Integral de Convolução

De forma similar à Soma de Convolução para o caso dos sistemas de tempo discreto, a Integral de Convolução descreve o sinal de saída de um sistema *LTI* como a superposição ponderada das respostas ao impulso deslocadas no tempo.

Integral de Convolução

Para a Soma de Convolução o sinal de entrada foi representado na forma:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$$

Pode-se expressar o sinal de tempo contínuo de forma análoga:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau$$

Integral de Convolução

Segue portanto que

$$y(t) = H\{x(t)\} = H\left\{\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau\right\}$$

ou ainda

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) H\{\delta(t-\tau)\} d\tau$$

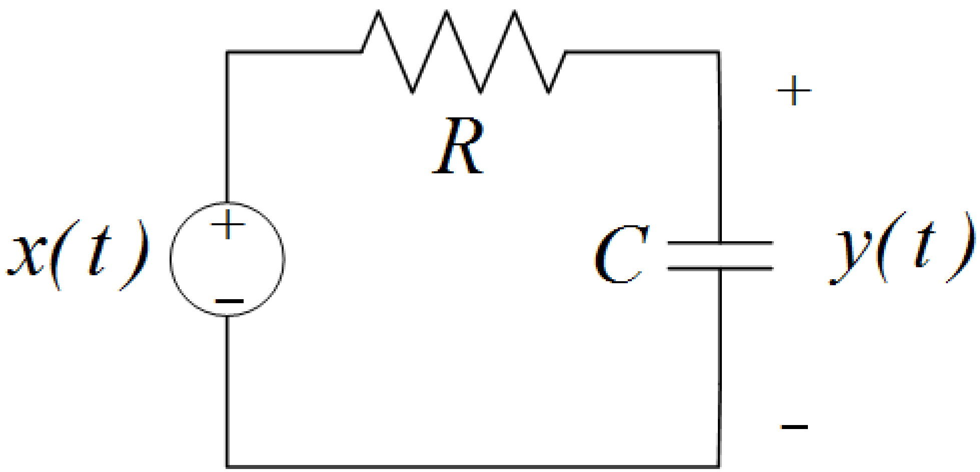
$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau$$

Integral de Convolução

Onde $H\{\delta(t-\tau)\} = h(t-\tau)$ é a resposta do sistema a uma entrada do tipo impulso aplicado no instante t=τ. A operação de convolução também pode ser representada na forma

$$x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

Exemplo 2.7: Considere o circuito RC apresentado a seguir:



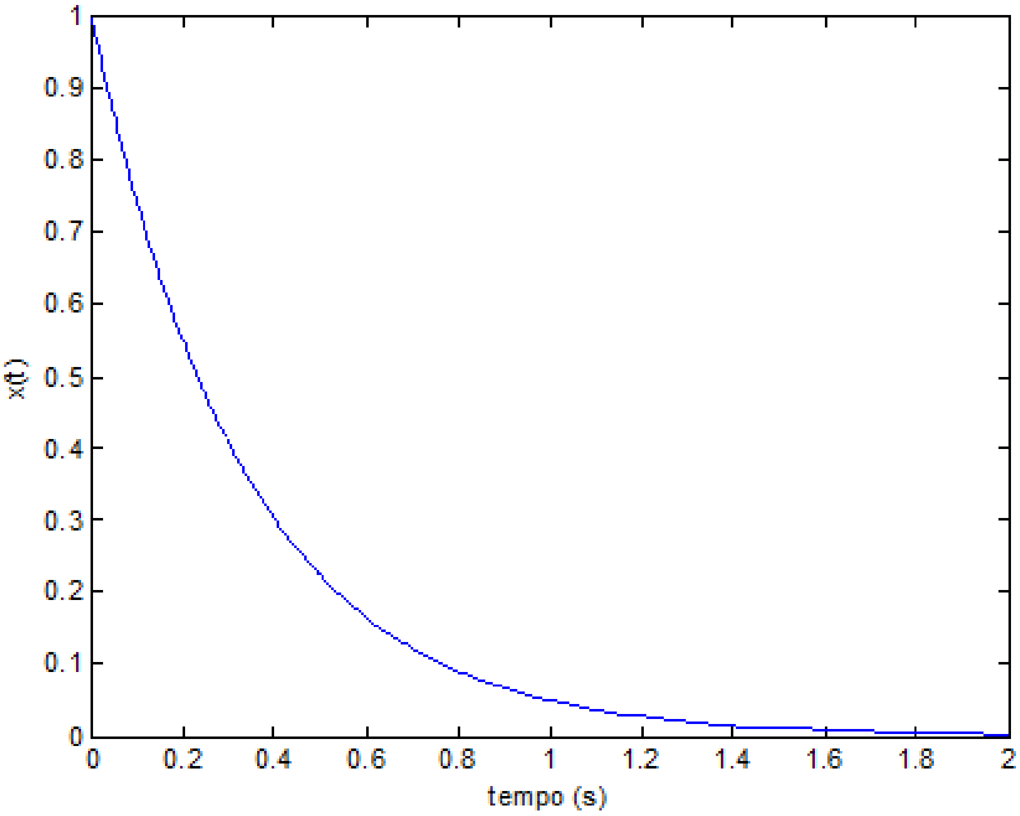
Admitindo que a constante de tempo deste circuito seja igual a 1.0 segundo, determinar a tensão *y(t)* no capacitor, resultante da aplicação de um sinal de entrada

