Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Departamento de Engenharia Elétrica

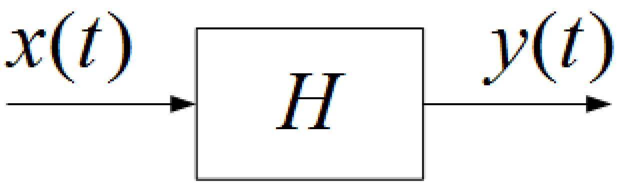
Propriedades de Sistemas

- **Estabilidade**
- **Memória**
- **Causalidade**
- **Invertibilidade**
- **Invariância no Tempo**
- **Linearidade**

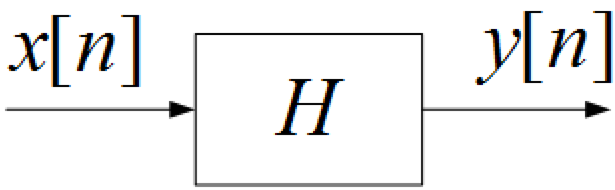
Propriedades de Sistemas

"Interconexão de operações que transforma o sinal de entrada num sinal de saída com diferentes propriedades".

Propriedades de Sistemas



$$y(t) = H\{x(t)\}$$



$$y[n] = H\{x[n]\}$$

Propriedades de Sistemas

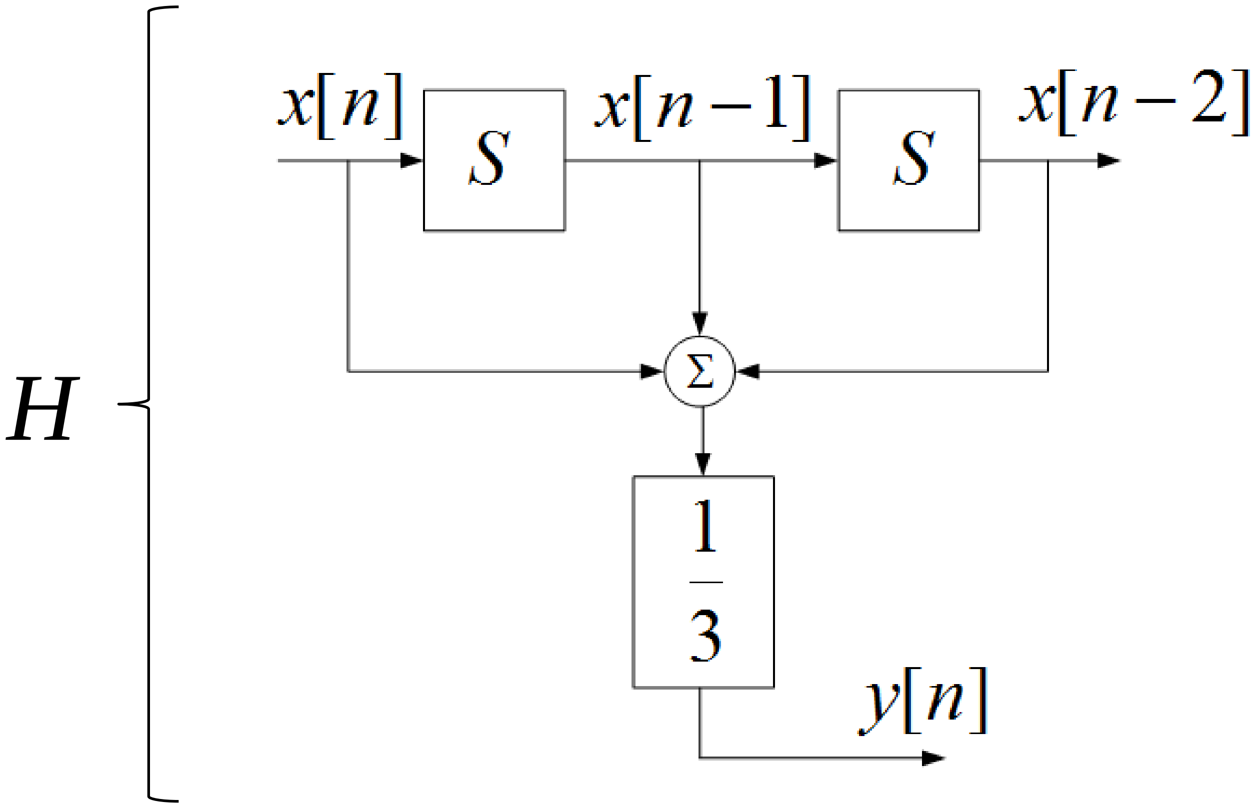
As propriedades de um sistema descrevem as características do operador H que representam o sistema.

