Resposta Forçada

É a solução da equação diferencial ou de diferenças correspondente a uma dada entrada, supondo condições iniciais nulas. Consiste na soma de dois termos: um termo que tem a mesma forma da resposta natural e um outro termo associado à solução particular, $y^{(p)}(t)$ ou $y^{(p)}[n]$.

Resposta Forçada

Normalmente a solução particular é obtida admitindo que a saída do sistema apresenta a mesma forma geral que a entrada.

$$x[n] = \alpha^n \;\Rightarrow\; y^{(p)}[n] = c\alpha^n$$

$$x[n] = A\cos(\Omega n + \phi)$$

$$\Downarrow$$

$$y^{(p)}[n] = c_1 \cos(\Omega n) + c_2\, sen(\Omega n)$$

Resposta Forçada

Tabela com sinais de entrada normalmente utilizados.

Tempo Contínuo	
Entrada	*Solução Particular*
1	c
e^{-at}	$c\,e^{-at}$
$cos(\omega t+\phi)$	$c_1\,cos(\omega t)+c_2\,sen(\omega t)$

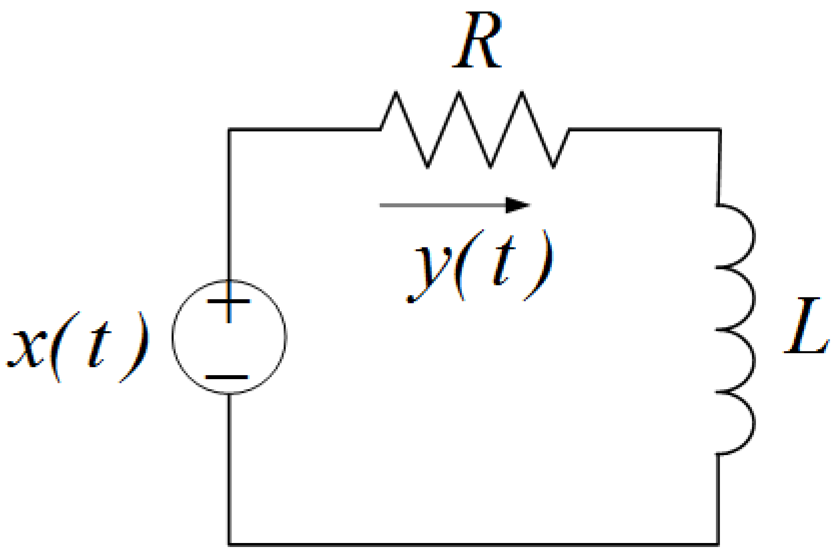
Resposta Forçada

Tabela com sinais de entrada normalmente utilizados.

Tempo Discreto	
Entrada	*Solução Particular*
1	c
α^n	$c\,\alpha^n$
$cos(\Omega n+\phi)$	$c_1\,cos(\Omega n)+c_2\,sen(\Omega n)$

Exemplo 2.18:

Considere o circuito *RL* apresentado a seguir, com



$$x(t) = cos(\omega_0 t)\, V$$

Determinar a solução particular.

Exemplo 2.19:

Para o circuito *RL* apresentado no exemplo anterior, determinar a resposta forçada para uma entrada

$$x(t) = cos(t)\,V$$

supondo $R=1\Omega$ e $L=1H$.

$$y^{(f)}(t) = y^{(nf)}(t) + y^{(p)}(t)$$

Exercício 2.12:

Considere um sistema descrito pela seguinte equação de diferenças

$$y[n]-\frac{1}{4}y[n-2]=2x[n]+x[n-1]$$

sendo *x[n]=u[n]*. Determinar a resposta forçada

$$y^{(f)}[n]=y^{(nf)}[n]+y^{(p)}[n]$$

Resposta Completa

É a resposta do sistema obtida através da soma das respostas naturais e forçada, considerando condições iniciais quaisquer. O procedimento para obtenção da resposta é idêntico ao da obtenção da resposta forçada.

Exemplo 2.20:

Para o circuito *RL* apresentado no exemplo anterior, determinar a resposta completa da corrente *y(t)*, admitindo

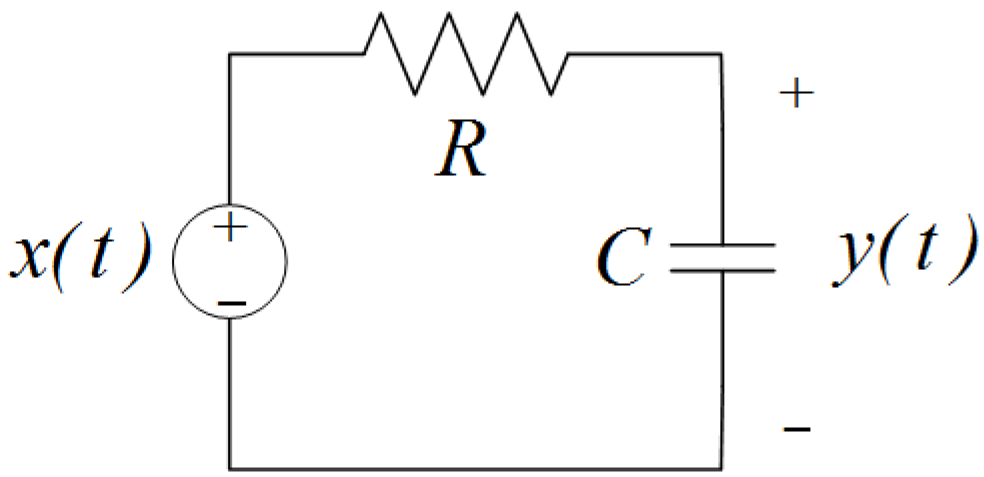
$$x(t) = cos(t)\,V$$

e *y(0)=2A*, supondo *R=1Ω* e *L=1H*.

