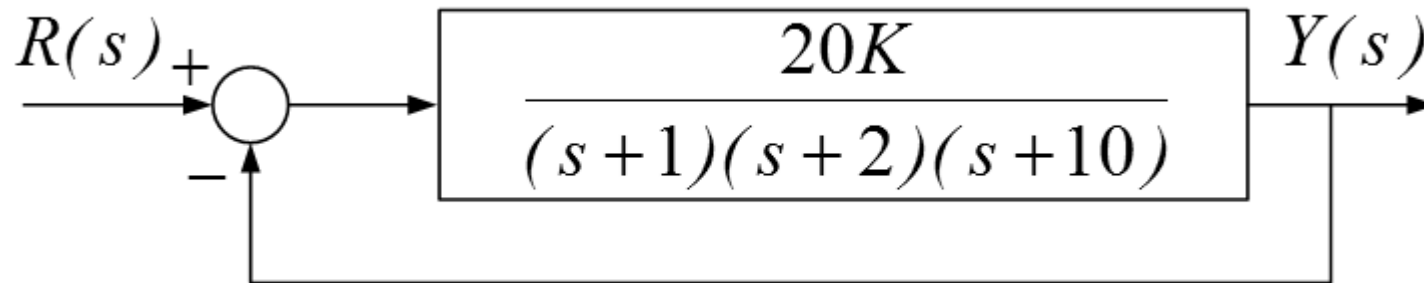


# Cr terio de Estabilidade de Nyquist





## Exemplo 3: Sistema de Terceira Ordem



$$G(s)H(s) = \frac{20K}{s^3 + 13s^2 + 32s + 20} = \frac{20K}{(s+1)(s+2)(s+10)}$$



## Exemplo 3: Sistema de Terceira Ordem

Todos os pólos de malha aberta tem parte real negativa

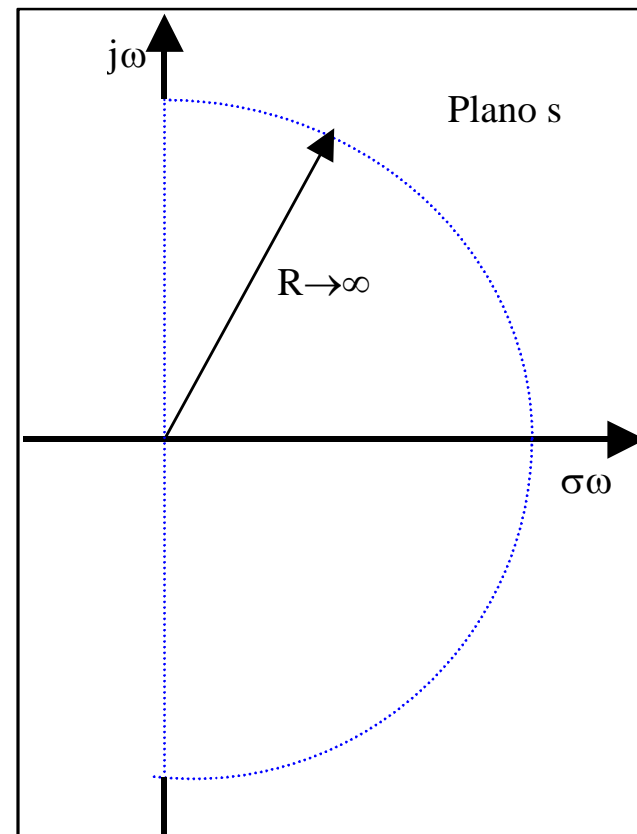
logo

$$P = 0$$



## Exemplo 3: Sistema de Terceira Ordem

Análise de estabilidade  
⇒ utilizando o contorno  
do caminho fechado do  
Plano  $s$





## Exemplo 3: Sistema de Terceira Ordem

Análise de estabilidade  
⇒ utilizando o diagrama de Bode para auxiliar o traçado do mapeamento do caminho fechado no Plano  $G(s)H(s)$ .