Exemplo 1.8: Sistema de Média Móvel

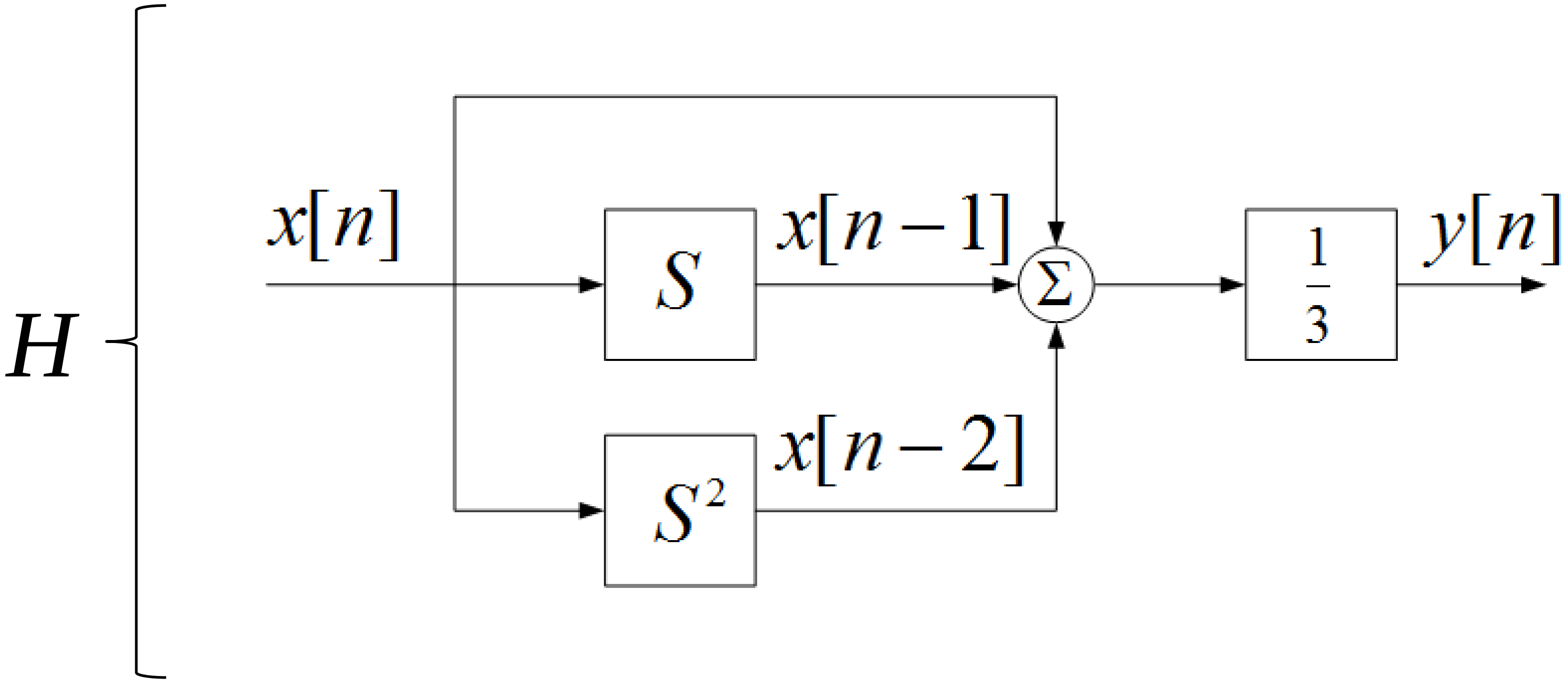
$$y[n] = \frac{1}{3}\left(x[n] + x[n-1] + x[n-2]\right)$$