Exercício 2.13:

Considere o circuito *RC* apresentado a seguir, com $x(t)=u(t)$ e $y(0)=-1$ volt.

Determinar a solução completa para a tensão no capacitor $y(t)$.



Resposta ao Impulso

Dado um sistema contínuo com resposta ao degrau *s(t)*, a resposta ao impulso *h(t)* é obtida fazendo-se

$$h(t) = \frac{d}{dt} s(t) \quad .$$

Resposta ao Impulso

Para o caso discreto, admitindo a resposta ao degrau *s[n]*, obtém-se a resposta ao impulso

$$h[n] = s[n] - s[n-1] \ .$$

Observa-se então, tanto para o caso contínuo quanto para o caso discreto, que na resposta ao impulso permanecem apenas os termos associados à resposta natural do sistema.

Característica dos Sistemas *LTI* Descritos por Equações Diferenciais e de Diferenças

Linearidade com relação à entrada *(resposta forçada)*:

$y_1^{(f)}$ resposta forçada devido à entrada x_1

$y_2^{(f)}$ resposta forçada devido à entrada x_2

então $\alpha\, x_1 + \beta\, x_2 \;\Rightarrow\; \alpha\, y_1^{(f)} + \beta\, y_2^{(f)}$.

Característica dos Sistemas *LTI* Descritos por Equações Diferenciais e de Diferenças

Linearidade com relação às condições iniciais *(resposta natural)*:

$y_1^{(n)}$ resposta natural associada à condição inicial I_1

$y_2^{(n)}$ resposta natural associada à condição inicial I_2

então $\alpha\, I_1 + \beta\, I_2 \;\Rightarrow\; \alpha\, y_1^{(n)} + \beta\, y_2^{(n)}$.

Característica dos Sistemas *LTI* Descritos por Equações Diferenciais e de Diferenças

Estabilidade *BIBO*:

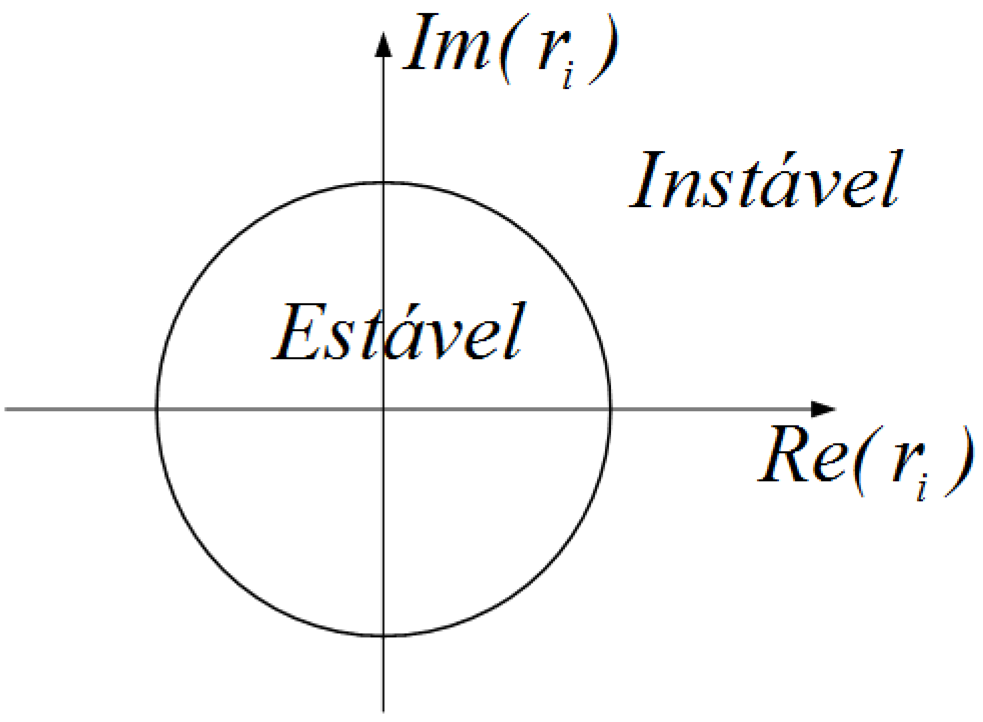
Caso de tempo discreto: $|r_i| < 1$

Caso de tempo contínuo: $|e^{r_i t}| < 1 \Rightarrow \Re\{r_i\} < 0$

Estabilidade de Sistemas Lineares Discretos:

Limite da estabilidade:

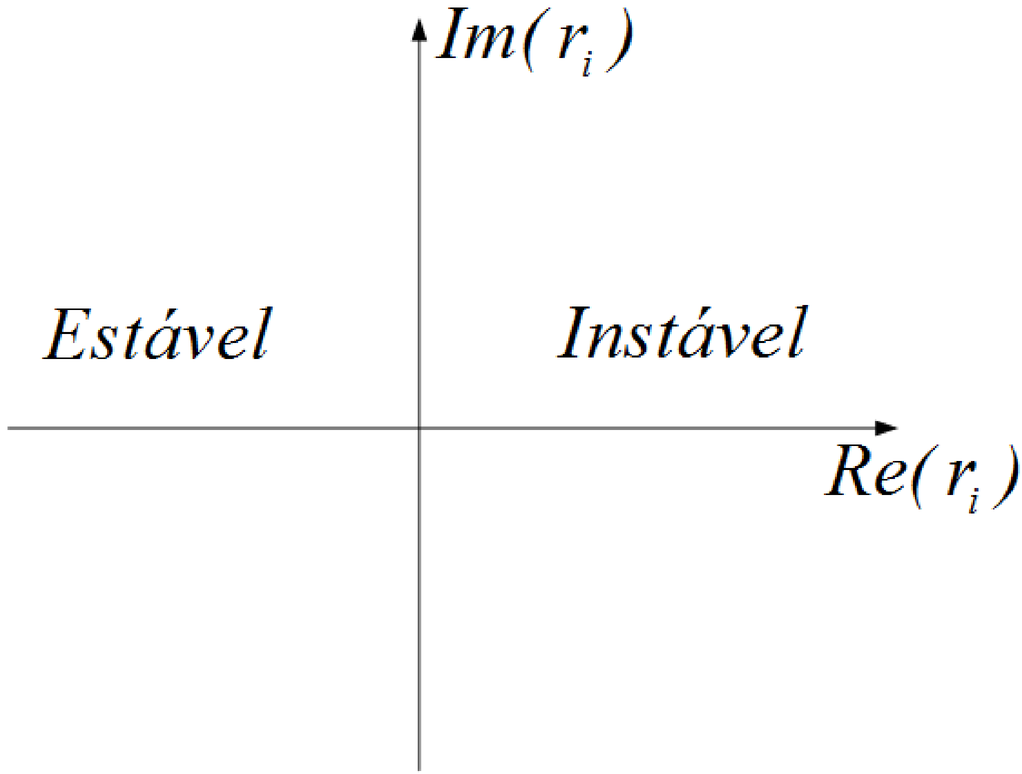
$$|r_i| = 1$$



Estabilidade de Sistemas Lineares Contínuos:

Limite da estabilidade:

$$Re\{r_i\} = 0$$



Tempo de Resposta – Sistemas *LTI* Estáveis:

Assim que a resposta natural dos sistemas *LTI* contínuos ou discretos estáveis decresce até zero, o comportamento do sistema é regido pela sua solução particular.

- Para sistemas de tempo discreto, o tempo da resposta transitória é caracterizado pela raiz r_i^d que apresentar maior módulo.
- Para sistemas de tempo contínuo, o tempo da resposta transitória é caracterizado pela raiz r_i^c que apresentar a menor parte real em módulo.

Diagramas de Blocos

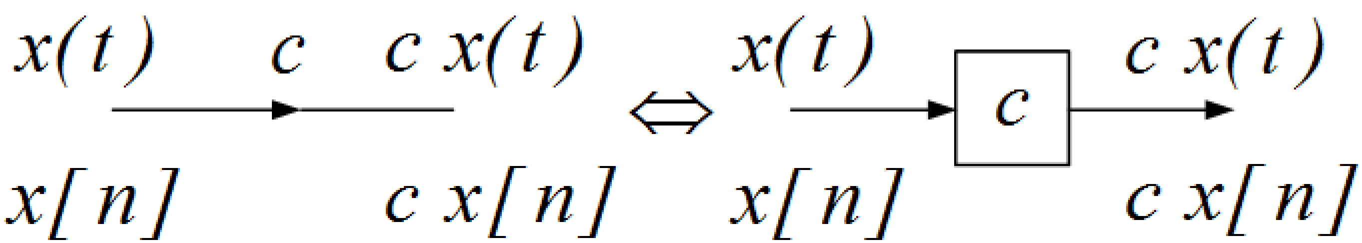
Um diagrama de blocos é uma forma de representação de sistemas através de interconexões de operações elementares que agem no sinal de entrada.

Operações Elementares

1. Multiplicação por escalar;
2. Adição;
3. Integração *(para sistemas de tempo contínuo)*;
4. Deslocamento no tempo *(para sistemas de tempo discreto)*.