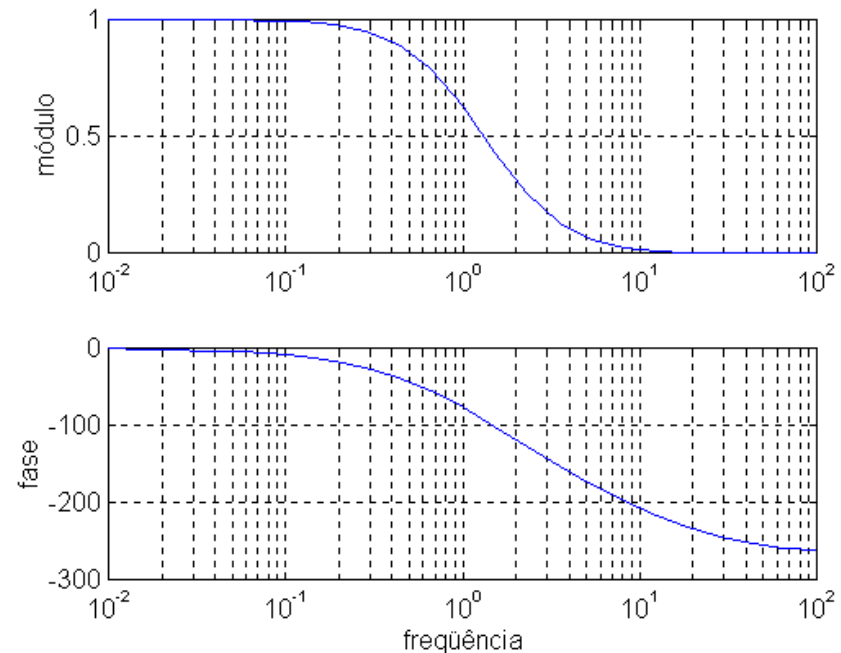


Diagrama de Bode da  $G(s)H(s)$   
considerando  $K = 1$ .



## Exemplo 3: Sistema de Terceira Ordem

Identificação de alguns pontos do Plano  $G(s)H(s)$  utilizando o diagrama de Bode.

$$\omega = 0 \text{ rad/s} \quad \Rightarrow \quad |G(s)H(s)| = K \text{ e fase} = 0^\circ$$

$$\omega = \infty \text{ rad/s} \quad \Rightarrow \quad |G(s)H(s)| = 0 \text{ e fase} = -270^\circ$$



## Exemplo 3: Sistema de Terceira Ordem

Identificação de alguns pontos do Plano  $G(s)H(s)$  utilizando o diagrama de Bode.

$$| G(s)H(s) | \text{ quando a fase} = -90^\circ$$



## Exemplo 3: Sistema de Terceira Ordem

$|G(s)H(s)|$  quando a fase =  $-90^\circ$

$$\operatorname{Re}(G(j\omega)H(j\omega)) = 0$$

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{20K}{(j\omega)^3 + 13(j\omega)^2 + 32j\omega + 20}\right\} = 0$$

