Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Departamento de Engenharia Elétrica

Representação em Domínio de Tempo para Sistemas Lineares Invariantes no Tempo

- **Resposta impulsiva: convolução**
- **Representação por equações diferenciais e de diferenças**
- **Diagrama de blocos**
- **Espaço de estados**

Resposta ao Impulso

Para sistemas Lineares e Invariantes no Tempo - LTI, pode-se determinar a resposta temporal a uma entrada arbitrária através da superposição de respostas ao impulso deslocadas no tempo.

Resposta ao Impulso

O sinal de entrada é amostrado de forma impulsiva, ponderando o impulso com o valor instantâneo do sinal de entrada. Para sistemas LTI, cada impulso ponderado pode ser considerado como um sinal de entrada independente no sistema (superposição).

Resposta ao Impulso

Esta superposição das respostas ao impulso ponderadas pelo sinal de entrada é chamada de Soma de Convolução para sistemas de tempo discreto, e de Integral de Convolução para sistemas de tempo contínuo.

Soma de Convolução

Considere o sinal *x[n]* amostrado por uma sequência de impulsos deslocados no tempo $\delta[n-k]$.

$$x[n]\delta[n-k] = x[k]\delta[n-k]$$

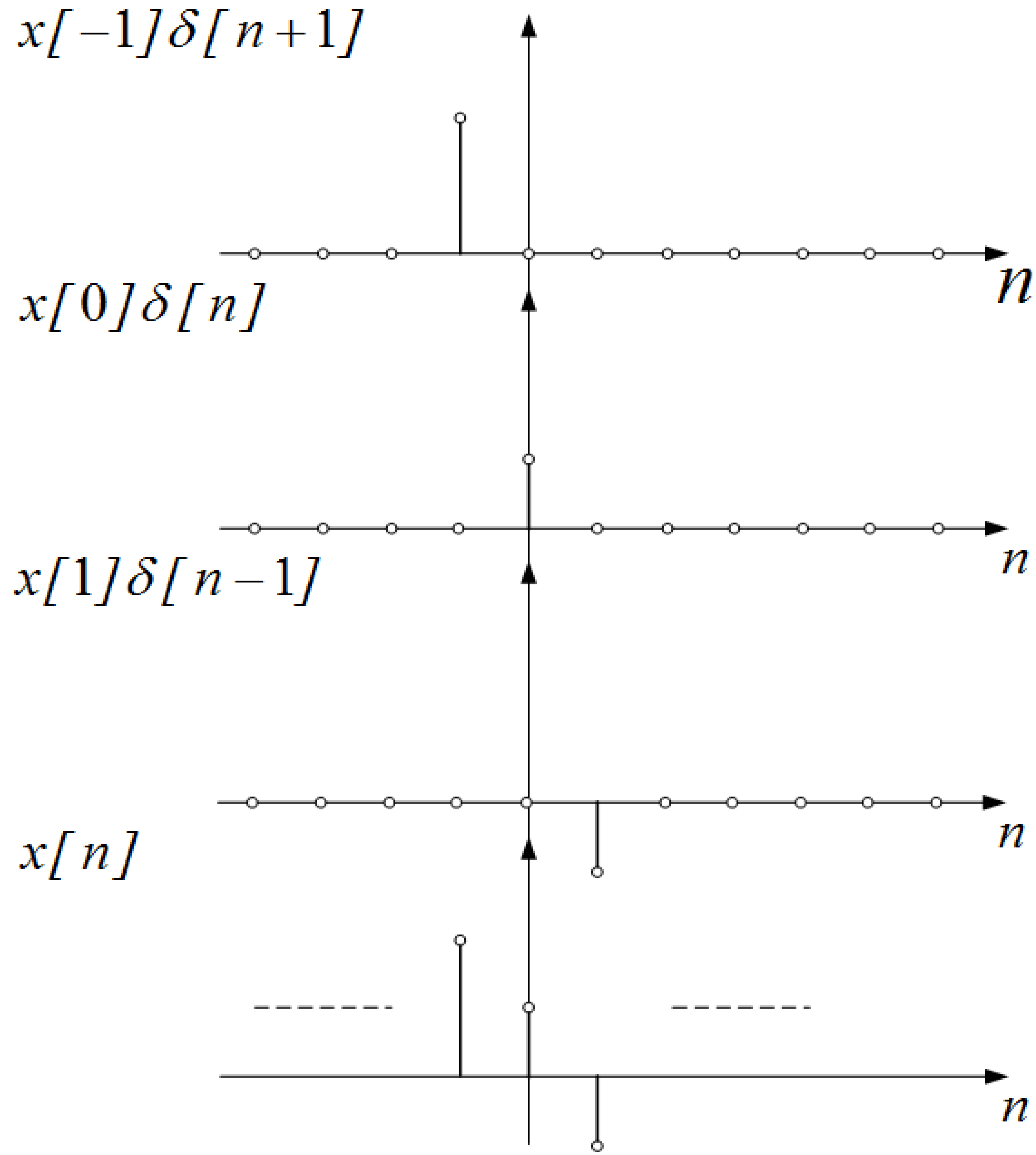
Soma de Convolução

Sendo assim, *x[n]* pode ser representado na forma:

$$x[n] = \ldots + x[-1]\delta[n+1] + x[0]\delta[n] +$$
$$+ x[1]\delta[n-1] + \ldots$$

ou ainda como:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$$



$x[-1]\delta[n+1]$
n
$x[0]\delta[n]$
n
$x[1]\delta[n-1]$
n
$x[n]$
n

Soma de Convolução

Definindo um operador *H* que representa o sistema ao qual a entrada *x[n]* é aplicada:

$$y[n] = H\{x[n]\} = H\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]\}$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]H\{\delta[n-k]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h_k[n]$$

Soma de Convolução

onde $h_k = H\{\delta[n-k]\}$ representa a resposta ao impulso do sistema *H* para um impulso aplicado no instante *k*. A equação anterior também pode ser escrita na forma:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

Soma de Convolução

Tal operação é chamada de Soma de Convolução e também pode ser expressa na forma:

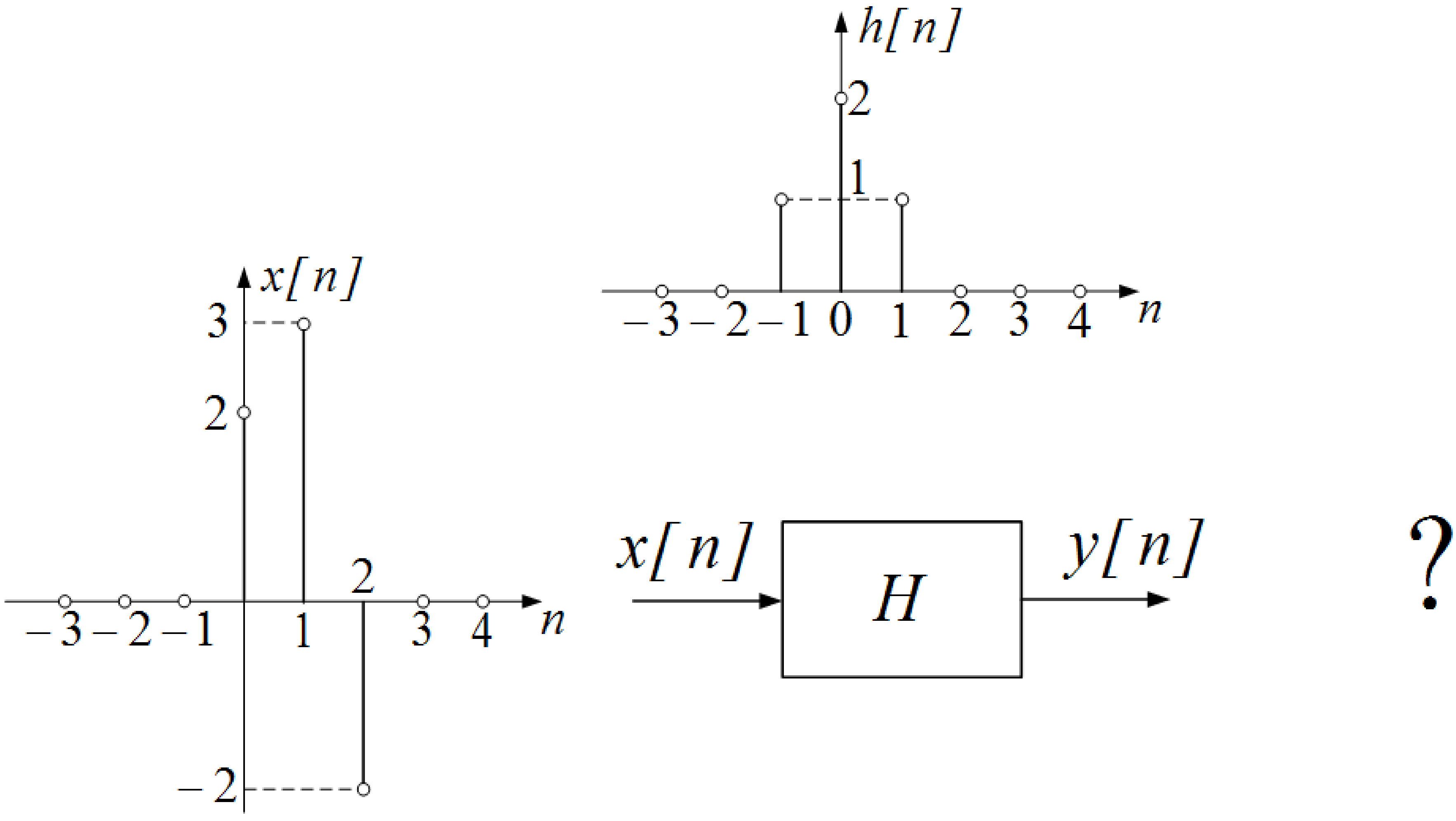
$$x[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]h[n-k]$$