$$x(t) = e^{-3t}(u(t) - u(t-2))$$

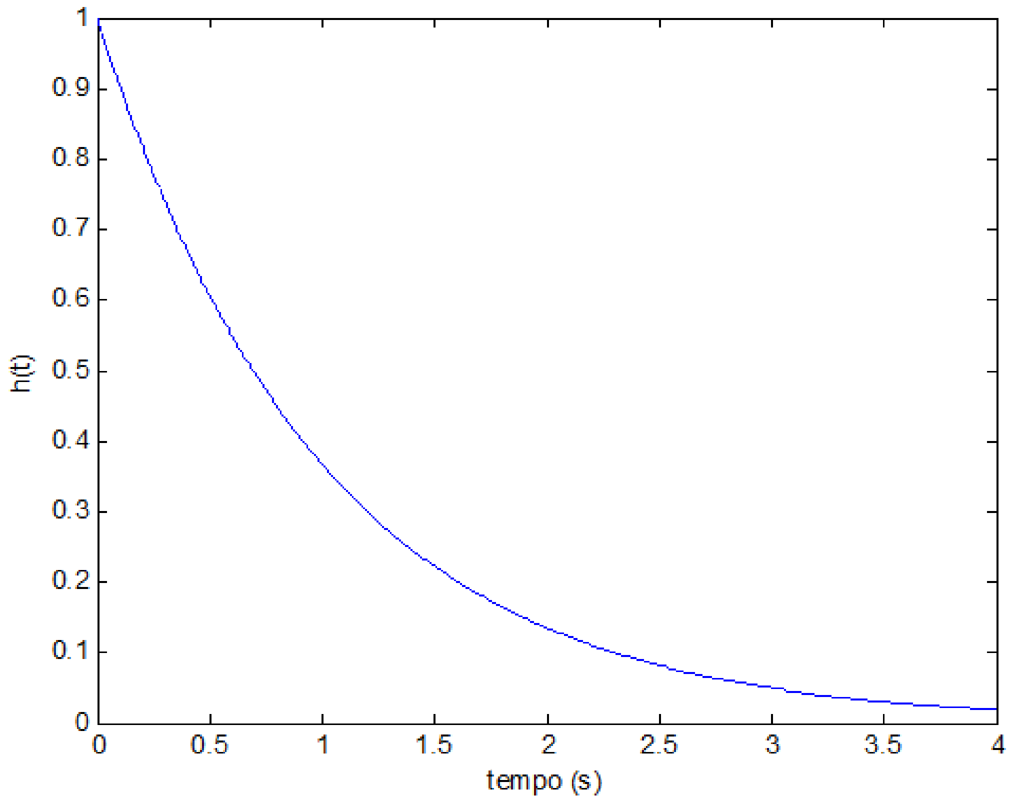
Uma vez que a constante de tempo do circuito é RC=1.0 s, tem-se

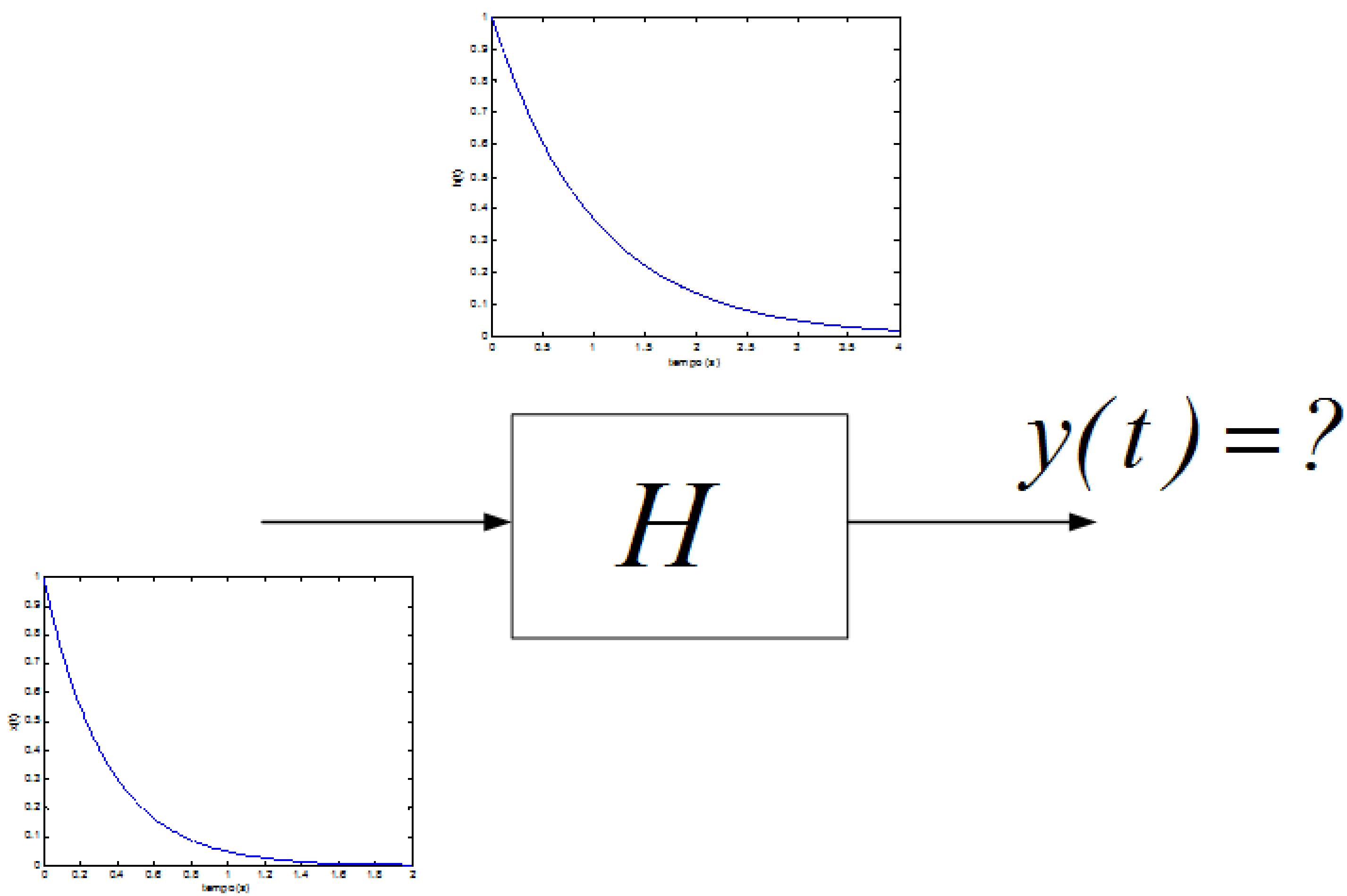
$$h(t) = e^{-t}u(t)$$

Sinal de entrada x(t)



