Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Departamento de Engenharia Elétrica

Operações Básicas em Sinais

- **Operações realizadas em variáveis dependentes**
  - **Mudança de escala de amplitude**
  - **Adição**
  - **Multiplicação**
  - **Diferenciação**
  - **Integração**

Operações Realizadas em Variáveis Dependentes

1. Mudança de escala de amplitude:

$$y(t) = cx(t)$$

$$y[n] = cx[n]$$

Operações Realizadas em Variáveis Dependentes

1. Adição:

$$y(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

$$y[n] = x_1[n] + x_2[n]$$

Operações Realizadas em Variáveis Dependentes

1. Multiplicação:

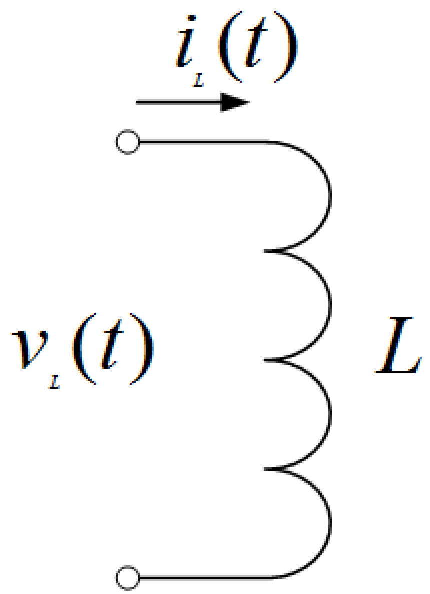
$$y(t) = x_1(t)x_2(t)$$

$$y[n] = x_1[n]x_2[n]$$

Operações Realizadas em Variáveis Dependentes

1. Diferenciação:

$$\lambda_L(t) = L i_L(t)$$



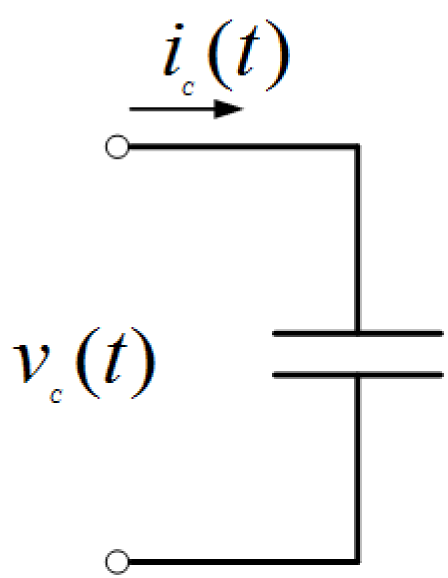
$$\frac{d\lambda_L(t)}{dt} = L\frac{di_L(t)}{dt}$$

$$v(t)_L = L\frac{di_L(t)}{dt}$$

Operações Realizadas em Variáveis Dependentes

1. Integração:

$$q_c(t) = C v_c(t)$$



$$\frac{dq_c(t)}{dt} = C\frac{dv_c(t)}{dt}$$

$$v_C(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_C(\tau)\,d\tau$$

Operações Básicas em Sinais

- **Operações realizadas em variáveis independentes**
  - **Mudança de escala de tempo**
  - **Reflexão**
  - **Deslocamento no tempo**
  - **Deslocamento no tempo e mudança de escala de tempo**

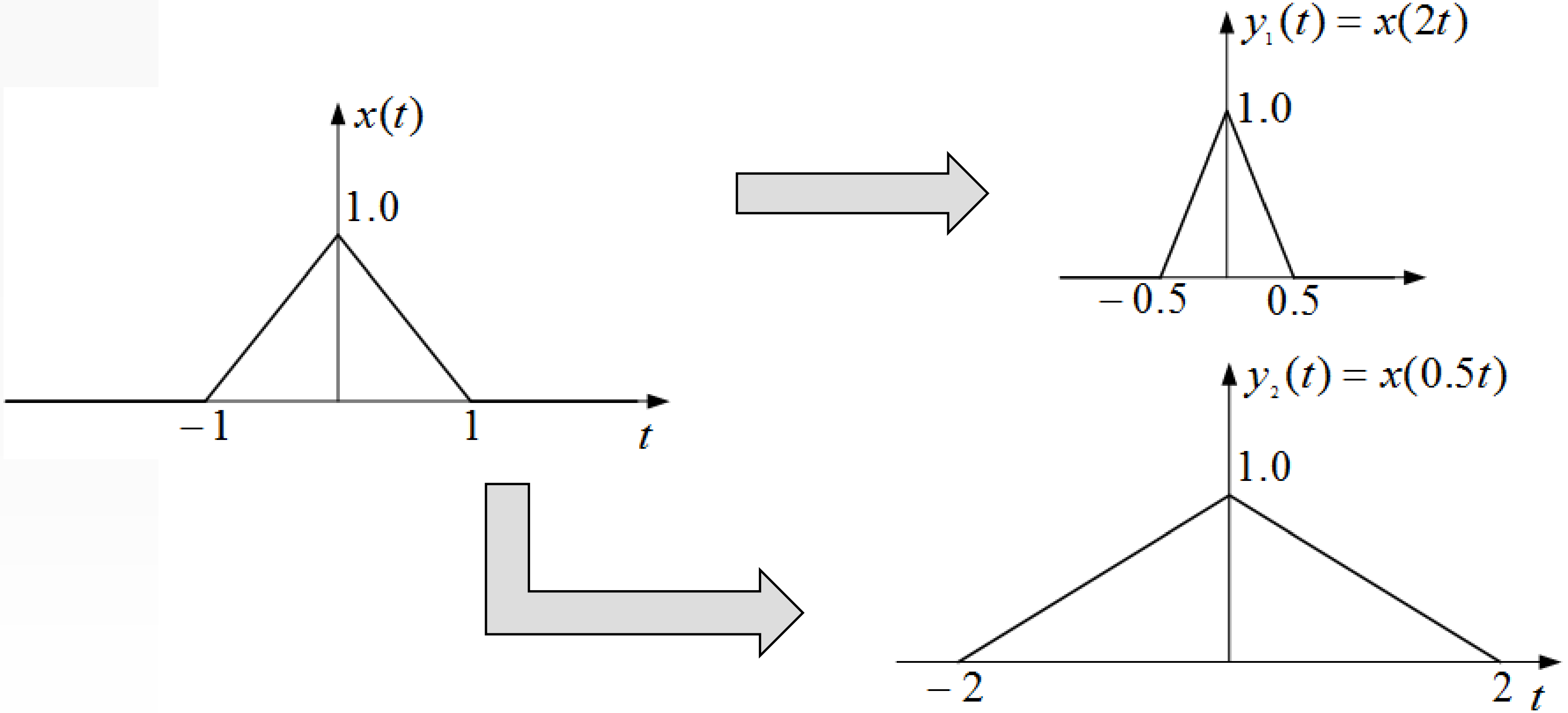
Operações Realizadas em Variáveis Independentes

Mudança de escala de tempo:

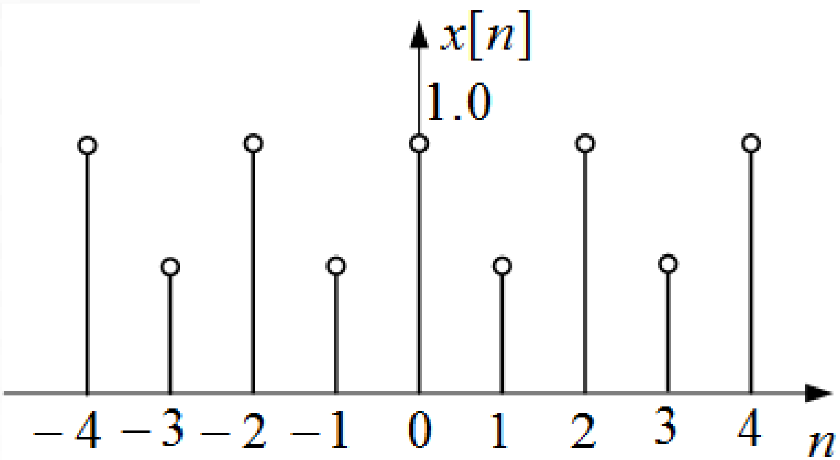
$$y(t) = x(at) \quad \begin{cases} \textit{Se } a > 1 \; y(t) \textit{ será a versão comprimida de } x(t); \\ \textit{Se } 0 < a < 1 \; y(t) \textit{ será a versão expandida de } x(t); \end{cases}$$

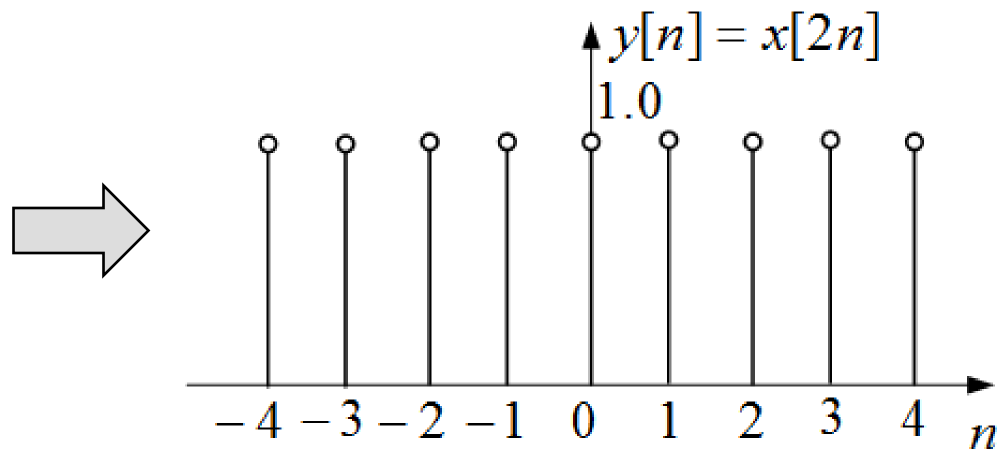
No caso discreto: $y[n] = x[kn]\,,\, k \in Z^{+}$

Operações Realizadas em Variáveis Independentes



Operações Realizadas em Variáveis Independentes





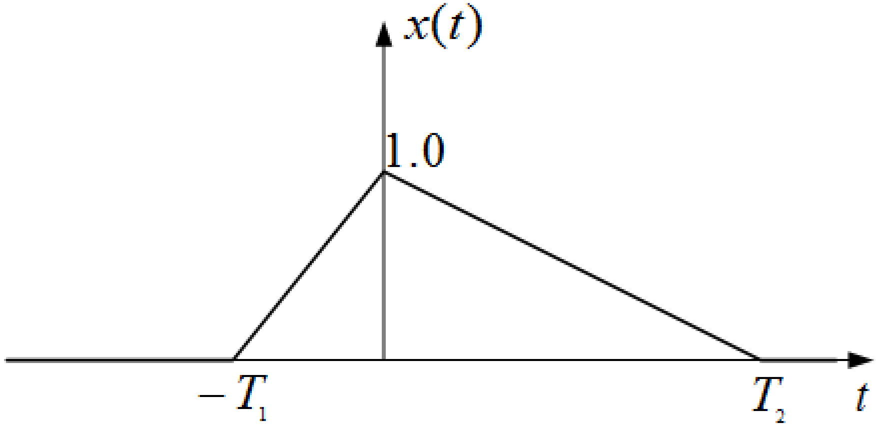
Operações Realizadas em Variáveis Independentes

Reflexão: *O sinal y(t) representará uma versão refletida do sinal x(t) em relação ao eixo das ordenadas.*

$$y(t) = x(-t)$$

Operações Realizadas em Variáveis Independentes

Exemplo 1.2: Determinar o sinal $y(t)=x(-t)$.



Operações Realizadas em Variáveis Independentes

Exercício 1.9: O sinal discreto *x[n]* é definido por:

$$x[n] = \begin{cases} 1, n = 1 \\ -1, n = -1 \\ 0, n = 0 \; e \; |n| > 1 \end{cases}$$

Determinar o sinal *y[n]=x[n]+x[-n]*.

Operações Realizadas em Variáveis Independentes

Exercício 1.10: O sinal discreto *x[n]* é definido por:

$$x[n] = \begin{cases} 1, n = -1 \; e \; n = 1 \\ 0, n = 0 \; e \; |\, n \,| > 1 \end{cases}$$

Determinar o sinal *y[n]=x[n]+x[-n]*.

Operações Realizadas em Variáveis Independentes

Deslocamento no tempo: *Seja x(t) um sinal de tempo contínuo. A versão de x(t) deslocada no tempo é definida por:*

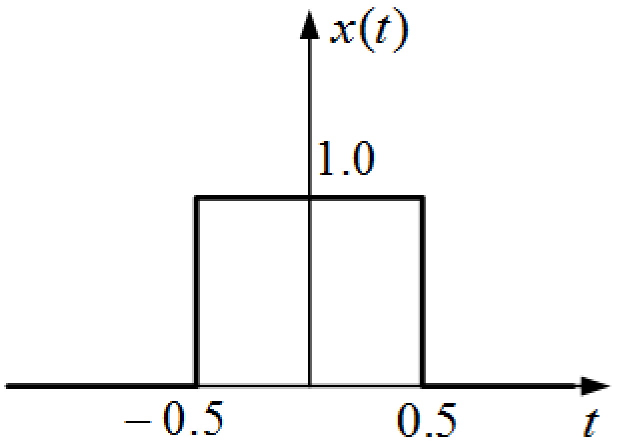
$$y(t) = x(t - t_o)$$

$t_o > 0$ *deslocamento para a direita;*

$t_o < 0$ *deslocamento para a esquerda.*

Operações Realizadas em Variáveis Independentes

Exemplo 1.3: Dado o sinal $x(t)$ abaixo, determinar o sinal $y(t)=x(t-2)$.



Operações Realizadas em Variáveis Independentes

Deslocamento no tempo: $y[n] = x[n-m], m \in Z$

Exercício 1.11: *O sinal de tempo discreto x[n] é definido por*

$$x[n] = \begin{cases} 1, n = 1, 2 \\ -1, n = -1, -2 \\ 0, n = 0\ e\ |n| > 2 \end{cases}$$

Determinar o sinal y[n]=x[n+3].