Soma de Convolução

Exemplo 2.1: Suponha que a um sistema *H* do tipo LTI com resposta ao impulso *h[n]* é aplicado um sinal *x[n]*.

$$h[n] = \begin{cases} 1, n = \pm 1 \\ 2, n = 0 \\ 0, caso\ contrário \end{cases} \qquad x[n] = \begin{cases} 2, n = 0 \\ 3, n = 1 \\ -2, n = 2 \\ 0, caso\ contrário \end{cases}$$

Obtenha graficamente o sinal de saída *y[n]*.



O sinal *y[n]* também pode ser obtido escrevendo o sinal de entrada na forma

$$x[n] = 2\delta[n] + 3\delta[n-1] - 2\delta[n-2]$$

determinando a saída *y[n]* do sistema para este sinal na forma

$$y[n] = 2h[n] + 3h[n-1] - 2h[n-2]$$

Determinar, variando *n*, os valores da variável de saída do sistema, conferindo-os com os obtidos anteriormente.

Soma de Convolução

Da forma com que foi resolvido graficamente o exemplo anterior, pode-se generalizar a expressão da variável de saída *y[n]* para um determinado instante n_o como:

$$y[n_o] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_k[n_o]$$

Pode-se ainda definir uma nova variável

$$w_{n_o}[k] = v_k[n_o]$$

reescrevendo $y[n_o]$ como

$$y[n_o] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} w_{n_o}[k]$$

Resolver graficamente o exemplo anterior, utilizando a relação apresentada.

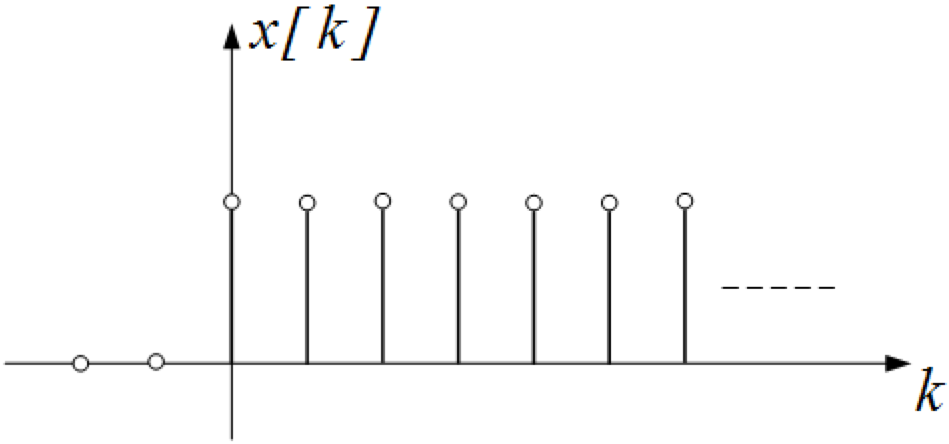
Exemplo 2.2

Considere um sistema LTI com a seguinte resposta ao impulso:

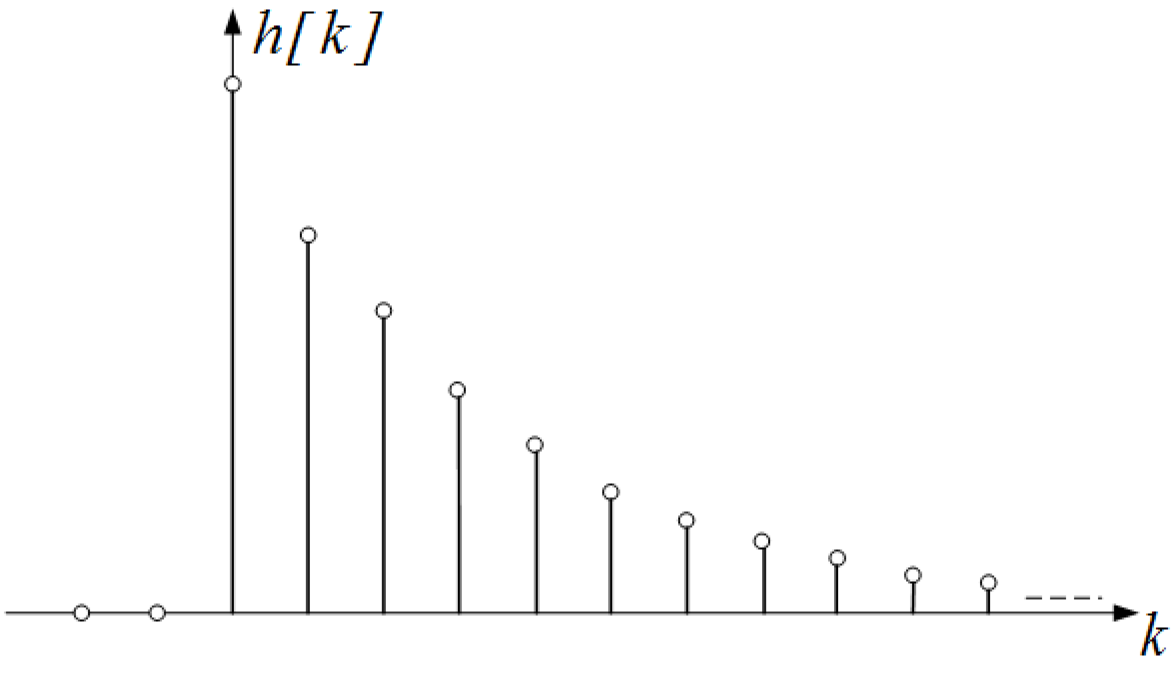
$$h[n] = \left(\frac{3}{4}\right)^n u[n]$$

Determinar a saída do sistema *y[n]* para *n=-5*, *5 e 10*, quando o sinal de entrada for *x[n]=u[n]*.