Resposta ao impulso h(t)

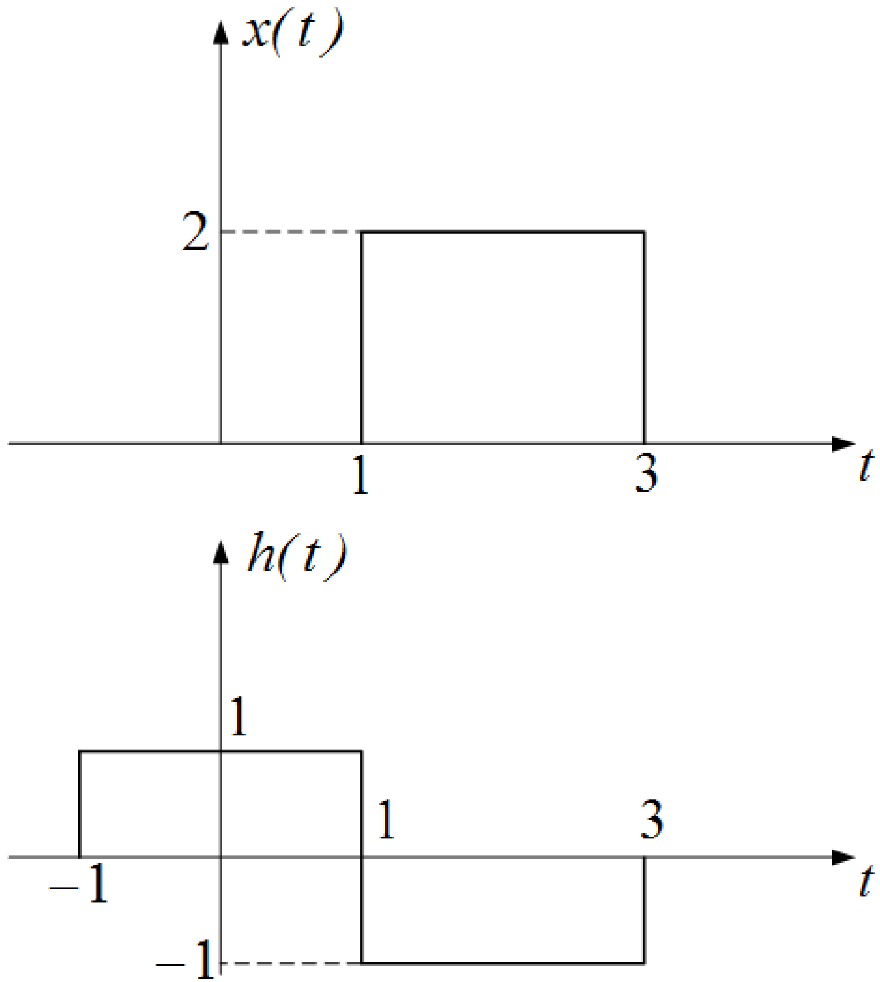


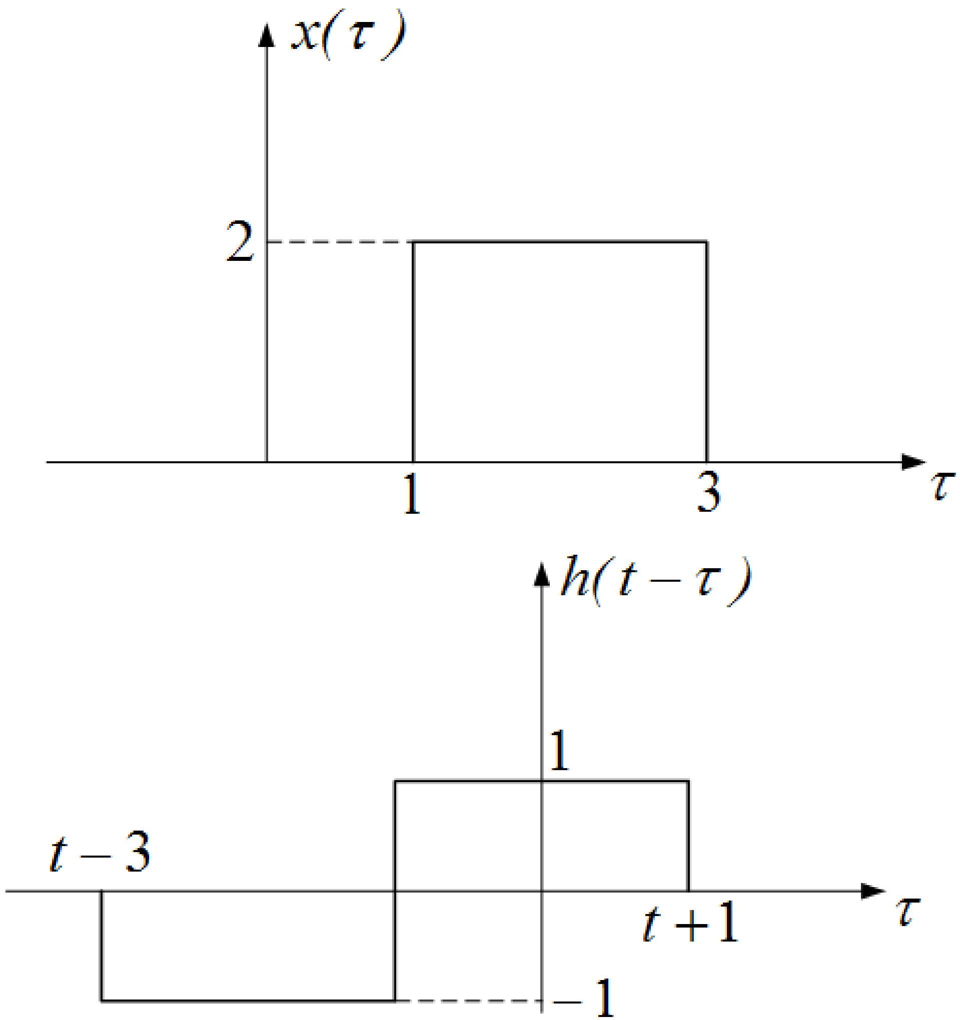

H
y(t) = ?

Exemplo 2.8: Suponha que a entrada *x(t)* e a resposta ao impulso *h(t)* de um sistema *LTI* sejam dadas por:

$$x(t) = 2u(t-1) - 2u(t-3)$$