Operações Realizadas em Variáveis Independentes

Deslocamento no tempo e mudança de escala de tempo:

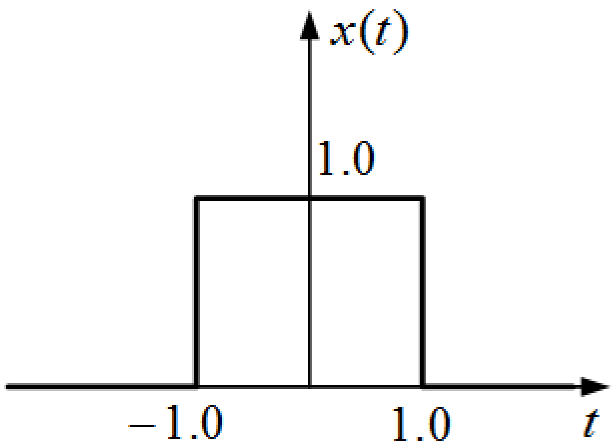
$$y[t] = x[at - b]$$

Para a obtenção deste sinal é comum a utilização de um sinal auxiliar $v[t] = x[t - b]$ (deslocamento no tempo), obtendo-se posteriormente o sinal

$$v[at] = x[at - b]$$

Operações Realizadas em Variáveis Independentes

Exemplo 1.4: Dado o sinal $x(t)$ abaixo, determinar o sinal $y(t)=x(2t+3)$.



Operações Realizadas em Variáveis Independentes

Exemplo 1.5: Um sinal de tempo discreto *x[n]* é definido por:

$$x[n] = \begin{cases} 1, n = 1, 2 \\ -1, n = -1, -2 \\ 0, n = 0 \; e \; |n| > 2 \end{cases}$$

Determinar *y[n]=x[2n+3]*.

Operações Realizadas em Variáveis Independentes

Exercício 1.12: Considere um sinal de tempo discreto *x[n]* definido por:

$$x[n] = \begin{cases} 1, & -2 \leq n \leq 2 \\ 0, & |n| > 2 \end{cases}$$

Determinar *y[n]=x[3n-2]*.

Sinais Elementares

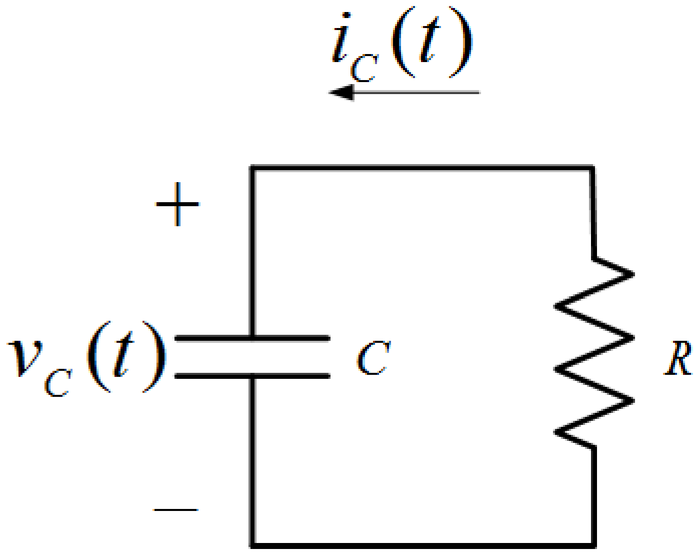
- **Sinais exponenciais**
- **Sinais senoidais**
- **Relação entre sinais senoidais e exponenciais complexos**
- **Sinal senoidal exponencialmente amortecido**
- **Funções degrau, impulso e rampa**

Sinais Exponenciais

$$x(t) = Be^{at} \quad \forall \quad B, a \in \Re$$

B := amplitude do sinal em t=0;
a:= razão de decaimento de x(t) quando a < 0;
razão de crescimento de x(t) quando a > 0;
sinal constante com amplitude igual a B quando a = 0.

Exemplo: Circuito *RC*



$$RC\frac{dv_c(t)}{dt}+v_c(t)=0$$

$$\frac{d}{dt}\left(v_c(t)e^{t/RC}\right)=0$$

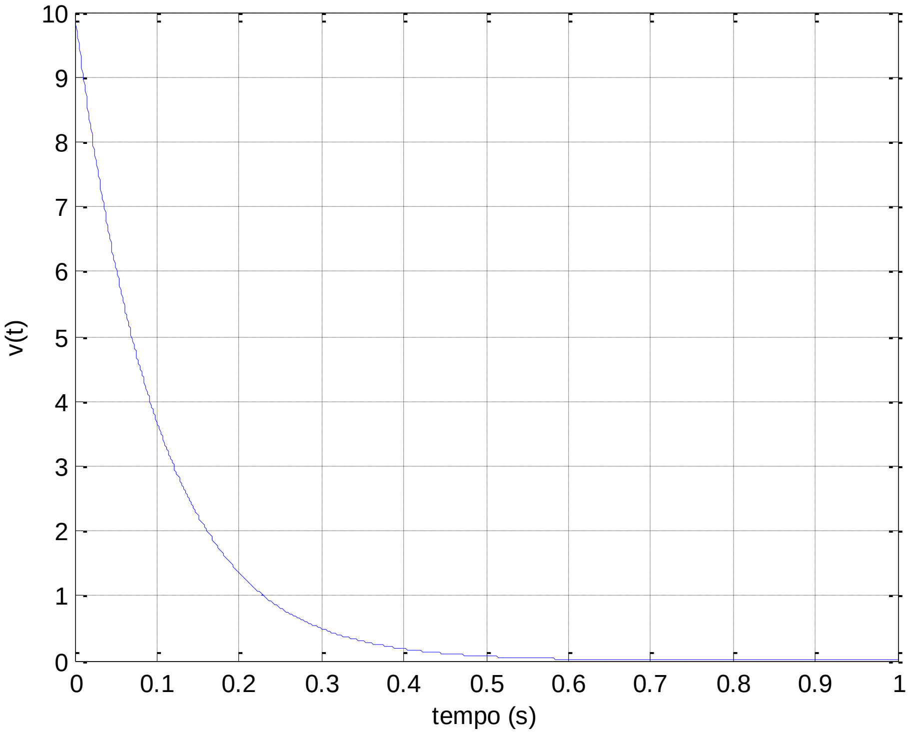
Exemplo: Circuito *RC*

$$RC\frac{dv_c(t)}{dt}+v_c(t)=0 \qquad\qquad v_c(t)=v_c(0)e^{-t/RC}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Uparrow$$

$$\frac{d}{dt}\left(v_c(t)e^{t/RC}\right)=0 \Rightarrow \int_0^t \frac{1}{d\tau}\left(v_c(\tau)e^{\tau/RC}\right)d\tau=0$$

Exemplo: Circuito $RC = 0.1$, $V(0)=10$.