$$x[n] \longrightarrow \boxed{S^k} \longrightarrow x[n-k]$$

Realização na Forma Série



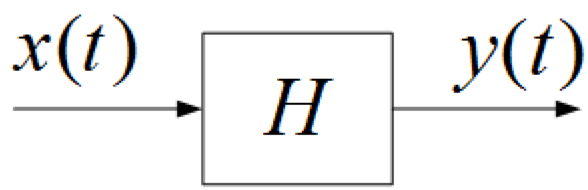
Realização na Forma Paralela



Estabilidade BIBO

O sistema será BIBO estável (Bounded Input Bounded Output) se para todo sinal de entrada limitado implicar em um sinal de saída limitado.

Estabilidade BIBO



$$|y(t)| \leq M_y < \infty$$

$$|x(t)| \leq M_x < \infty \,, \; M_y, M_x \in \Re^+$$

Exemplo 1.9:

Mostrar que o sistema de média móvel

$$y[n] = \frac{1}{3}\left(x[n] + x[n-1] + x[n-2]\right)$$

é BIBO estável.

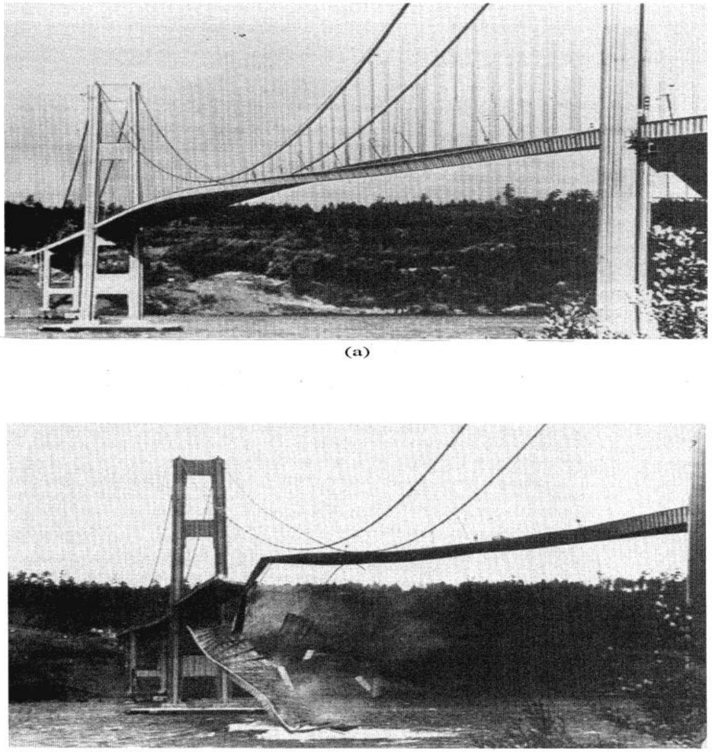
Exemplo 1.10:

Considere o sistema em tempo discreto:

$$y[n] = r^n x[n], \;\; r > 1$$

Mostrar que se trata de um sistema instável no sentido BIBO.

Exemplo de Sistema Instável



(a)

(b)

Memória

Diz-se que um sistema possui memória se sua saída depender de valores passados do sinal de entrada.

Sem memória $\left\{ i(t) = \dfrac{v(t)}{R} \qquad i(t) = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_{-\infty}^{t} v(\tau)\,d\tau \right\}$ *Com memória*

Exercício 1.19:

O sistema de média móvel dado por

$$y[n] = \frac{1}{3}\left(x[n] + x[n-1] + x[n-2]\right)$$

possui memória?

Causalidade

Diz-se que um sistema é causal se o valor atual do sinal de saída depender somente dos valores presentes e/ou passados do sinal de entrada.