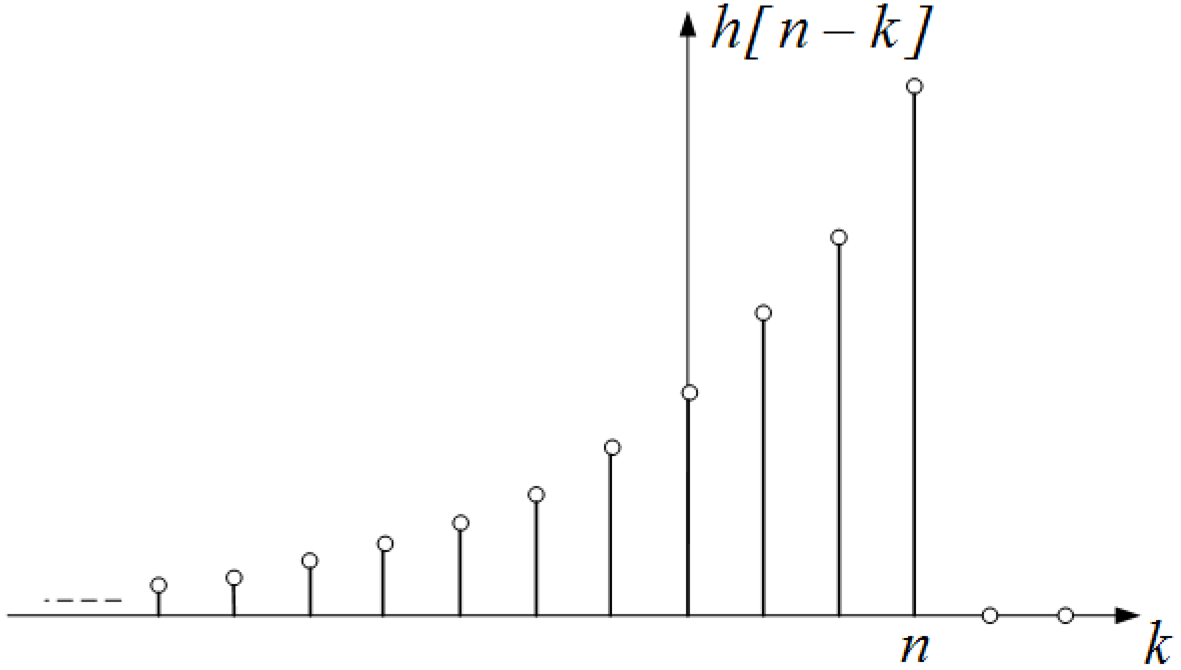
Exemplo 2.2: Sinal de Entrada



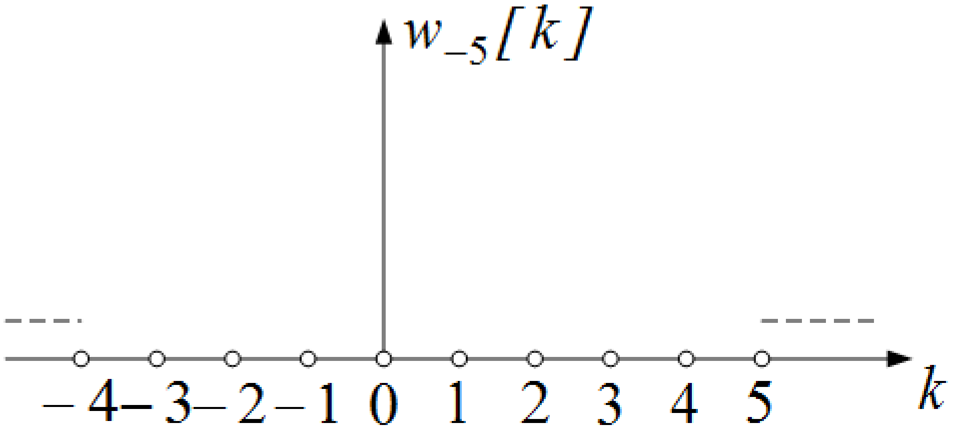
Exemplo 2.2: Resposta ao Impulso



Exemplo 2.2: Resposta ao impulso refletida e deslocada de *n*

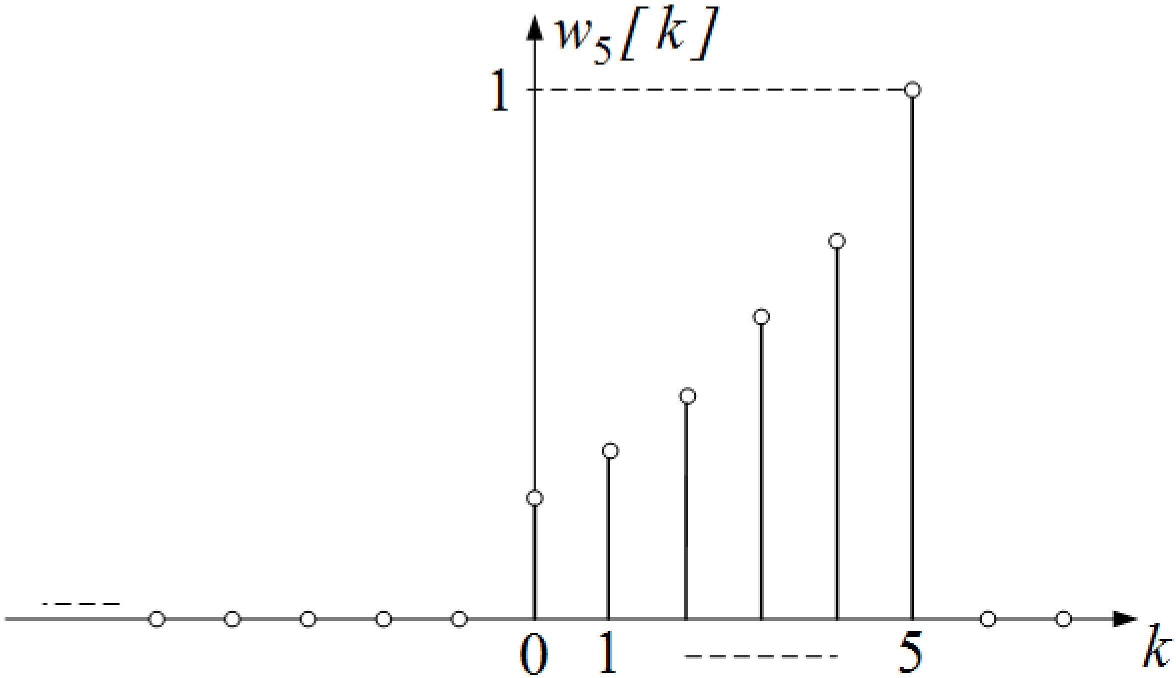


Exemplo 2.2:



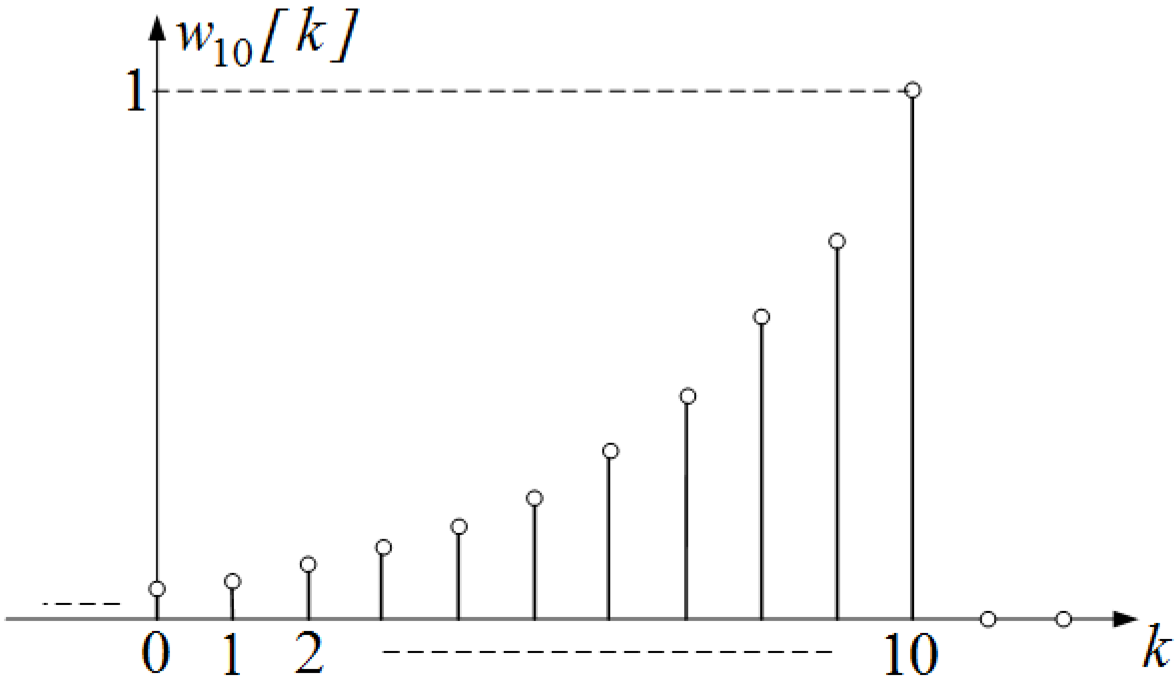
Exemplo 2.2:

$$w_5[k] = \begin{cases} \left(\frac{3}{4}\right)^{5-k}, 0 \le k \le 5 \\ 0, \textit{caso contrário} \end{cases}$$



Exemplo 2.2:

$$w_{10}[k] = \begin{cases} \left(\dfrac{3}{4}\right)^{10-k}, & 0 \le k \le 10 \\ 0, & caso\ contrário \end{cases}$$