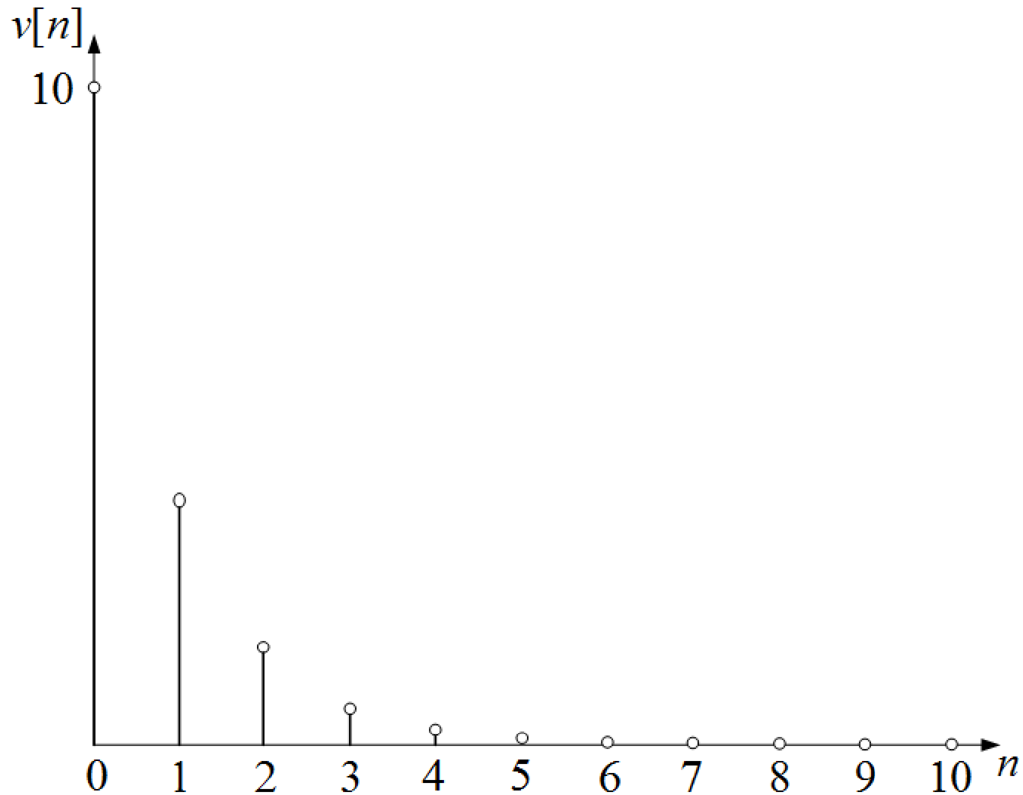


Sinais Exponenciais

$$x[n] = Br^n \; , r := e^{\alpha} \quad \forall \; \alpha \in \Re$$

B := amplitude do sinal em n=0;
0 < r < 1 sinal exponencial decrescente;
r > 1 sinal exponencial crescente

Exemplo: Circuito *RC = 0.1, V(0)=10*.



Sinais Senoidais

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

A:= amplitude do sinal;
ω:= frequência angular em rad/s;
ϕ:= ângulo de fase.

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Periodicidade do Sinal

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

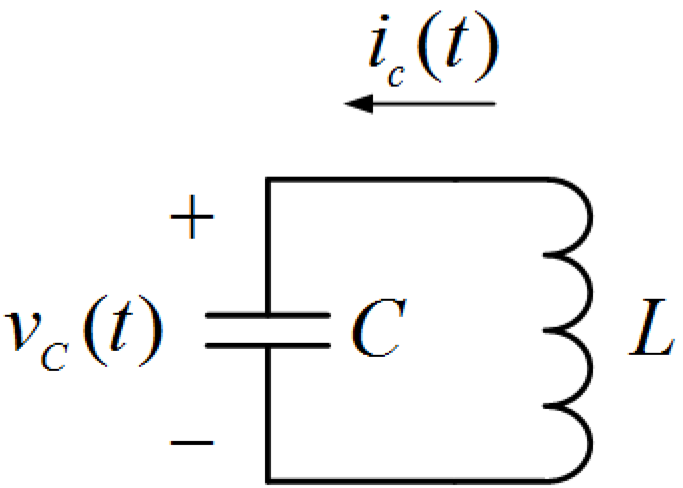
$$x(t+T) = A\cos\big(\omega(t+T)+\phi\big)$$

$$x(t+T) = A\cos\big(\omega t + 2\pi + \phi\big)$$

dado que $x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$

tem-se $x(t+T) = x(t)$

Exemplo: Circuito *LC*



$$LC\frac{d^2 v_c(t)}{dt^2} + v_c(t) = 0$$

$$v_c(t) = V_0 \cos(\omega t)$$

Exemplo: Circuito *LC*

$$v_c(t) = V_0 \cos(\omega t)$$

$$\Downarrow$$

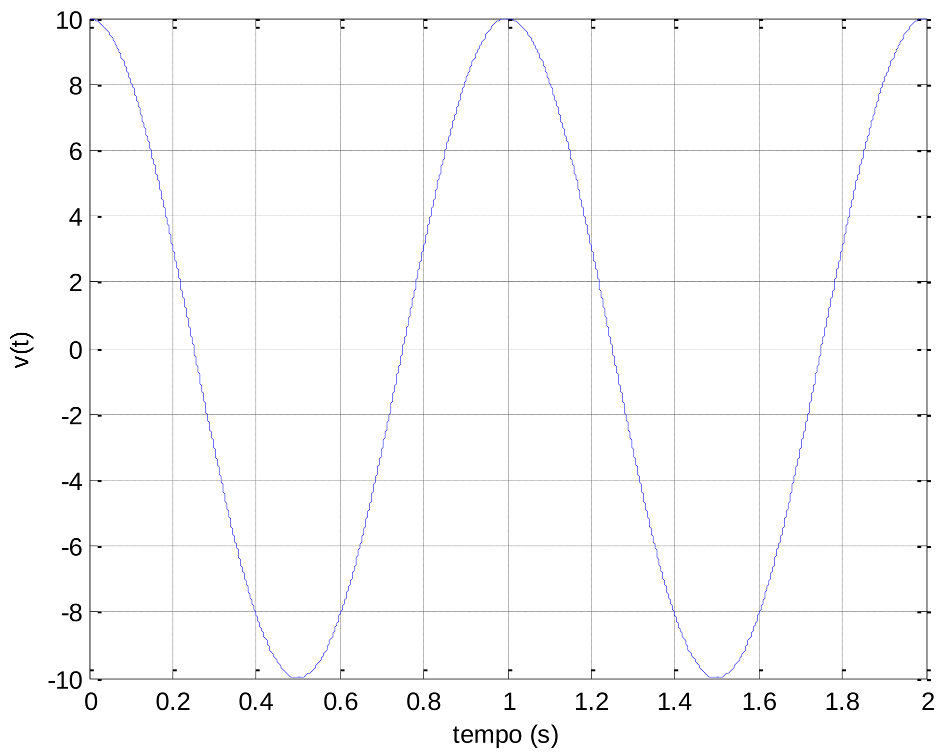
$$\frac{dv_c(t)}{dt} = -V_0\omega\, sen(\omega t)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d^2 v_c(t)}{dt^2} = -V_0\omega^2 \cos(\omega t)$$

$$\Rightarrow \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Exemplo: Circuito $LC = 1/4\pi^2$, $V_o = 10$.