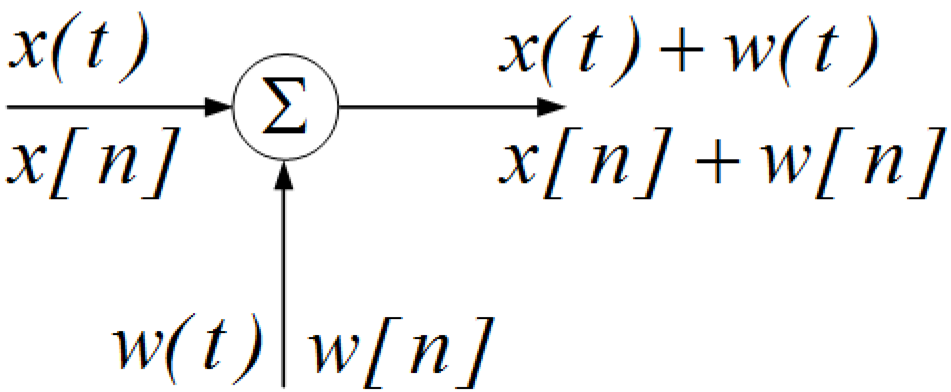
Diagramas de Blocos

1. Multiplicação por escalar:



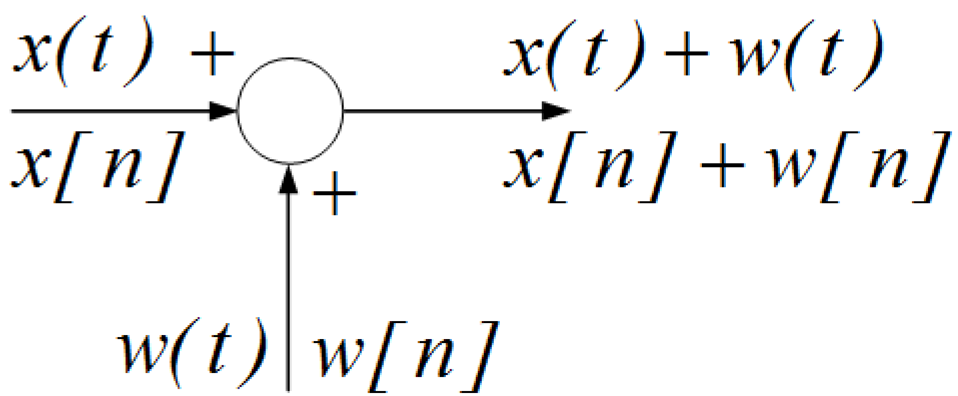
Diagramas de Blocos

2. Adição:



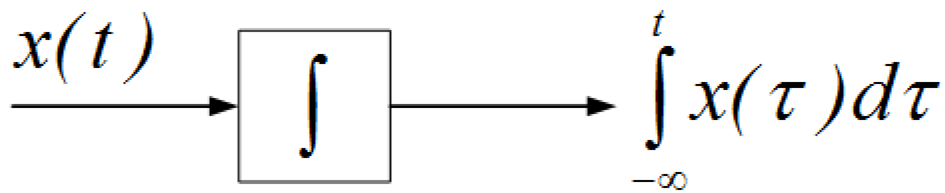
Diagramas de Blocos

2. Adição:



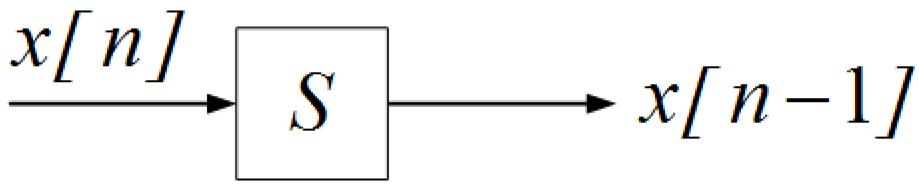
Diagramas de Blocos

3. Integração *(para sistemas de tempo contínuo)*:



Diagramas de Blocos

3. Deslocamento no tempo *(para sistemas de tempo discreto)*:



Diagramas de Blocos

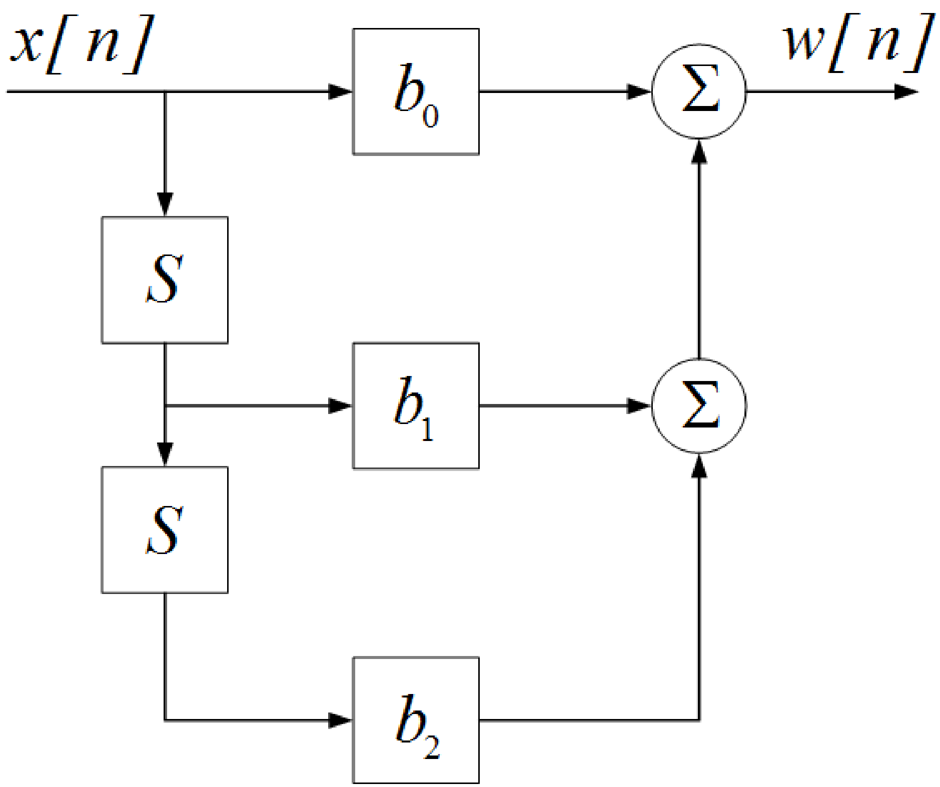
Considere o sistema descrito pela seguinte equação de diferenças:

$$y[n] + a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] =$$
$$= b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + b_2 x[n-2]$$

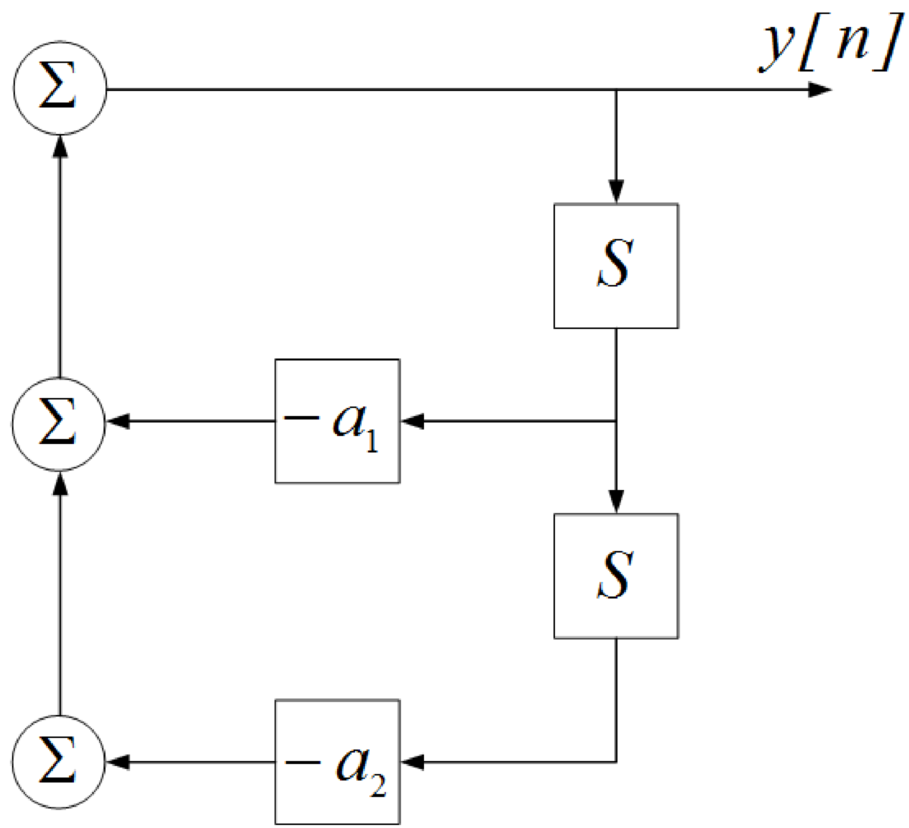
A saída *y[n]* do sistema pode ser ainda representada na forma:

$$y[n] = -a_1 y[n-1] - a_2 y[n-2] +$$
$$+ b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + b_2 x[n-2]$$