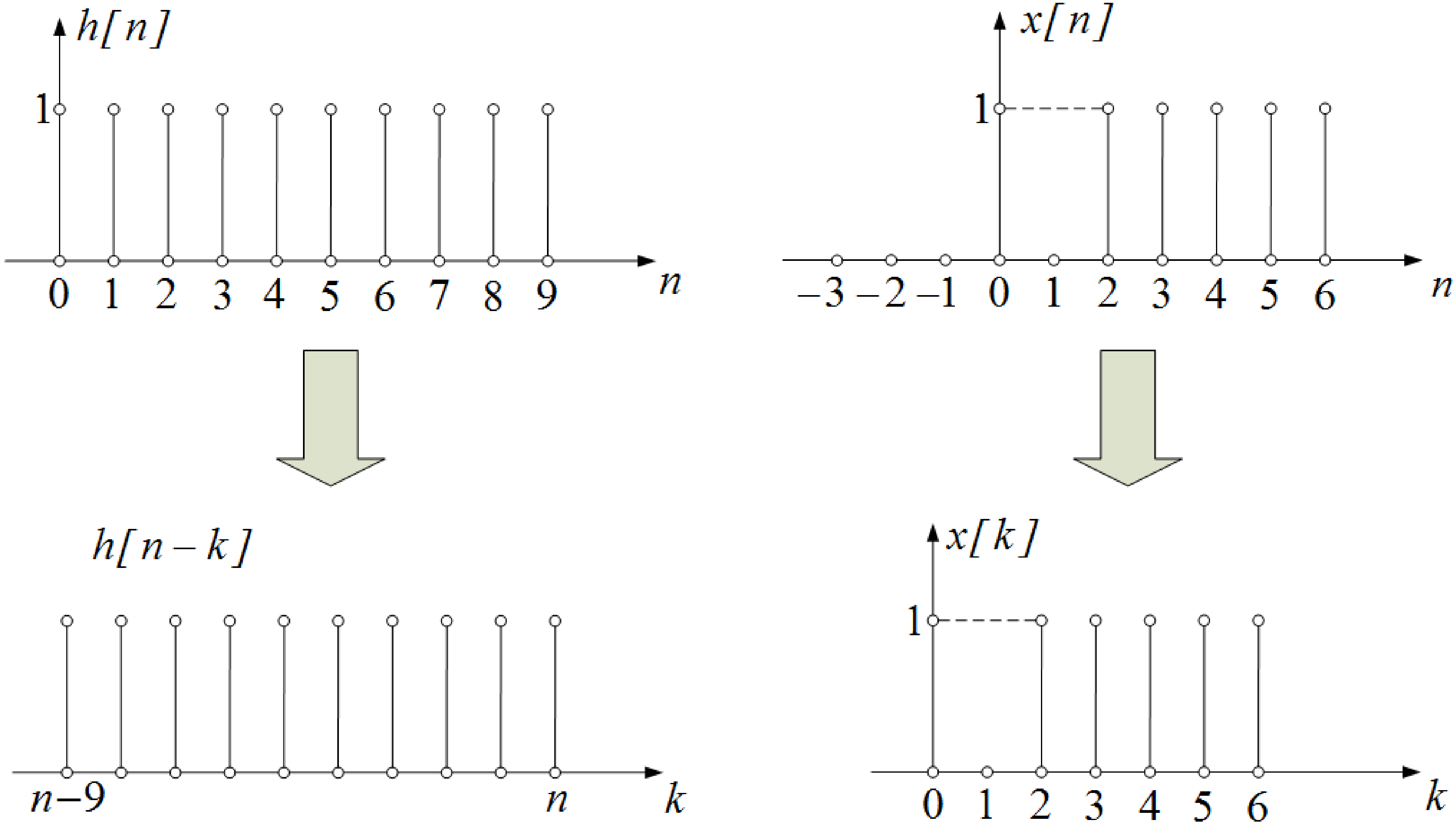
Exemplo 2.3

Considere um sistema *LTI* com a seguinte resposta ao impulso:

$$h[n] = u[n] - u[n-10]$$

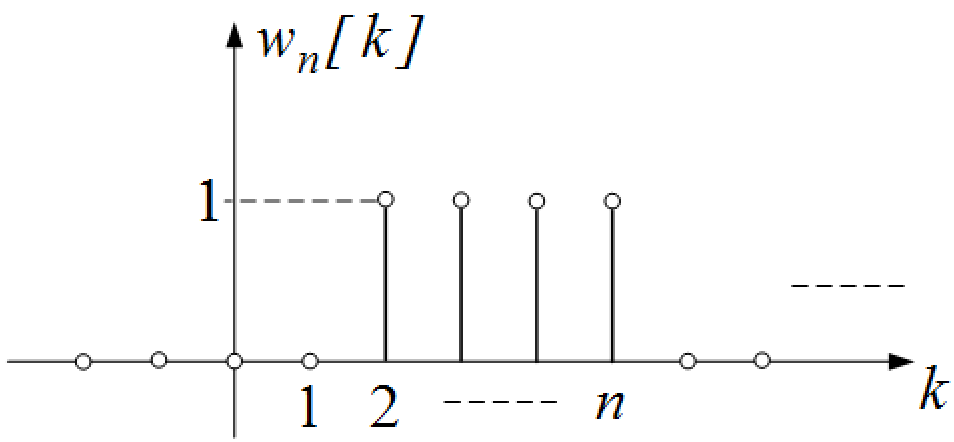
Determinar a saída do sistema *y[n]* quando o sinal de entrada for um pulso retangular definido por:

$$x[n] = u[n-2] - u[n-7]$$


h[n]
1
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
n
x[n]
1
−3 −2 −1 0 1 2 3 4 5 6
n
h[n − k]
n−9
n
k
x[k]
1
0 1 2 3 4 5 6
k

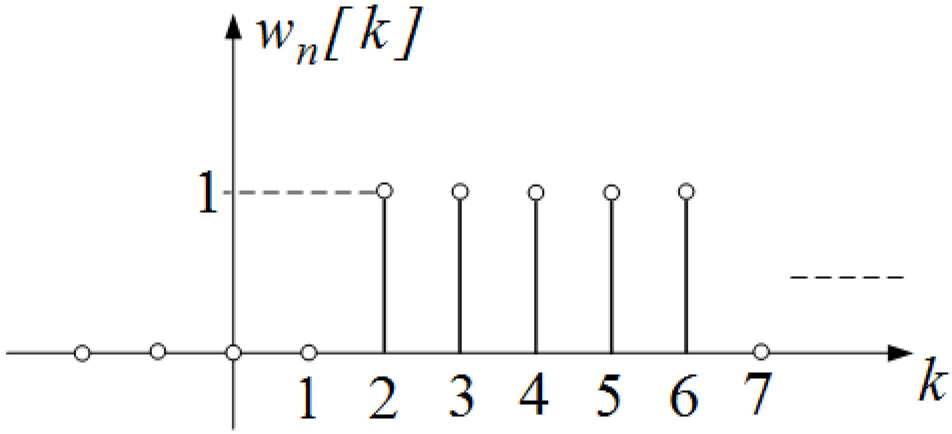
$$2 \leq n \leq 6$$

$$w_n[k] = \begin{cases} 1, & 2 \leq k \leq n \\ 0, & caso\ contrário \end{cases} \Rightarrow y[n] = \sum_{k=2}^{n} 1 = n - 1$$



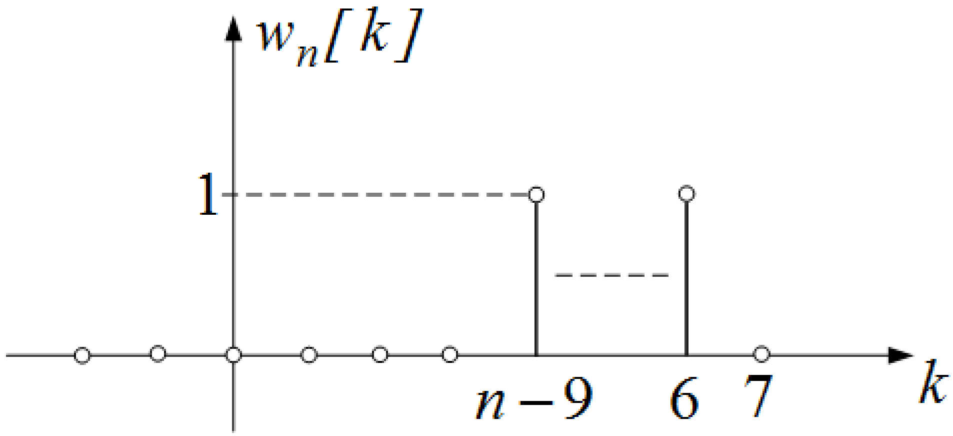
$$6 < n \leq 11$$

$$w_n[k] = \begin{cases} 1, & 2 \leq k \leq 6 \\ 0, & caso\ contrário \end{cases} \Rightarrow y[n] = \sum_{k=2}^{6} 1 = 5$$



$$11 < n \leq 15$$

$$w_n[k] = \begin{cases} 1, & n-9 \leq k \leq 6 \\ 0, & caso\ contrário \end{cases} \Rightarrow y[n] = \sum_{k=n-9}^{6} 1 = 16 - n$$



Resposta completa da variável *y[n]*