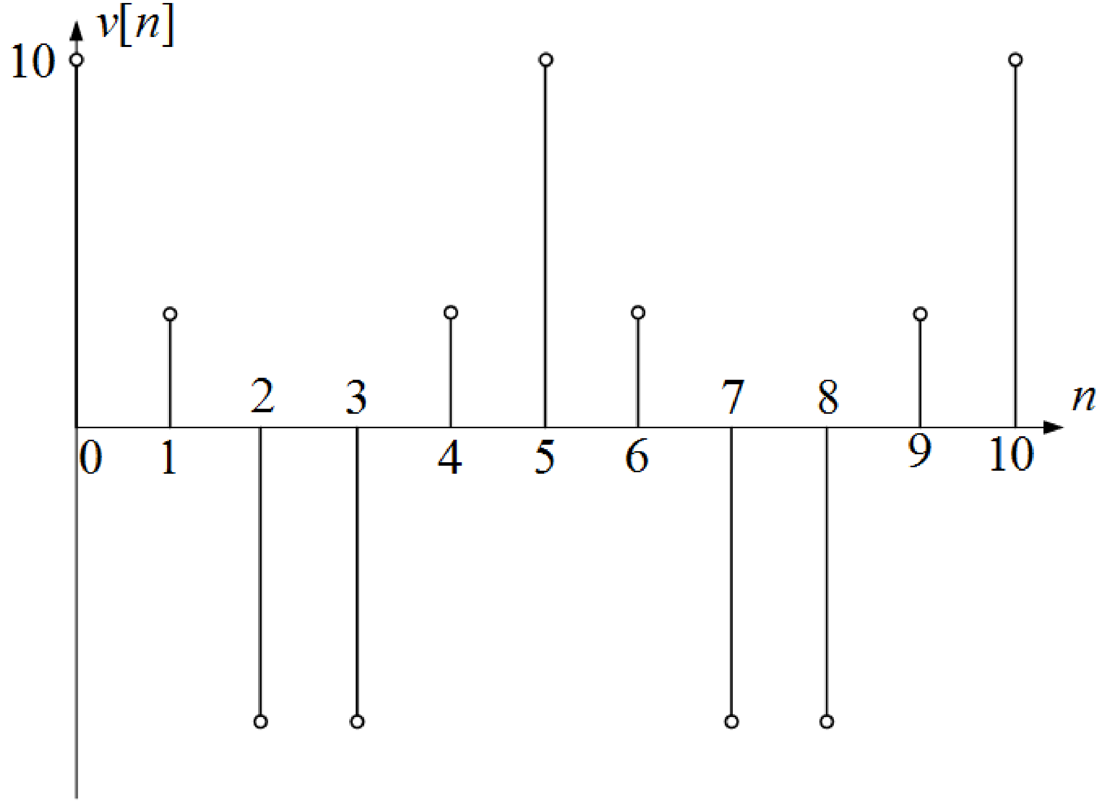
Sinais Senoidais

$$x[n] = A\cos(\Omega n + \phi)$$

$$x[n+N] = A\cos(\Omega(n+N) + \phi)$$

$$\Omega N = 2\pi\, m \;\forall\; N, m \in \mathrm{Z}$$

Exemplo: Circuito $LC = 1/4\pi^2$, $V_o = 10$.



Exemplo 1.6:

Considere os seguintes sinais senoidais:

$$x_1[n] = sen(5\pi\, n) \qquad\qquad x_2[n] = \sqrt{3}\,\cos(5\pi\, n)$$

(a) Especifique a condição de *N* para que ambos os sinais sejam periódicos;

(b) Determine a amplitude e o ângulo de fase do sinal

$$y[n] = x_1[n] + x_2[n]$$

Exercício 1.13:

Considere os seguintes sinais senoidais:

$$x[n] = 5sen(2n) \qquad x[n] = 5\cos(0.2\pi n)$$

$$x[n] = 5\cos(6\pi n) \qquad x[n] = 5sen\left(6\pi n/35\right)$$

Determinar se cada um dos sinais é periódico, e se for, determinar seu período fundamental.

Exercício 1.14:

Determine as menores frequências para que os sinais senoidais sejam periódicos dado *N*:

(a) $N = 8$;

(b) $N = 32$;

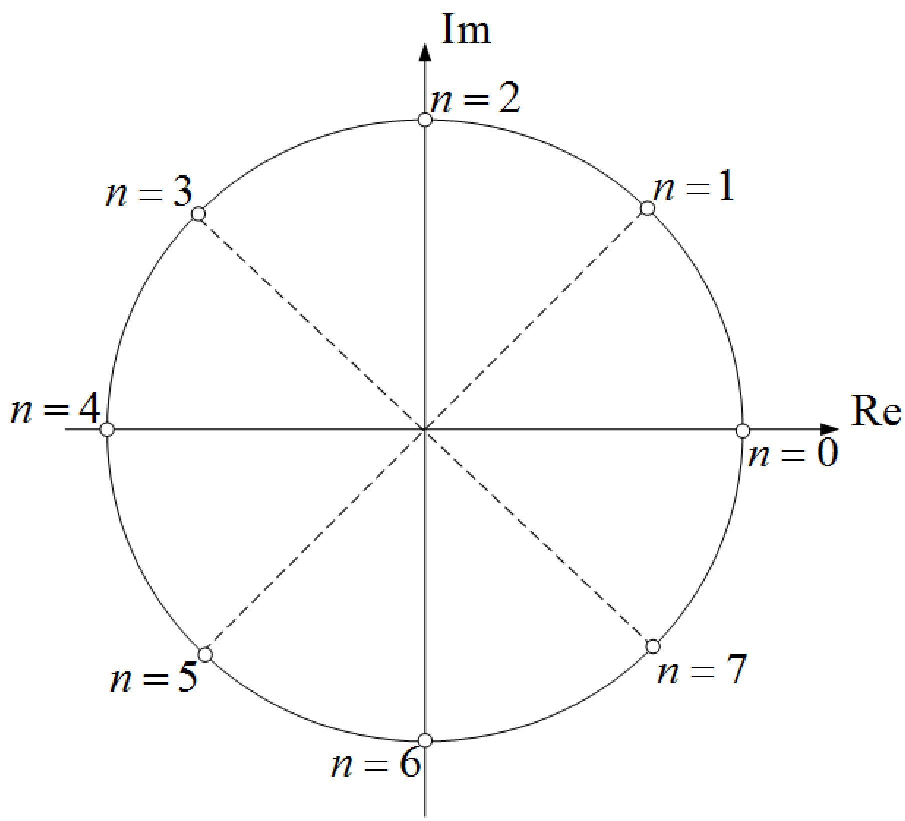
Sinais Senoidais e Exponenciais Complexos:

$$Be^{j\omega t} = A\cos(\omega t + \phi) + jAsen(\omega t + \phi)$$

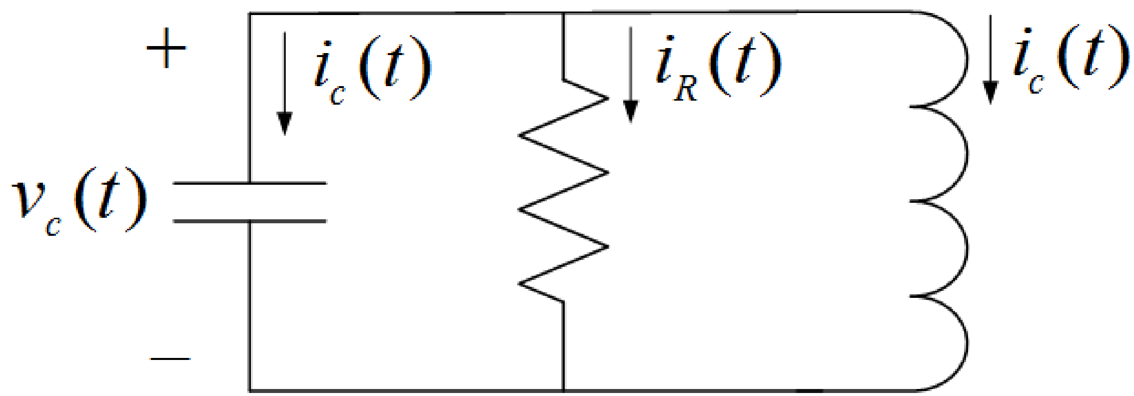
$$e^{j\theta} = \cos(\theta) + jsen(\theta)$$

$$B = Ae^{j\phi} \quad \begin{cases} \mathrm{Re}\{Be^{j\omega t}\} = A\cos(\omega t + \phi) \\ \\ \mathrm{Im}\{Be^{j\omega t}\} = Asen(\omega t + \phi) \end{cases}$$

$$Be^{j\Omega n} = A\cos(\Omega n + \phi) + jAsen(\Omega n + \phi)$$



Sinais Senoidais e Exponenciais Amortecidos:



$$LCR\frac{d^2v_c}{dt^2}+L\frac{dv_c}{dt}+Rv_c=0 \Rightarrow x(t)=e^{-\alpha t}sen(\omega t+\phi),$$

$$\alpha\in\Re^+$$

Sinais Senoidais e Exponenciais Amortecidos:

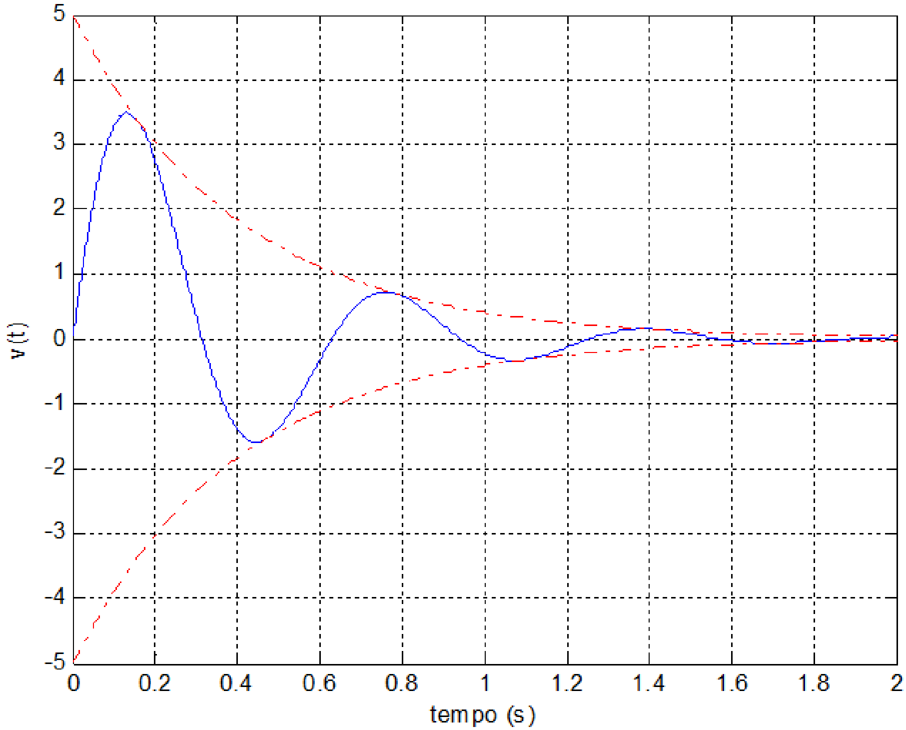
Padrão de resposta sinal contínuo:

$$x(t) = Ae^{-\alpha t} sen(\omega t + \phi), \alpha \in \Re^{+}$$

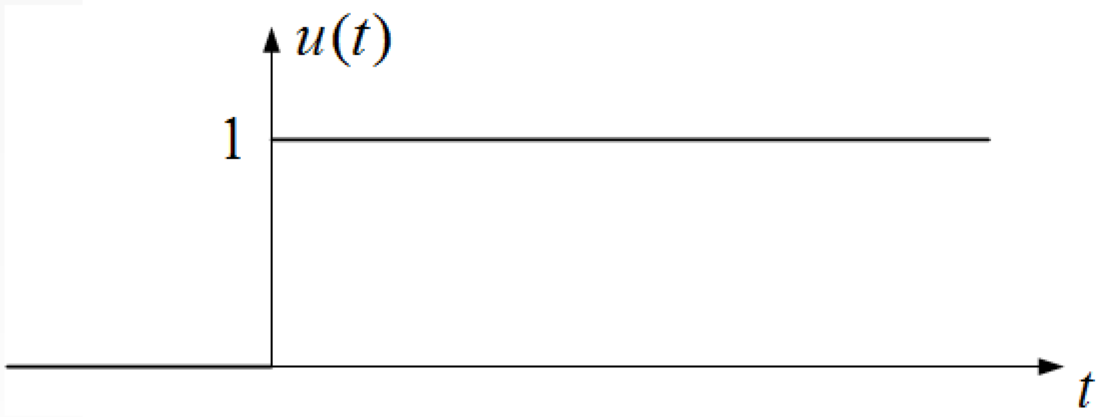
Padrão de resposta sinal discreto:

$$x[n] = Ar^{n} sen(\Omega n + \phi), 0 < r < 1$$

Sinais Senoidais e Exponenciais Amortecidos:

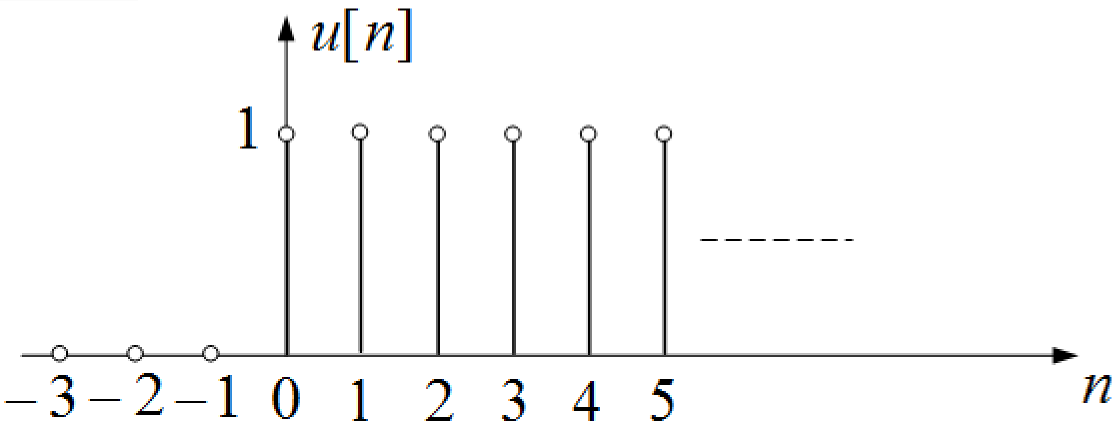


Função Degrau:



$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

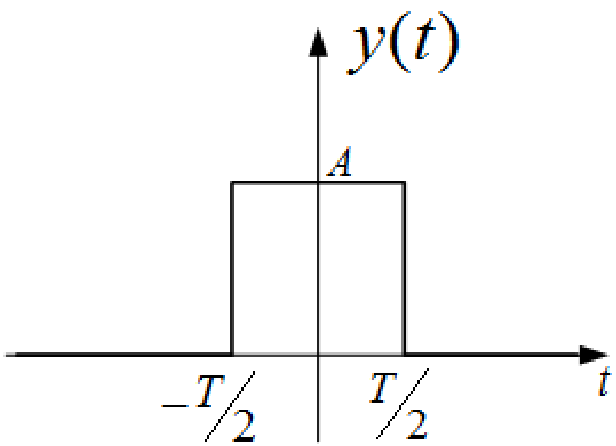
Função Degrau:



$$u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

Exemplo 1.7

Considere o seguinte pulso retangular:



Expresse o sinal *y(t)* como a soma de sinais do tipo degrau.

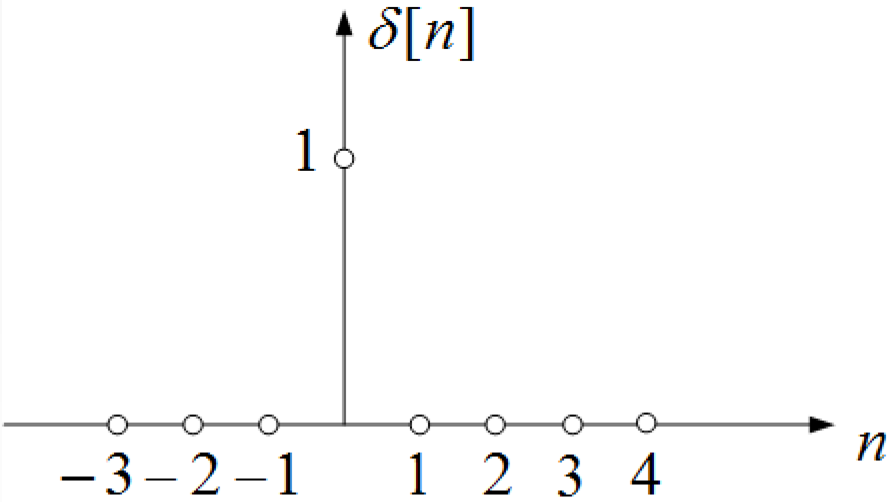
Exercício 1.16

Um sinal em tempo discreto *x[n]* é definido por:

$$x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \le n \le 9 \\ 0, & caso\ contrário \end{cases}$$

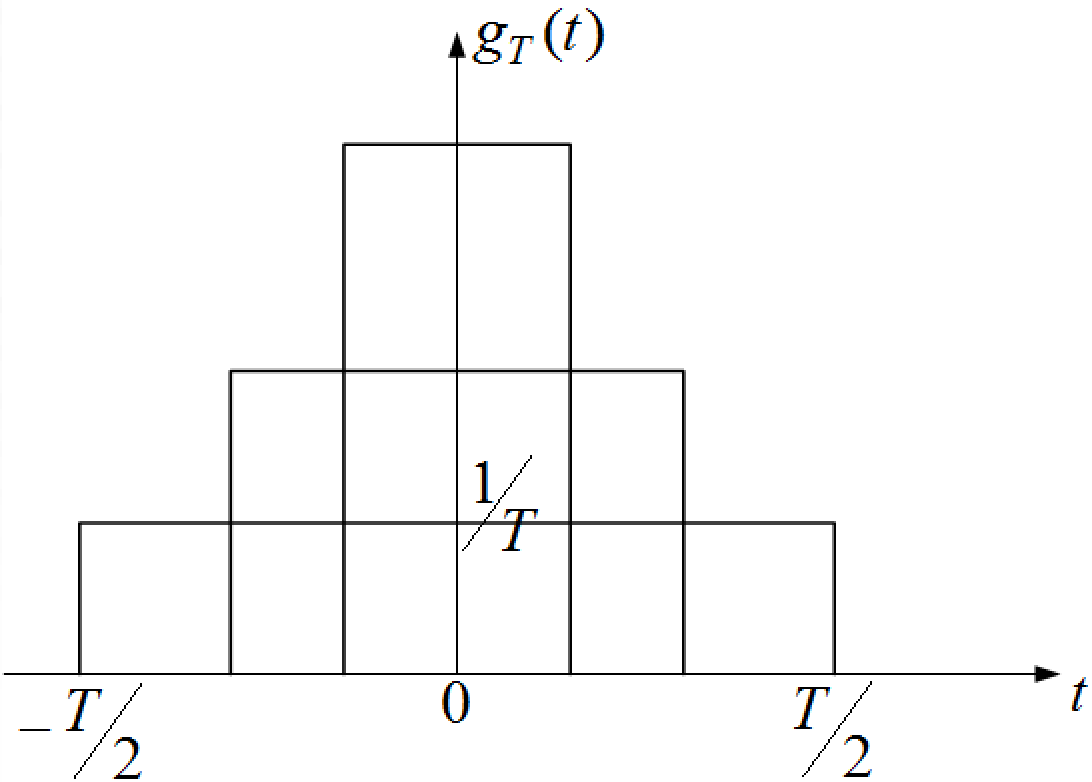
Expresse o sinal *x[n]* como a soma de sinais do tipo degrau.

Função Impulso:



$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

Função Impulso:

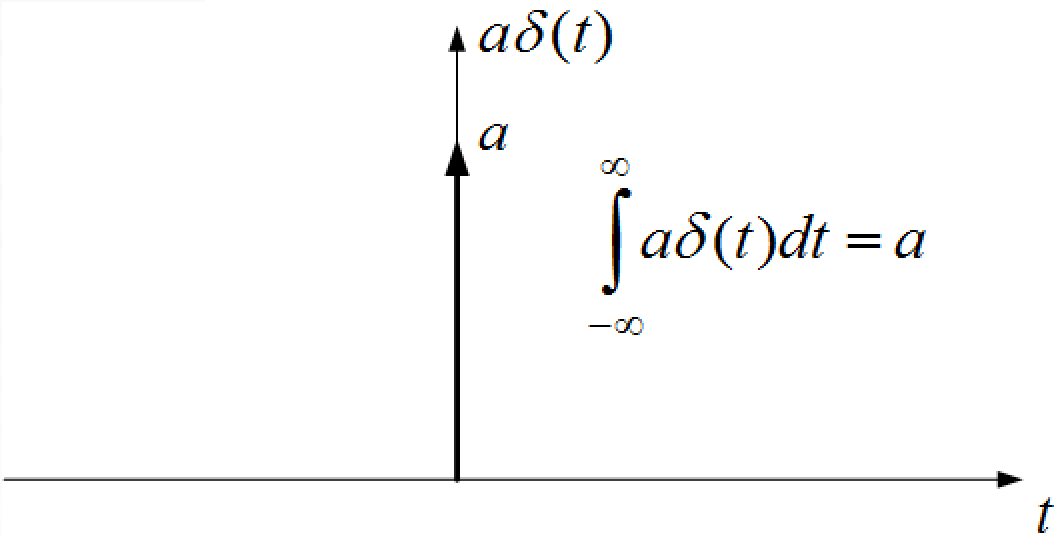


$$\delta(t) = 0, \forall\, t \neq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$$