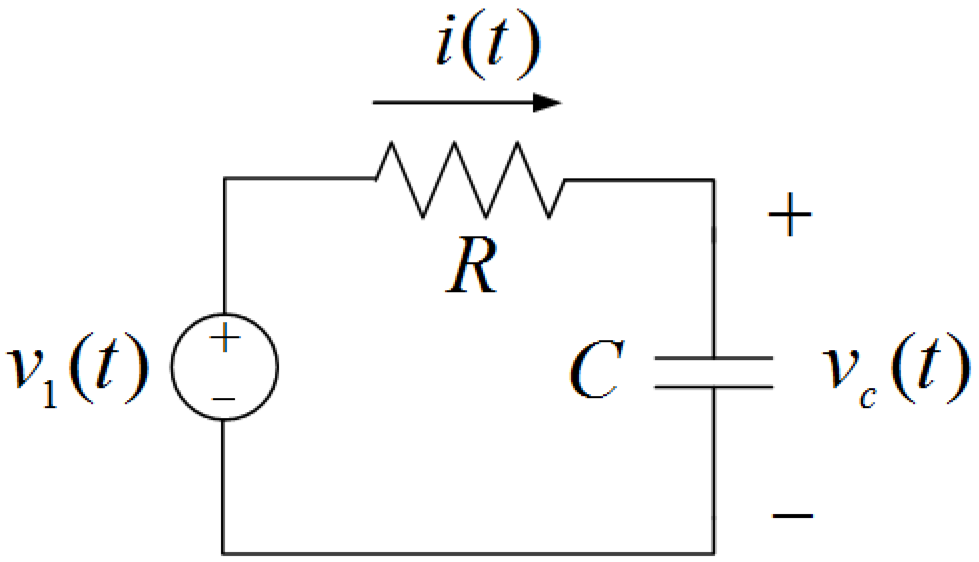
Causalidade

Causal $\left\{ y[n] = \frac{1}{3}\left(x[n] + x[n-1] + x[n-2]\right) \right.$

Não-causal $\left\{ y[n] = \frac{1}{3}\left(x[n+1] + x[n] + x[n-1]\right) \right.$

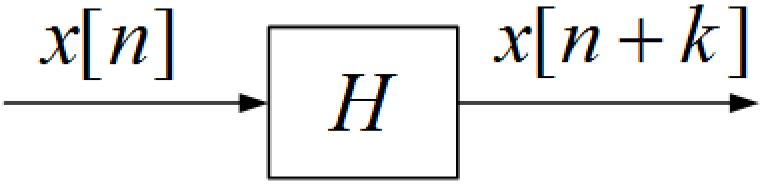
Causalidade

Causal ou não-causal? Por quê?



Causalidade

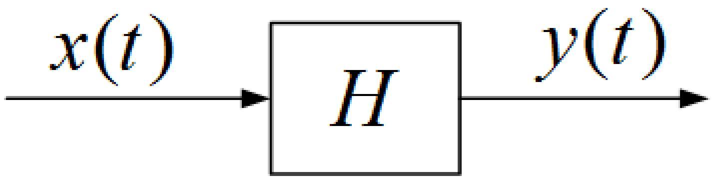
Causal ou não-causal? Por quê?



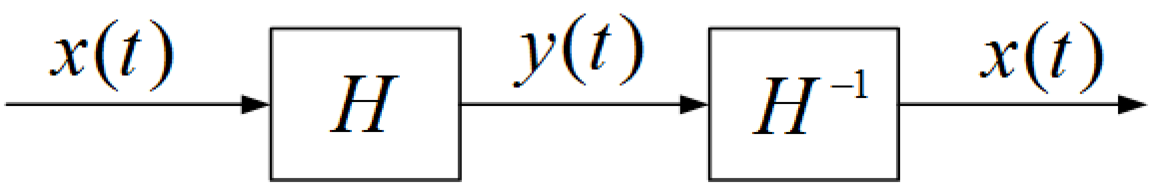
Invertibilidade

Diz-se que um sistema é invertível se a entrada do sistema puder ser recuperada através do sinal de saída do sistema.