$$h(t) = u(t+1) - 2u(t-1) + u(t-3)$$


x(t)
2
1
3
t
h(t)
1
1
3
−1
−1
t


$x(\tau)$
2
1
3
τ
$h(t-\tau)$
1
$t-3$
$t+1$
τ
-1

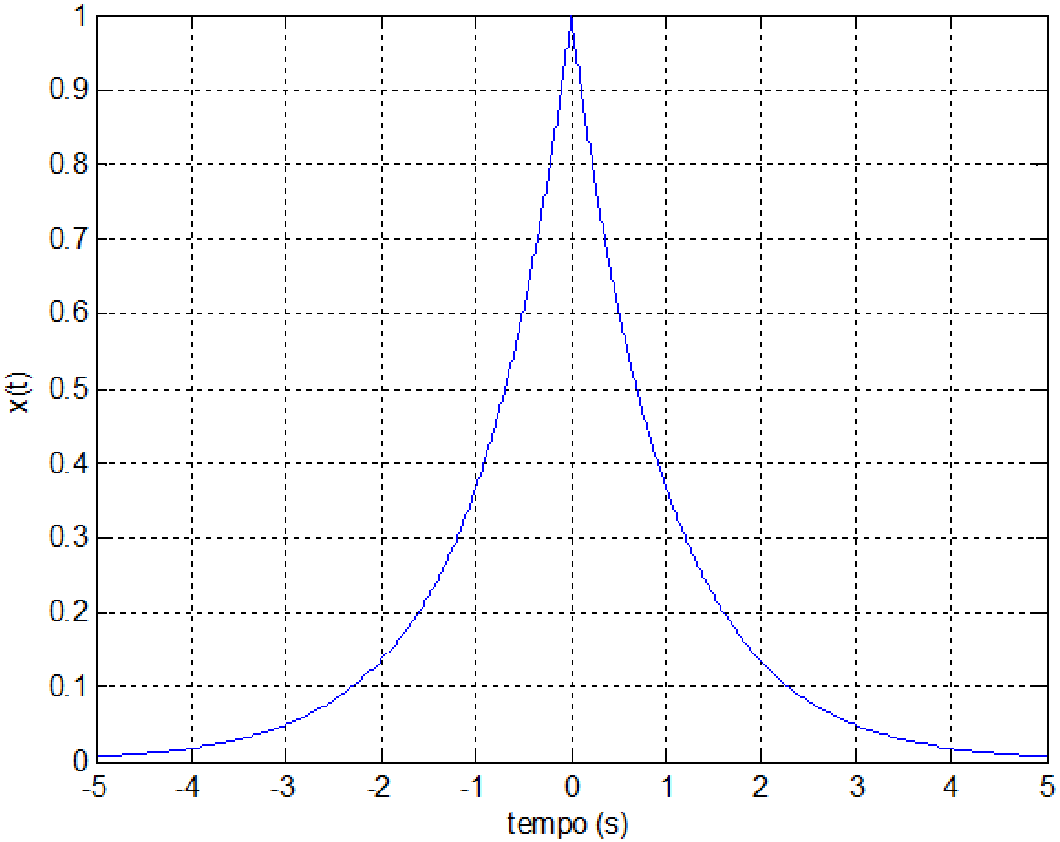
Exercício 2.4: Considere a resposta ao impulso de um dado sistema dada por