$$\delta(t) = \lim_{T \to 0} g_T(t)$$

Função Impulso – Propriedade do Peneiramento

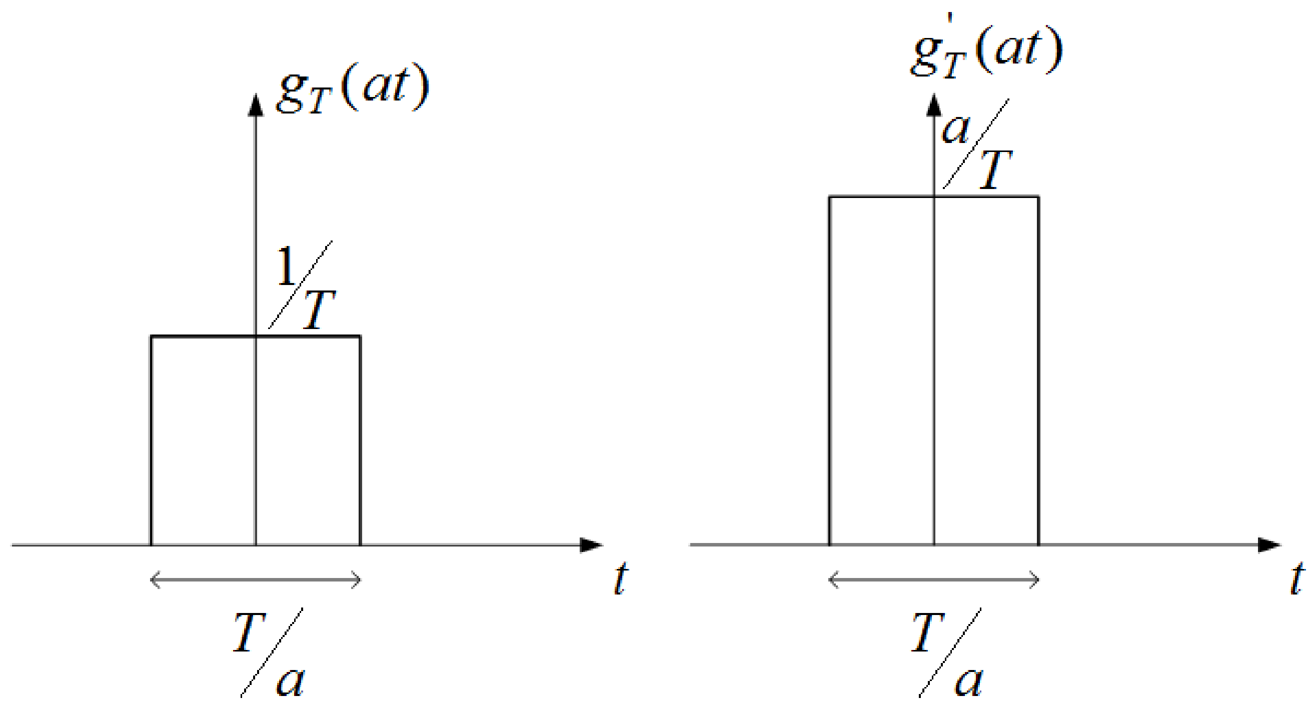


$$\int_{-\infty}^{\infty} a\delta(t)\,dt = a$$

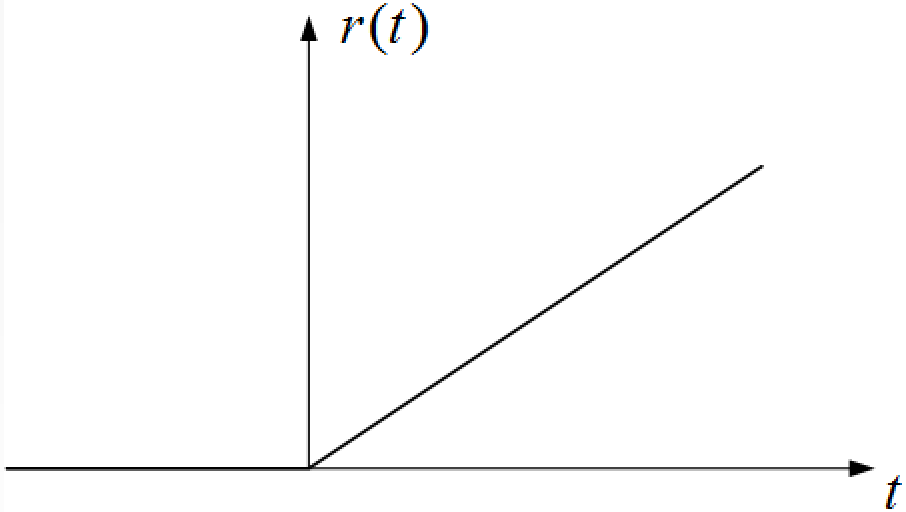
$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-t_0)\,dt = x(t_0)$$

Função Impulso – Mudança de Escala de Tempo

$$\delta(at) = \frac{1}{a}\delta(t)$$

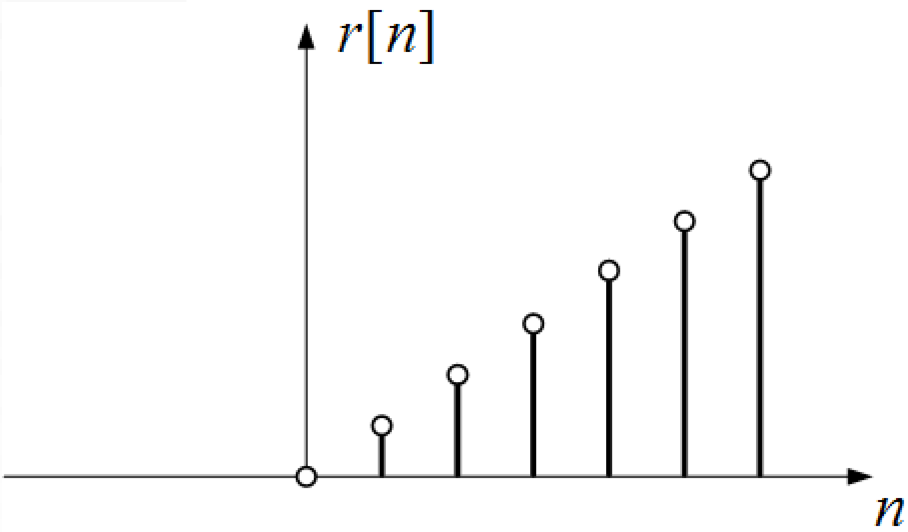


Função Rampa:



$$r(t)\begin{cases} t, t \geq 0 \\ 0, t < 0 \end{cases}$$

Função Rampa:



$$r[n]\begin{cases} n, n \geq 0 \\ 0, n < 0 \end{cases}$$