Invertibilidade



$$y(t) = H\{x(t)\}$$



$$x(t) = H^{-1}\{H\{x(t)\}\} \Rightarrow H^{-1}H = HH^{-1} = I$$

Invertibilidade

Exemplo: sistemas de comunicação

1. Informação
2. Sinal transmitido
3. Sinal recebido
4. Estimativa da informação

Invertibilidade

Uma característica importante associada aos sistemas invertíveis é que entradas distintas devem produzir saídas distintas.

Exemplo 1.11:

Considere um sistema de deslocamento no tempo descrito pela relação entrada-saída

$$y(t) = x(t - t_0) = S^{t_0}\{x(t)\}$$

Avaliar se é ou não um sistema invertível.

Exemplo 1.12:

Avaliar se o sistema responsável pela relação quadrática entre o sinal de saída y(t) e o sinal de entrada x(t), descrito por

$$y(t) = x^2(t)$$

trata-se ou não de um sistema invertível.

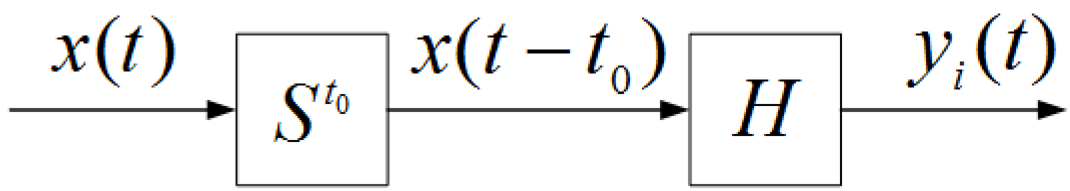
Invariância no Tempo

Um sistema é dito invariante no tempo se um deslocamento no tempo do sinal de entrada (retardo ou avanço) implicar em um deslocamento temporal idêntico no sinal de saída.

Invariância no Tempo

$$y(t) = H\{x(t)\}$$

$$x(t - t_0) = S^{t_0}\{x(t)\}$$

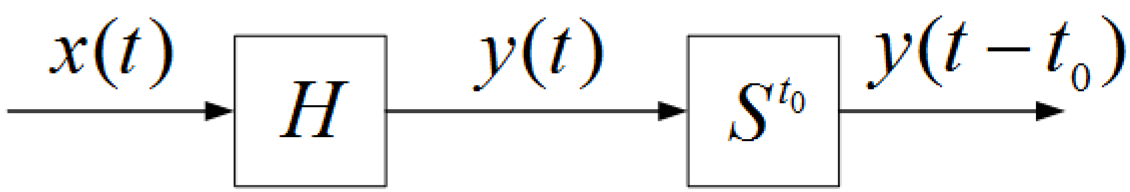


$$y_i(t) = H\{x(t - t_0)\} = H\left\{S^{t_0}\{x(t)\}\right\} = HS^{t_0}\{x(t)\}$$