$$h(t) = e^{-2(t+1)}u(t+1)$$

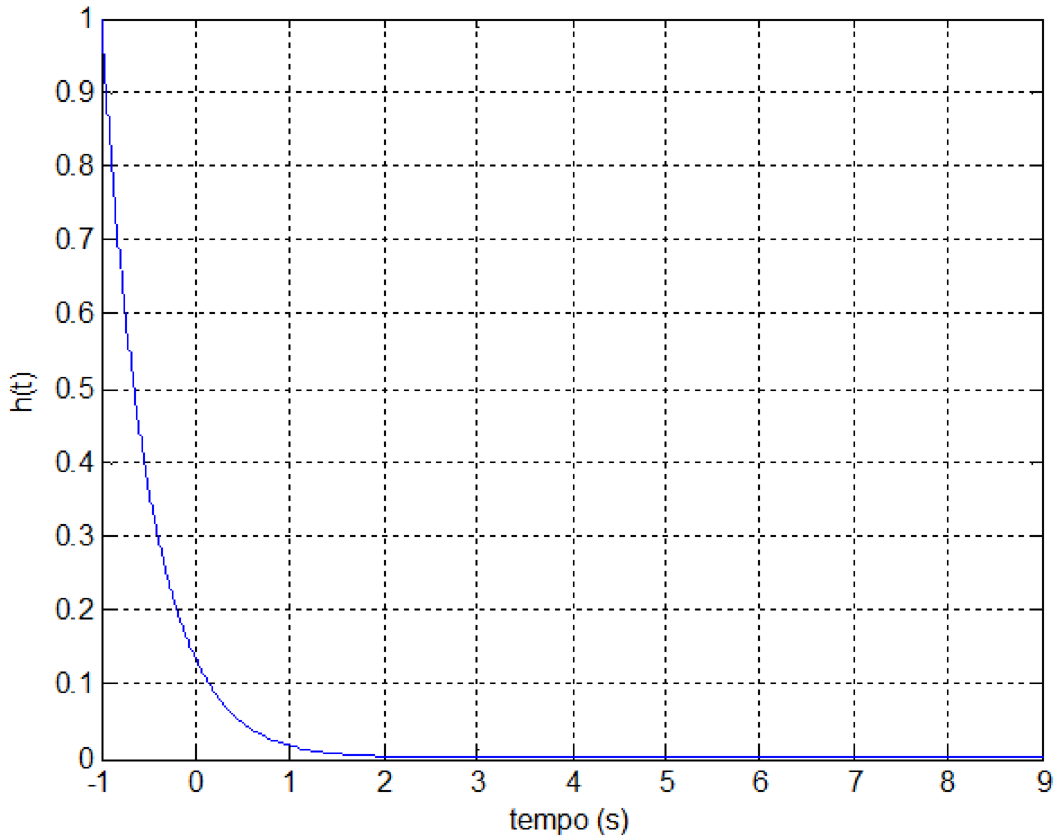
Determinar o sinal de saída do sistema, *y(t)*, para o sinal de entrada

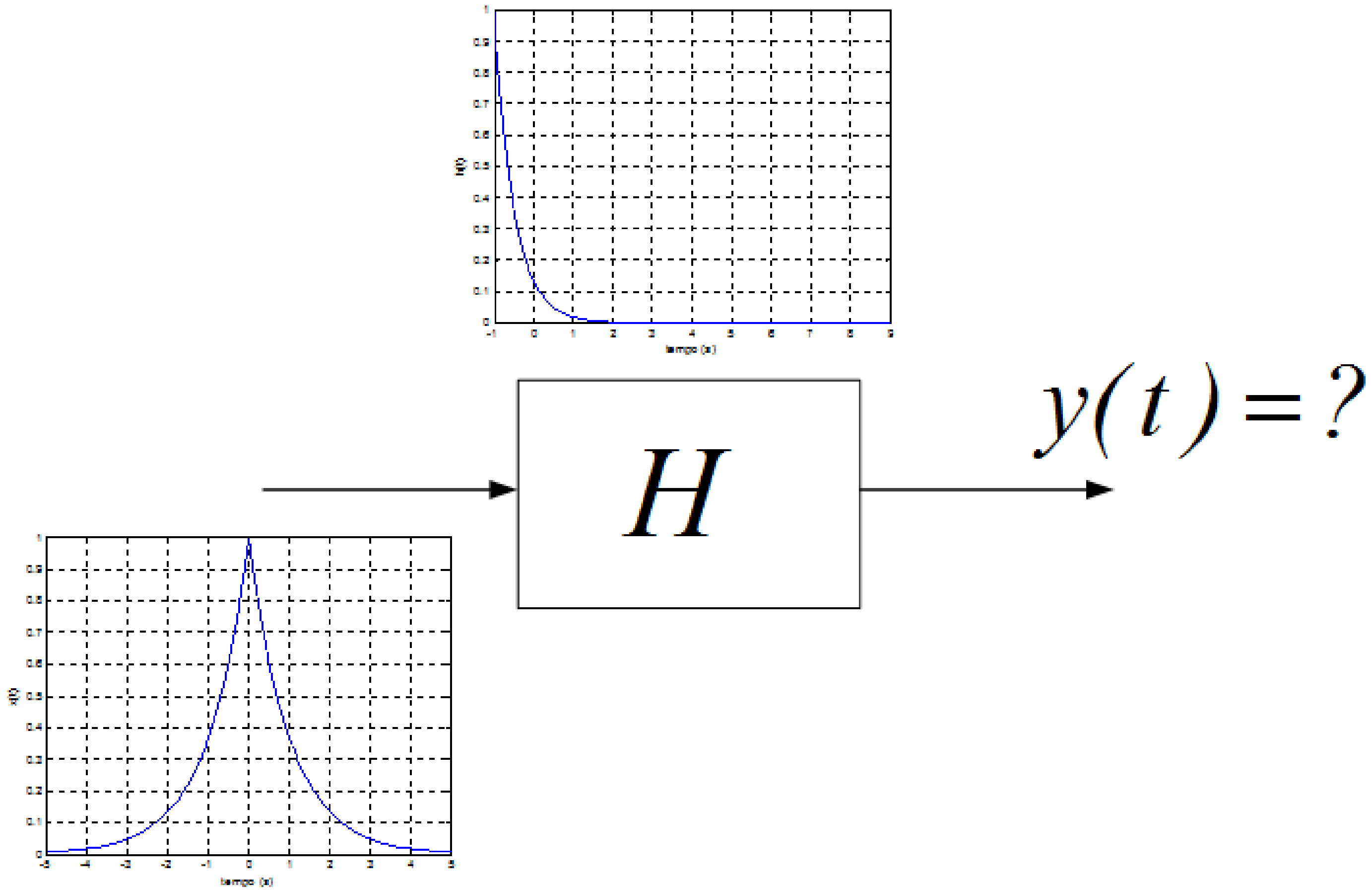
$$x(t) = e^{-|t|}$$

Sinal de entrada x(t)



Resposta ao impulso h(t)



