Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Departamento de Engenharia Elétrica

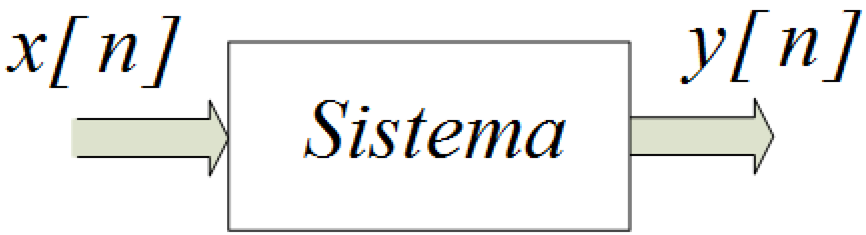
Descrição de Sistemas LTI por Variáveis de Estado

Os estados de um sistema podem ser definidos como o conjunto mínimo de sinais que descrevem o comportamento dinâmico do sistema. Sendo assim, dado o valor dos estados em um instante n_0 (ou t_0) e a entrada para $n \geq n_0$ (ou $t \geq t_0$), pode-se determinar os valores de todos os estados para $n \geq n_0$ (ou $t \geq t_0$).

Descrição de Sistemas LTI por Variáveis de Estado

A descrição por variáveis de estado para um sistema *LTI* consiste em uma série de equações diferenciais ou de diferenças de primeira ordem que descrevem como os estados do sistema e a entrada se relacionam, e uma equação que descreve a saída do sistema como função das variáveis de estado e de entrada do sistema no instante atual.

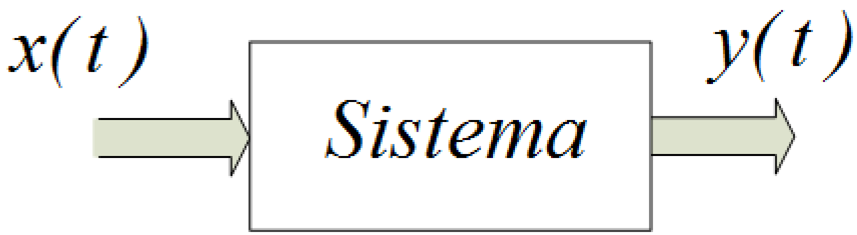
Descrição de Sistemas LTI por Variáveis de Estado



$$q[n+1] = Aq[n] + Bx[n]$$

$$y[n] = Cq[n] + Dx[n]$$

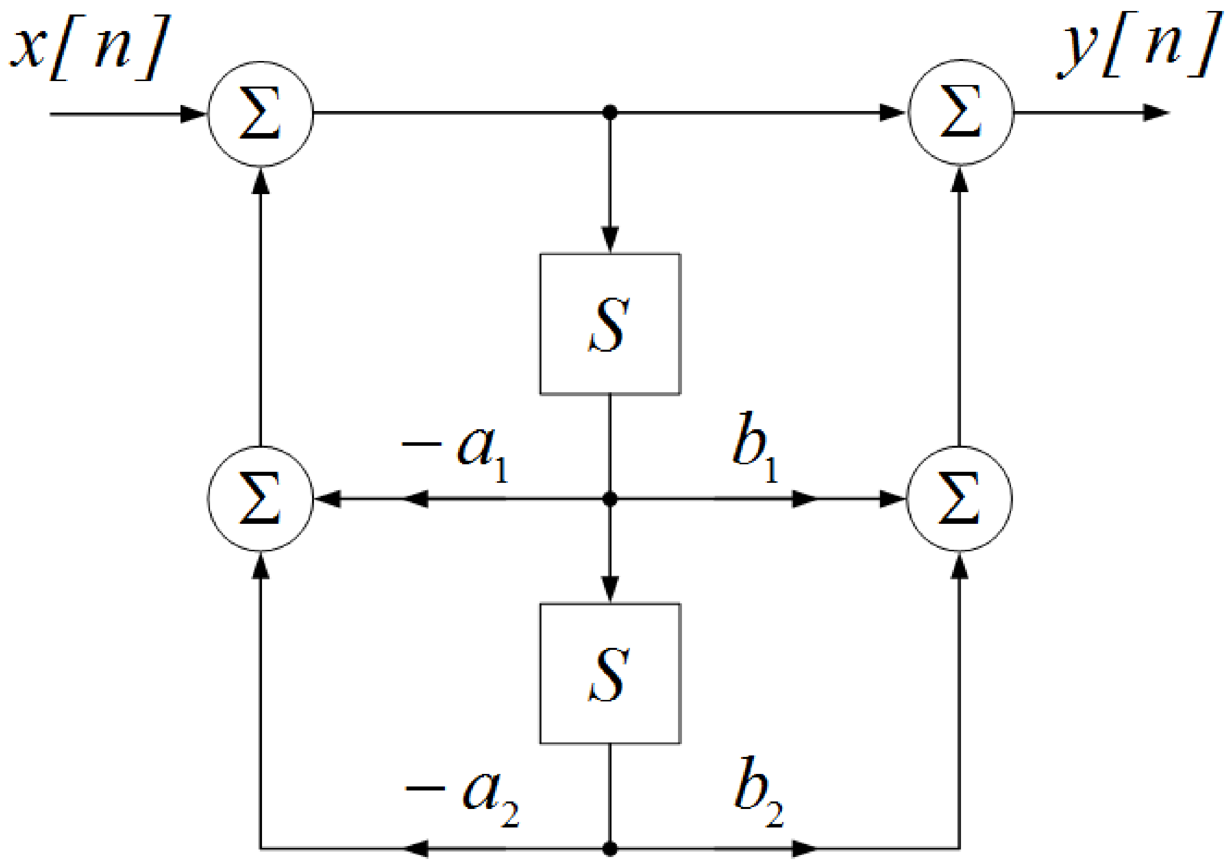
Descrição de Sistemas LTI por Variáveis de Estado