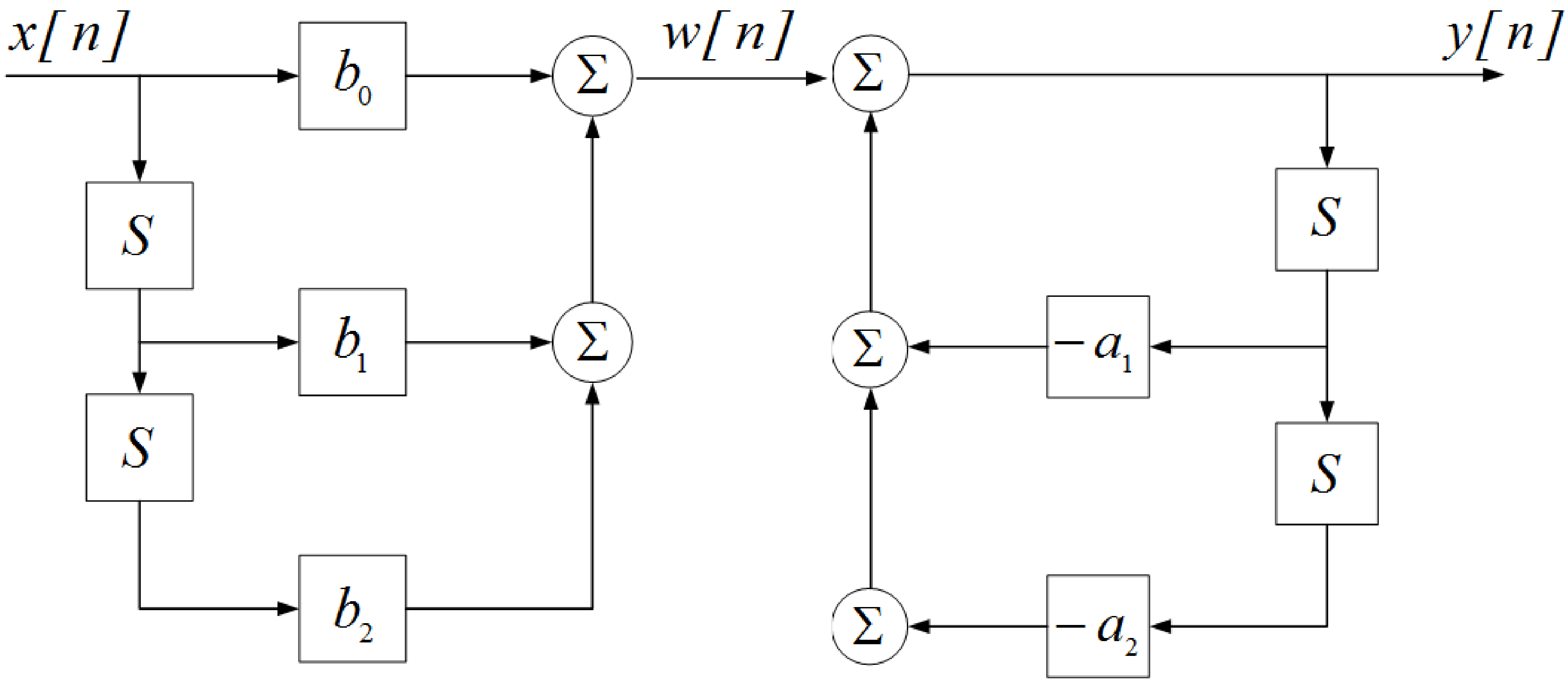
A parte relacionada à variável de entrada *x[n]* pode ser representada em nível de blocos como:



O mesmo procedimento pode ser empregado para representar em nível de blocos a parte da equação de diferenças relacionada à variável de saída:



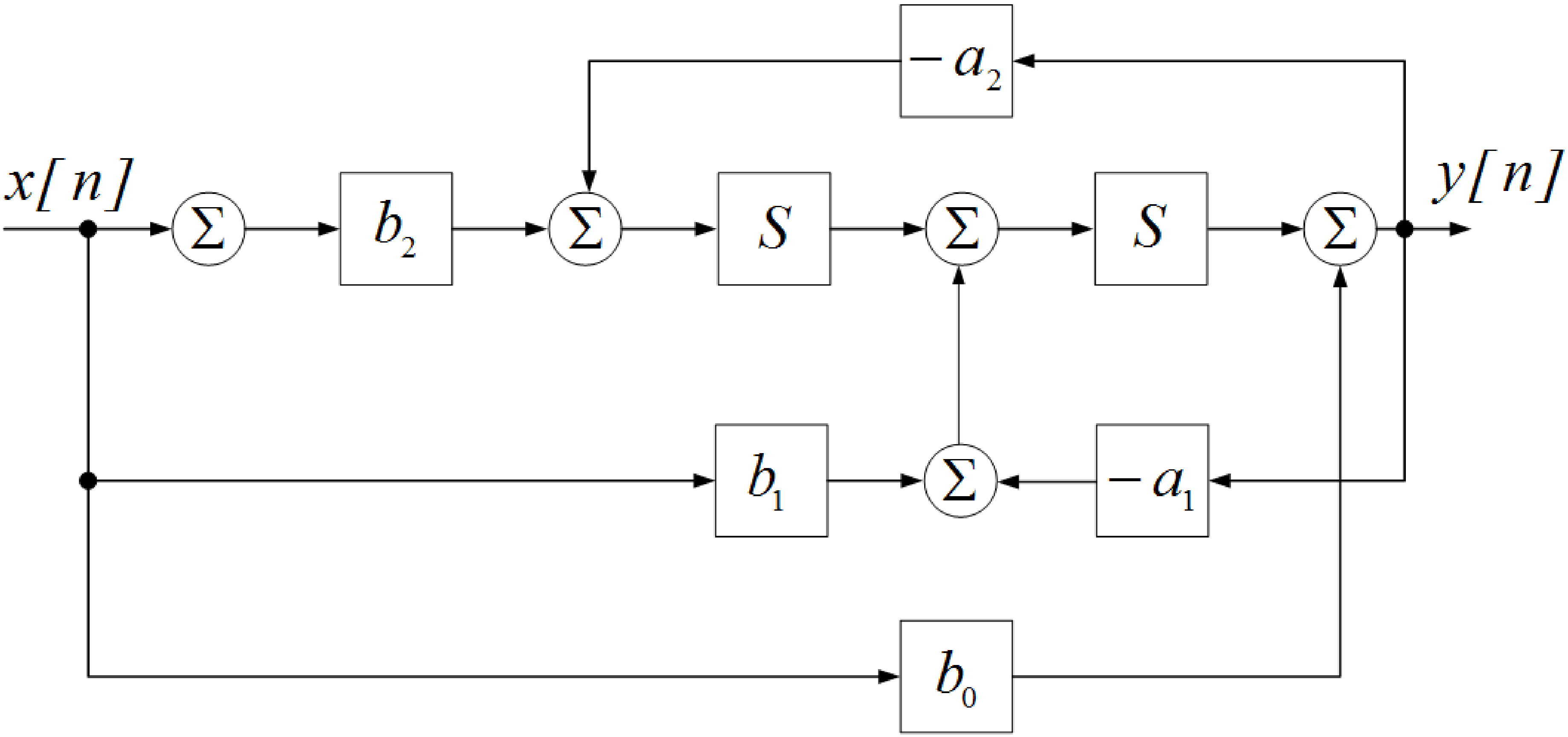
A forma final deste sistema representado através de diagrama de blocos é obtida unindo os dois diagramas anteriores, conforme apresentado a seguir:



Diagramas de Blocos

Existem outras formas de representação deste mesmo sistema em nível de blocos. O diagrama apresentado a seguir mostra a forma de realização deste mesmo sistema com apenas dois elementos de deslocamento no tempo.

Representação do sistema anterior com dois blocos de deslocamento no tempo.



Diagramas de Blocos

Exercício 2.14:

Obter a representação em diagrama de blocos do sistema descrito pela seguinte equação de diferenças:

$$y[n]+\frac{1}{2}y[n-1]-\frac{1}{3}y[n-3]=$$

$$=x[n]+2x[n-2]$$

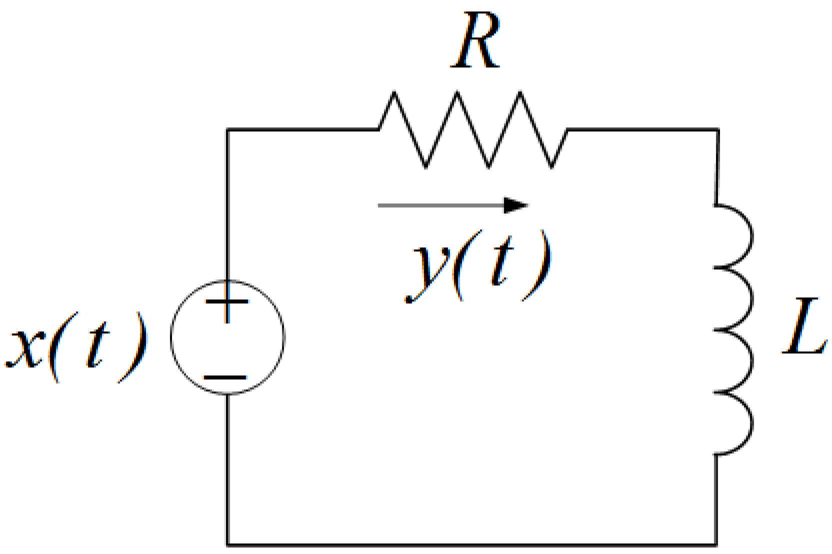
Repetir o mesmo exemplo empregando o menor número possível de elementos de deslocamento no tempo.

Diagramas de Blocos

A representação por diagramas de blocos para sistemas de tempo contínuo é análoga à apresentada para sistemas de tempo discreto, utilizando blocos de integradores no lugar dos blocos de deslocamento no tempo.

Diagramas de Blocos

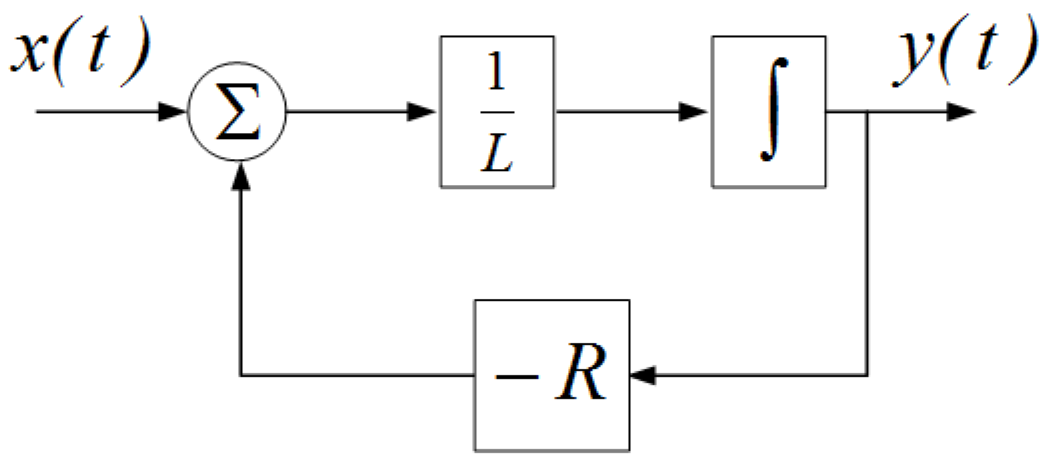
Considere o circuito *RL* apresentado a seguir:



$$x(t) = Ry(t) + L\frac{dy(t)}{dt}$$

Diagramas de Blocos

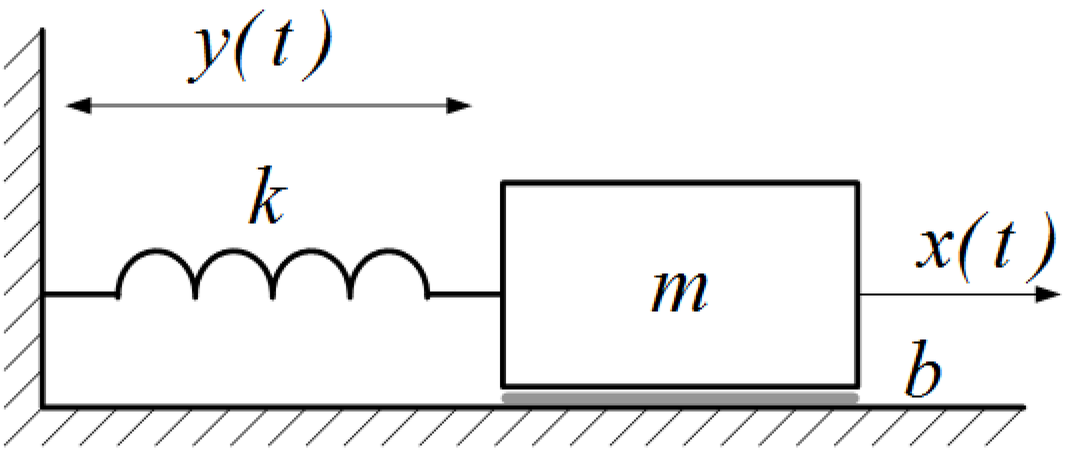
Que pode ser representado pelo seguinte diagrama de blocos:



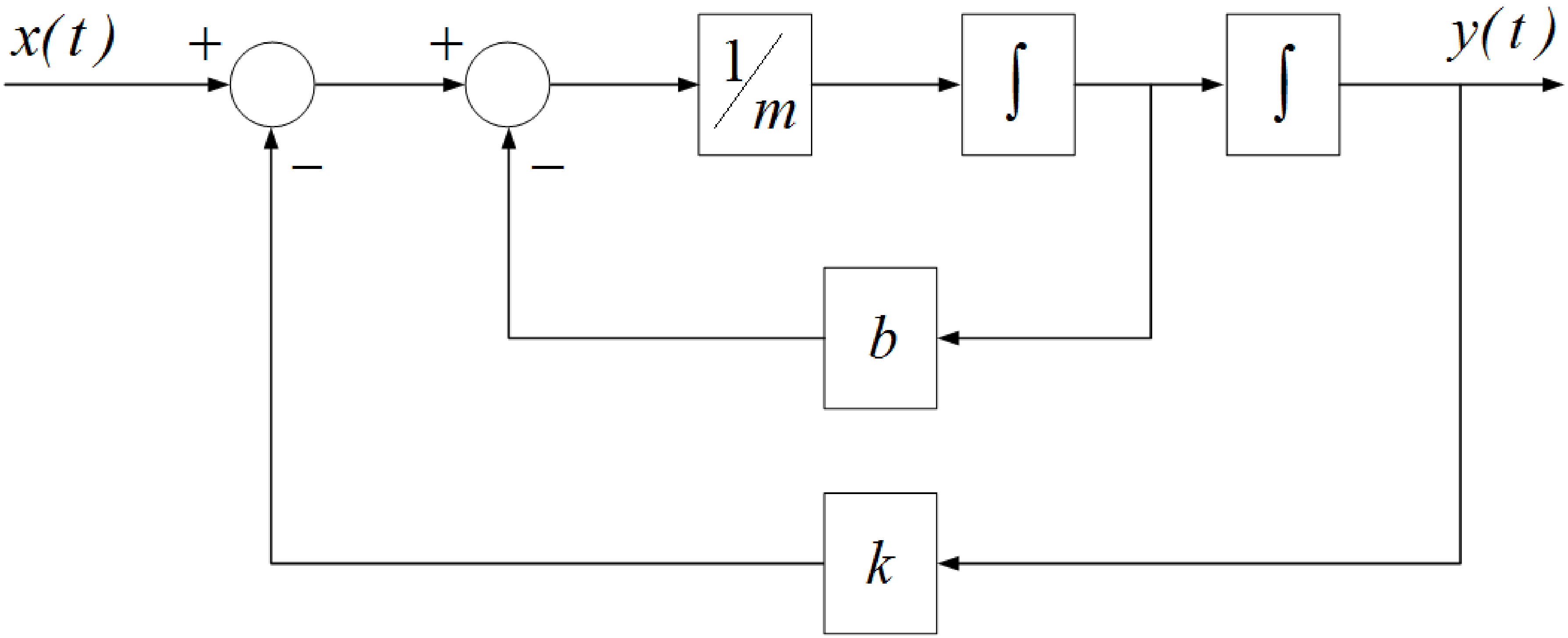
Diagramas de Blocos

Considere o sistema massa, mola e amortecedor apresentado a seguir. Faça a sua representação por diagrama de blocos.

x(t) = força *(entrada)*
y(t) = deslocamento *(saída)*



$$x(t) = m\frac{d^2y(t)}{dt^2} + b\frac{dy(t)}{dt} + ky(t)$$



Diagramas de Blocos

Exercício: Obter a representação por diagrama de blocos do circuito *RLC* série, considerando como entrada uma fonte de tensão *x(t)* e como sinal de saída a corrente *y(t)* do circuito.