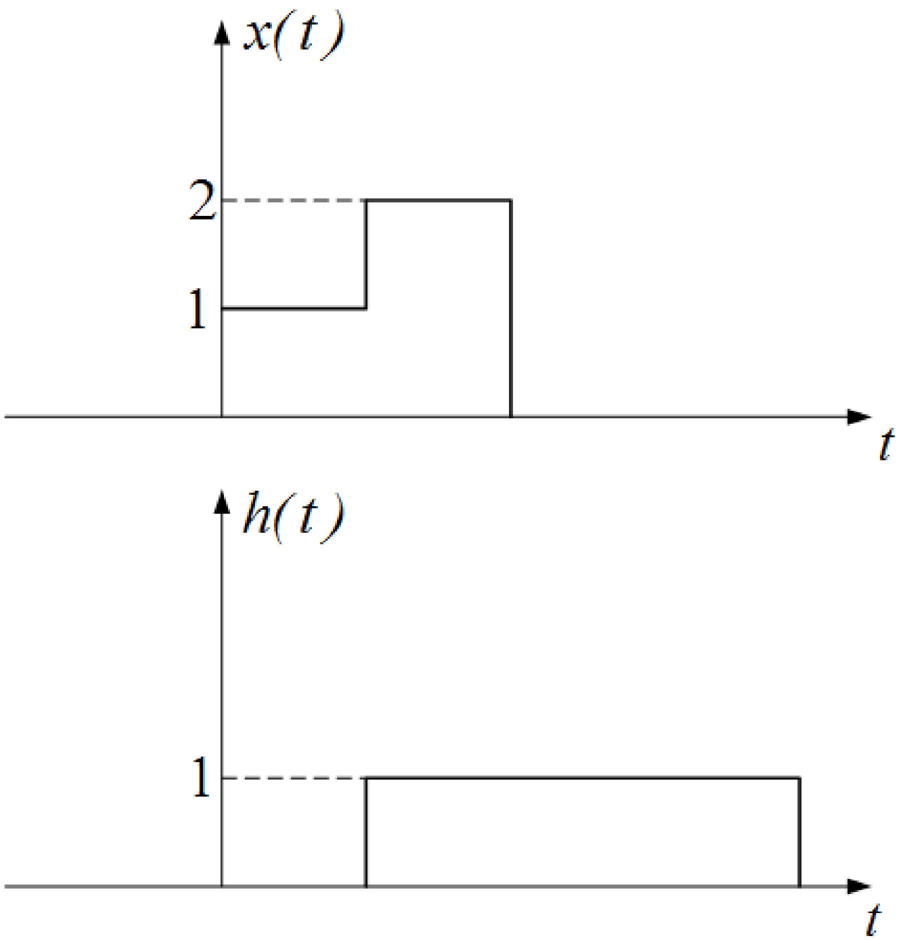

H
$y(t) = ?$

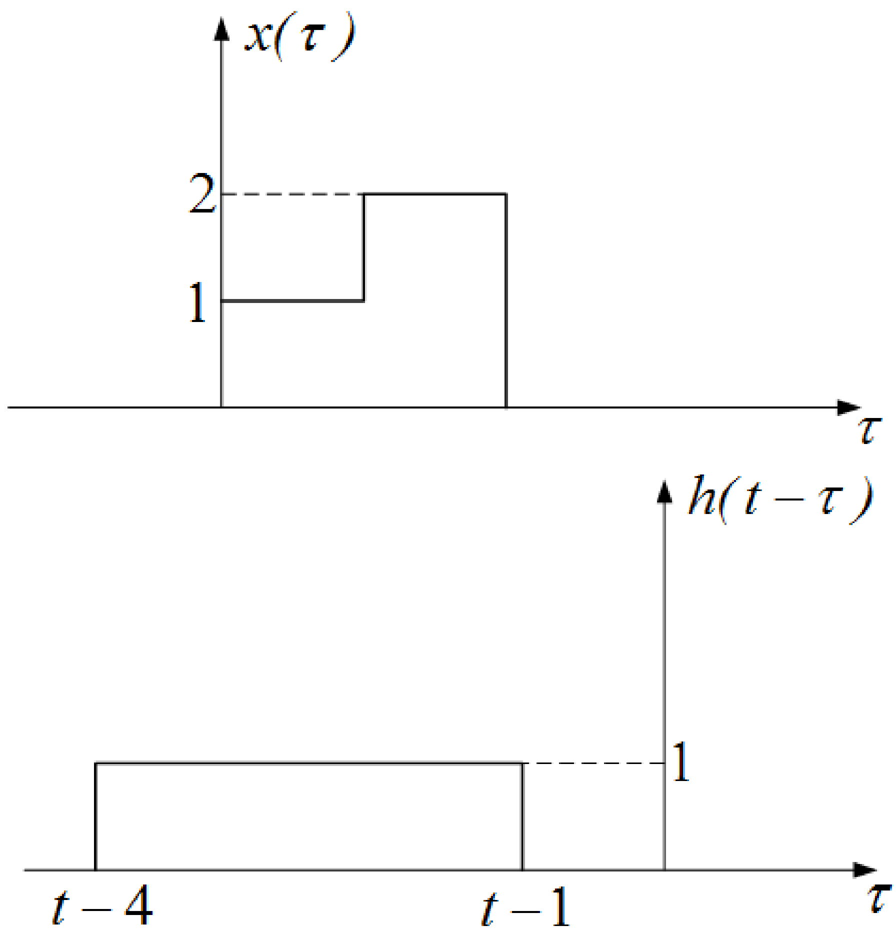
Exercício 2.5: Considere um sistema *LTI* cuja resposta ao impulso é dada por