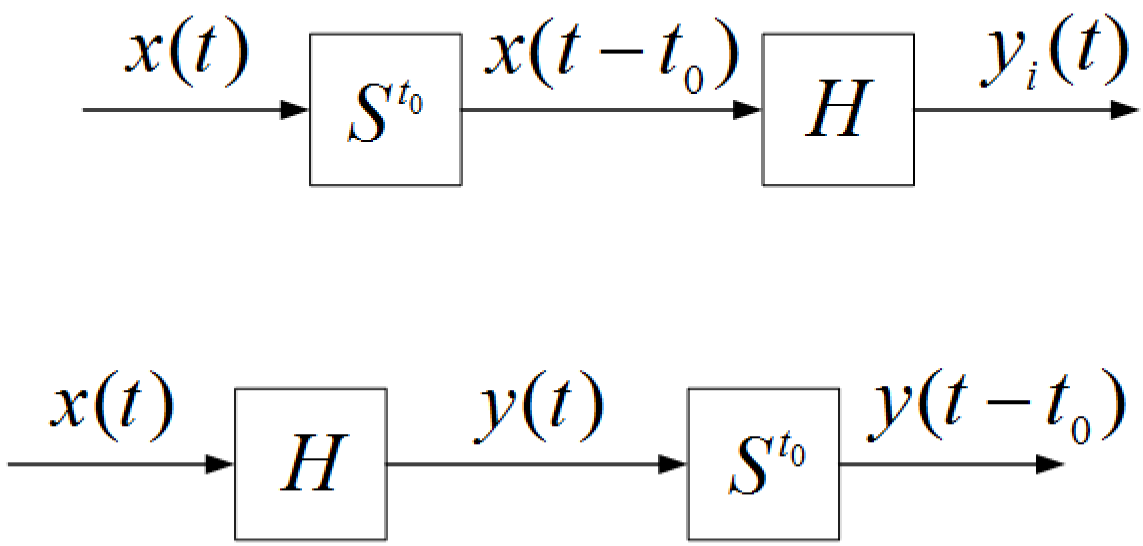
Invariância no Tempo

$$y_0(t) = y(t - t_0)$$

$$y_0(t) = S^{t_0}\{y(t)\} = S^{t_0} H\{x(t)\}$$



Invariância no Tempo



$$S^{t_0} H = H S^{t_0}$$

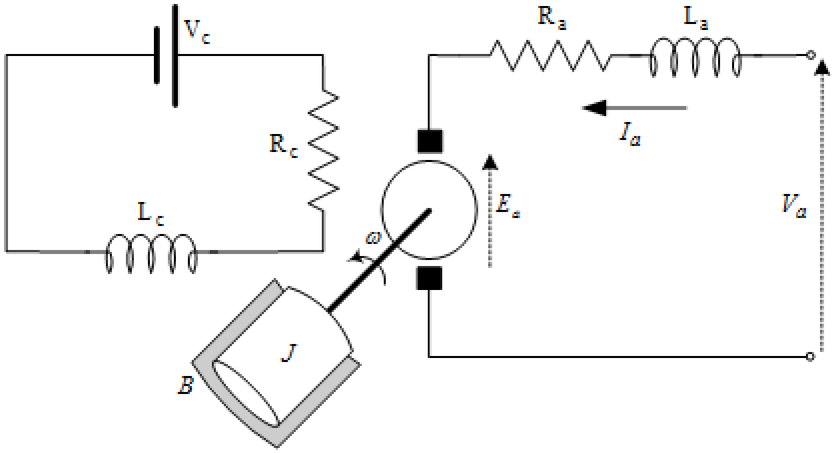
Exemplo 1.14: Termistor

$$i(t) = \frac{v(t)}{R(t)}$$

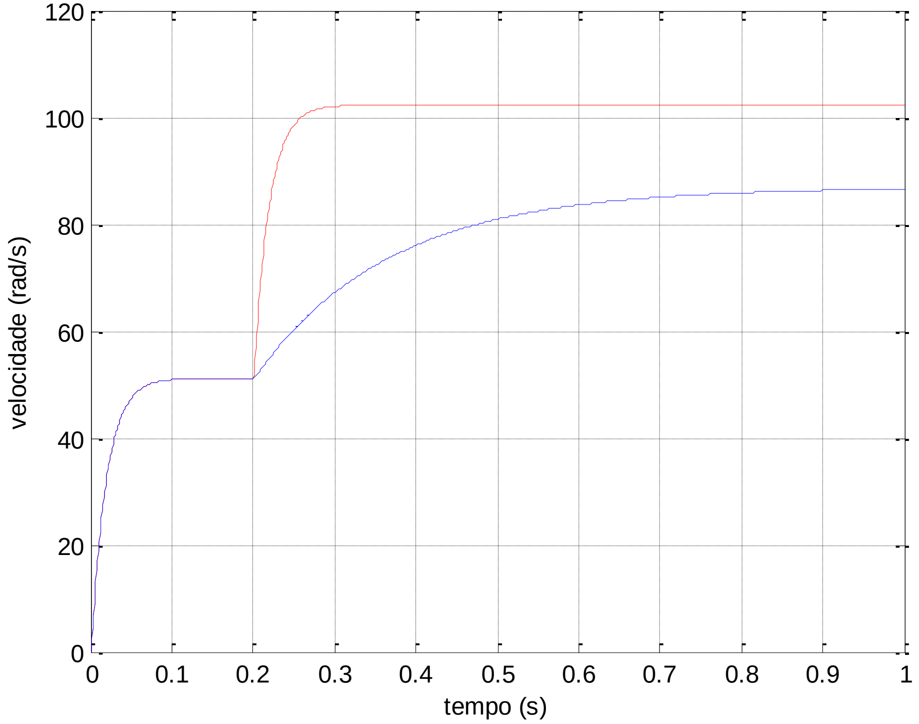
$$v(t - t_0) = v(t) \quad \Rightarrow \quad i_0(t) = \frac{v(t - t_0)}{R(t - t_0)}$$