$$-13\omega^2 + 20 = 0 \Rightarrow \omega = 1.24 \text{ rad/s}$$



## Exemplo 3: Sistema de Terceira Ordem

$|G(s)H(s)|$  quando a fase =  $-180^\circ$

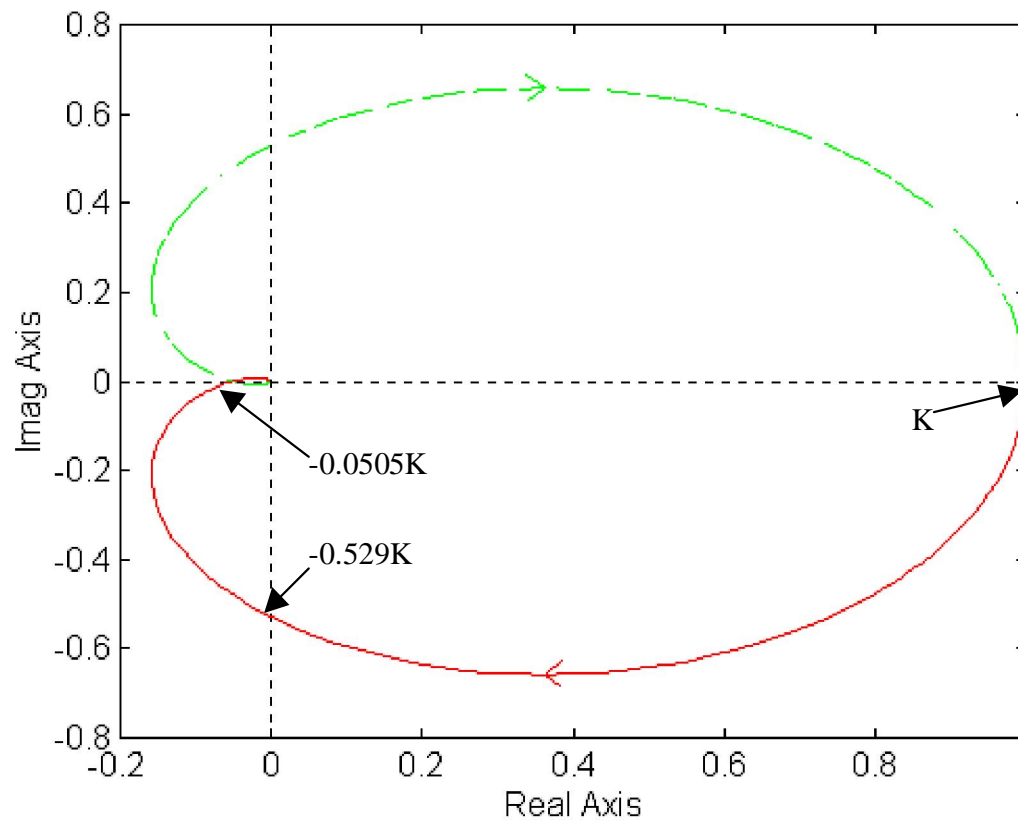
$$\text{Im}(G(j\omega)H(j\omega)) = 0$$

$$\text{Im}\left\{\frac{20K}{(j\omega)^3 + 13(j\omega)^2 + 32j\omega + 20}\right\} = 0$$

$$(j\omega)^3 + 32j\omega = 0 \Rightarrow \omega = 5.66 \text{ rad} / s$$



## Exemplo 3: Sistema de Terceira Ordem





## Exemplo 3: Sistema de Terceira Ordem

- Para  $1.0/0.0505 > K > 0$  a curva resultante do mapeamento do contorno de Nyquist no Plano  $s$  no Plano  $G(s)H(s)$ , não apresentará nenhum envolvimento do ponto  $-1.0+j0.0$ , ou seja  $N=0$ .
- $P=0$  e  $N=0$  implica em  $Z=0$ .



## Exemplo 3: Sistema de Terceira Ordem

- Conclui-se que para  $19.8 > K > 0.0$  o sistema em malha-fechada não apresentará pólos no semiplano direito do Plano  $s$ , caracterizando-o como um sistema estável em malha fechada.



## Exemplo 3: Sistema de Terceira Ordem

Conclui-se que para  $K = 19.8$   
o sistema em malha-fechada  
apresentará dois pólos no eixo imaginário.



## Exemplo 3: Sistema de Terceira Ordem

- Conclui-se que para  $K > 19.8$  o sistema em malha-fechada apresentará dois pólos no semiplano direito caracterizando-o como um sistema instável em malha fechada.



## Exemplo 3: Sistema de Terceira Ordem

- Para  $K > 19.8$   
o mapeamento do contorno de Nyquist no Plano  $s$  no Plano  $G(s)H(s)$  envolverá duas vezes o ponto  $-1.0 + j0.0$  no sentido horário, implicando  $N=2$  e, portanto,  $Z=2$ .



## Exemplo 3: Sistema de Terceira Ordem

- Verifica-se que as características de estabilidade deste sistema em malha fechada dependem dos valores de  $K$ , caracterizando-o como **condicionalmente estável**.