$$h(t) = u(t-1) - u(t-4)$$

Determinar o sinal de saída do sistema *y(t)* para o sinal de entrada

$$x(t) = u(t) + u(t-1) - 2u(t-2)$$

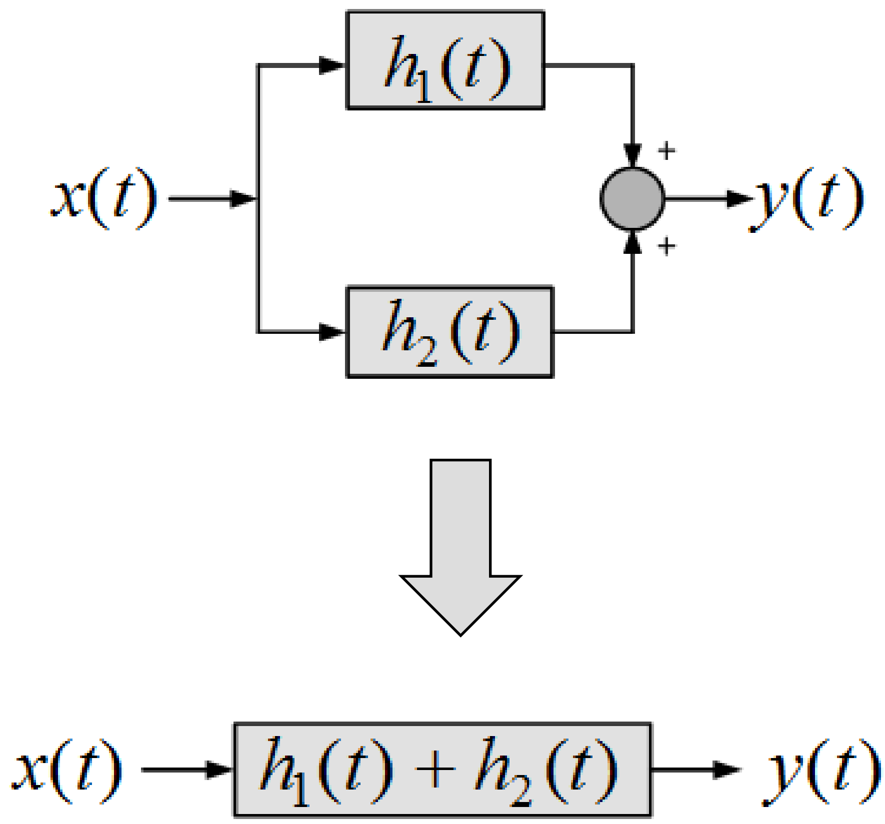

x(t)
2
1
t
h(t)
1
t


x(τ)
2
1
τ
h(t − τ)
1
t − 4
t − 1
τ

Propriedades da Representação da Resposta ao Impulso

Conexão paralela de sistemas *(prop. distributiva)*

$$
\begin{aligned}
y(t) &= y_1(t) + y_2(t) \\
&= x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t) \\
&= x(t) * (h_1(t) + h_2(t)) \\
&= x(t) * h(t)
\end{aligned}
$$