$$R(t) \neq R(t - t_0) \quad \Rightarrow \quad i(t) \neq i(t - t_0)$$

Exemplo: Motor DC



Motor DC com variação nos parâmetros J e B.



Linearidade

Uma função *f(x)* é dita linear se satisfizer as seguintes condições:

$$f(\alpha\, x) = \alpha\, f(x)$$

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$$

Linearidade

Tal propriedade também aplica-se aos sistemas, caracterizando-os como lineares. Sendo assim, a resposta de um sistema linear a uma soma ponderada de sinais de entrada é igual à mesma soma ponderada dos sinais de saída associados a cada um dos respectivos sinais de entrada.

Linearidade

$$x(t) = \sum_{i=1}^{N} a_i x_i(t) \quad \begin{cases} x_i, i = 1,2,\cdots,N, \\ a_i, i = 1,2,\cdots,N, \end{cases}$$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{H} \longrightarrow y(t)$$

$$y(t) = H\{x(t)\} = H\{\sum_{i=1}^{N} a_i x_i(t)\}$$

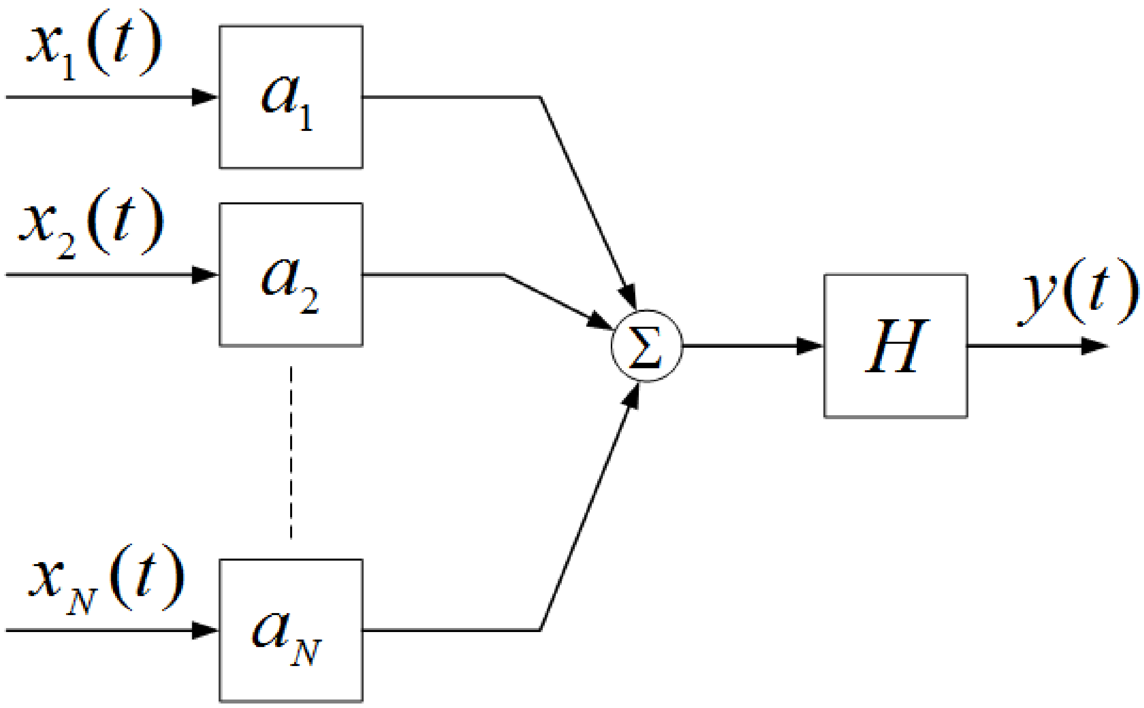
Linearidade

Se o sistema for linear

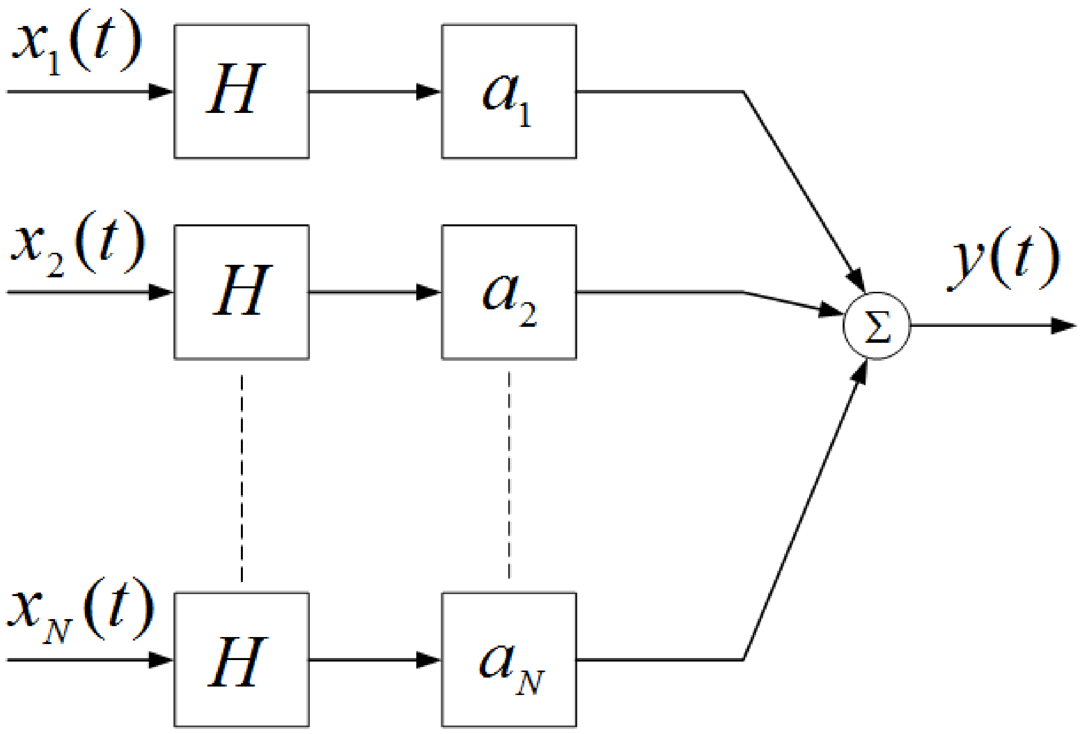
$$y(t) = \sum_{i=1}^{N} a_i y_i(t) \qquad y_i(t) = H\{a_i x_i(t)\}$$

$$H\{\sum_{i=1}^{N} a_i x_i(t)\} = \sum_{i=1}^{N} a_i H\{x_i(t)\}$$

Linearidade



Linearidade



Exemplo 1.15:

Considere o seguinte sistema discreto:

$$y[n] = n\,x[n]$$

Avaliar se é um sistema linear.

Exemplo 1.15:

Considere o seguinte sistema contínuo:

$$y(t) = x^2(t)$$

Avaliar se é um sistema linear.

Exemplo 1.15:

Mostrar que o sistema de média móvel descrito por

$$y[n] = \frac{1}{3}\left(x[n] + x[n-1] + x[n-2]\right)$$

é linear.