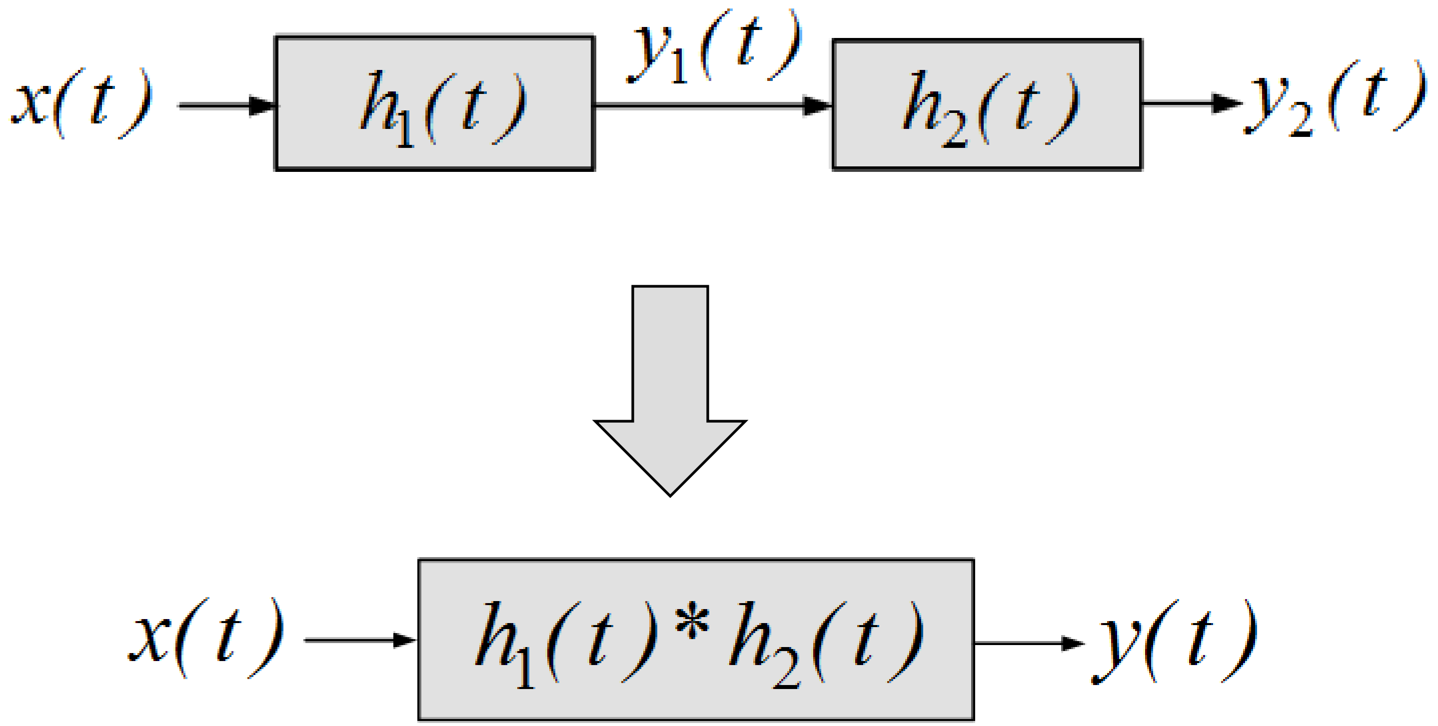

$h_1(t)$
$x(t)$
+
$y(t)$
+
$h_2(t)$
$x(t)$
$h_1(t) + h_2(t)$
$y(t)$

Propriedades da Representação da Resposta ao Impulso

Conexão série de sistemas *(prop. associativa)*

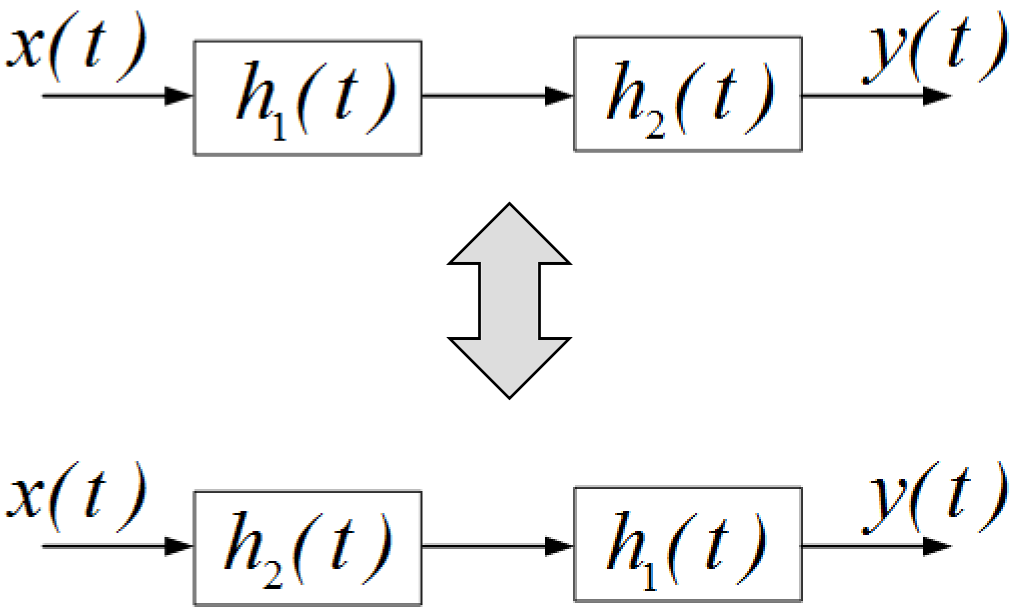
$$y_1(t) = x(t) * h_1(t) \qquad\qquad y_2(t) = y_1(t) * h_2(t)$$

$$\begin{aligned} y_2(t) &= \{x(t) * h_1(t)\} * h_2(t) \\ &= x(t) * \{h_1(t) * h_2(t)\} \end{aligned}$$


$x(t)$
$h_1(t)$
$y_1(t)$
$h_2(t)$
$y_2(t)$
$x(t)$
$h_1(t) * h_2(t)$
$y(t)$

Propriedade comutativa

$$h_1(t) * h_2(t) = h_2(t) * h_1(t)$$



Sistemas sem memória

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\,x[n-k]$$

$$h[k] = 0 \;\forall\; k \neq 0$$

Sistemas discretos $h[n] = c\delta[n]$

Sistemas contínuos $h(\tau) = c\delta(\tau)$

Sistemas causais

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] \qquad \forall\, k<0 \Rightarrow h[k]=0$$

Sistemas discretos $$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]x[n-k]$$

Sistemas contínuos $$y(t) = \int_{0}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

Sistemas BIBO-estáveis

$$\left|x[n]\right| \leq M_x < \infty \;\Rightarrow\; \left|y[n]\right| \leq M_y < \infty$$

$$\left|y[n]\right| = \left|h[n] * x[n]\right| = \left|\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\,x[n-k]\right|$$

$$\left|y[n]\right| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left|h[k]\right| \left|x[n-k]\right| \leq M_x \sum_{k-\infty}^{\infty} \left|h[k]\right|$$

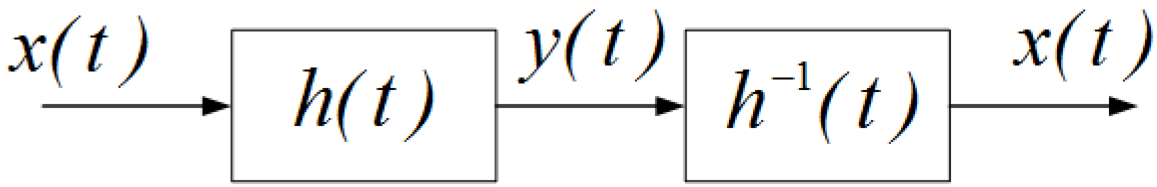
Sistemas BIBO-estáveis

$$\left| y[n] \right| < \infty \Rightarrow \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| h[k] \right| < \infty \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \left| h(\tau) \right| d\tau < \infty \end{cases}$$

Caso discreto: h[k] absolutamente somável

Caso contínuo: h(t) absolutamente integrável

Sistemas invertíveis e desconvolução



$$\{x(t) * h(t)\} * h^{-1}(t) = x(t)$$

$$x(t) * \{h(t) * h^{-1}(t)\} = x(t)$$

Caso discreto $\quad h[n]h^{-1}[n] = \delta[n]$

Caso contínuo $\quad h(t)h^{-1}(t) = \delta(t)$