$$\frac{dq(t)}{dt} = Aq(t) + Bx(t)$$

$$y(t) = Cq(t) + Dx(t)$$

Para o sistema de tempo discreto representado pelo diagrama de blocos abaixo, obter a representação por variáveis de estado.



Descrição de Sistemas LTI por Variáveis de Estado

Admitindo como estados do sistema os sinais de saída de cada elemento de deslocamento no tempo, $q_1[n]$ e $q_2[n]$.

$$q_1[n+1] = -a_1 q_1[n] - a_2 q_2[n] + x[n]$$
$$q_2[n+1] = q_1[n]$$
$$y[n] = (b_1 - a_1) q_1[n] + (b_2 - a_2) q_2[n] + x[n]$$

Descrição de Sistemas LTI por Variáveis de Estado

Representação do sistema na forma matricial de equações de estado.

$$\begin{bmatrix} q_1[n+1] \\ q_2[n+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1[n] \\ q_2[n] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} x[n]$$

$$y[n] = [(b_1 - a_1) \quad (b_2 - a_2)] \begin{bmatrix} q_1[n] \\ q_2[n] \end{bmatrix} + [1]x[n]$$

Descrição de Sistemas LTI por Variáveis de Estado

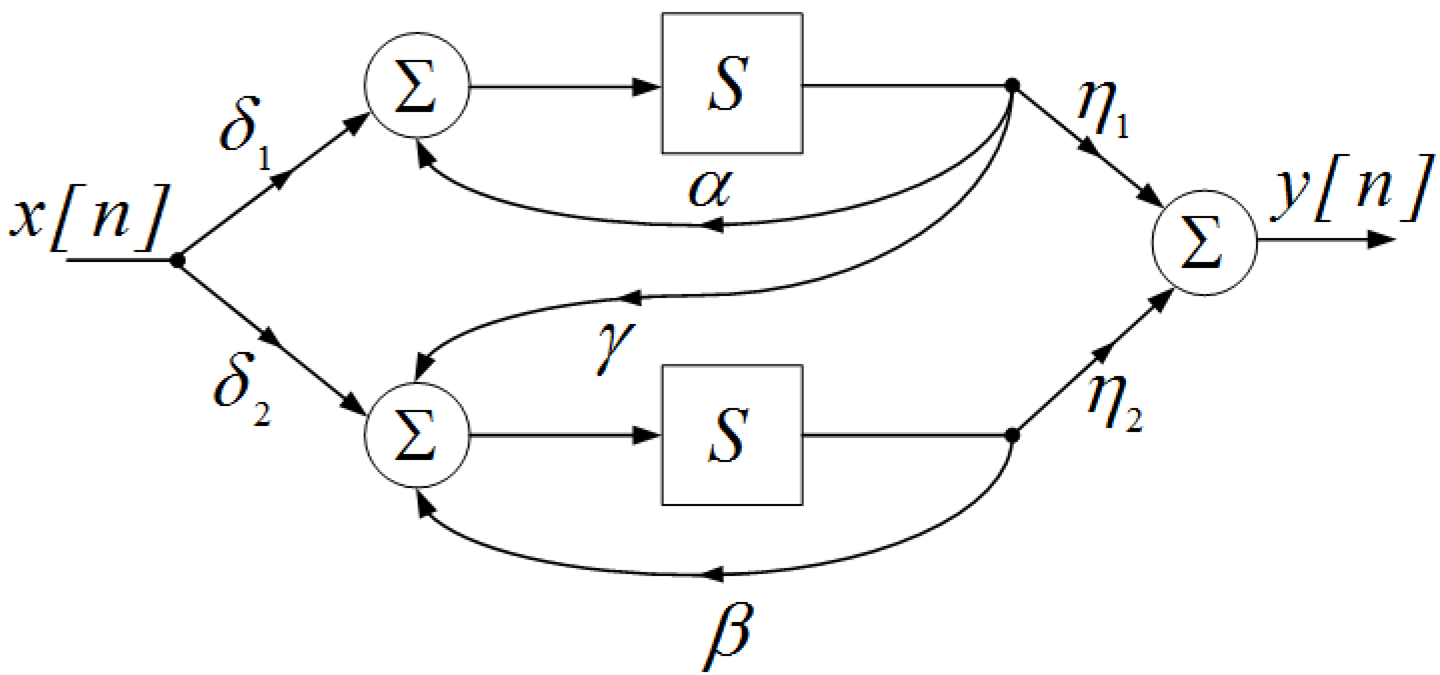
$$q[n+1] = Aq[n] + Bx[n]$$

$$y[n] = Cq[n] + Dx[n]$$

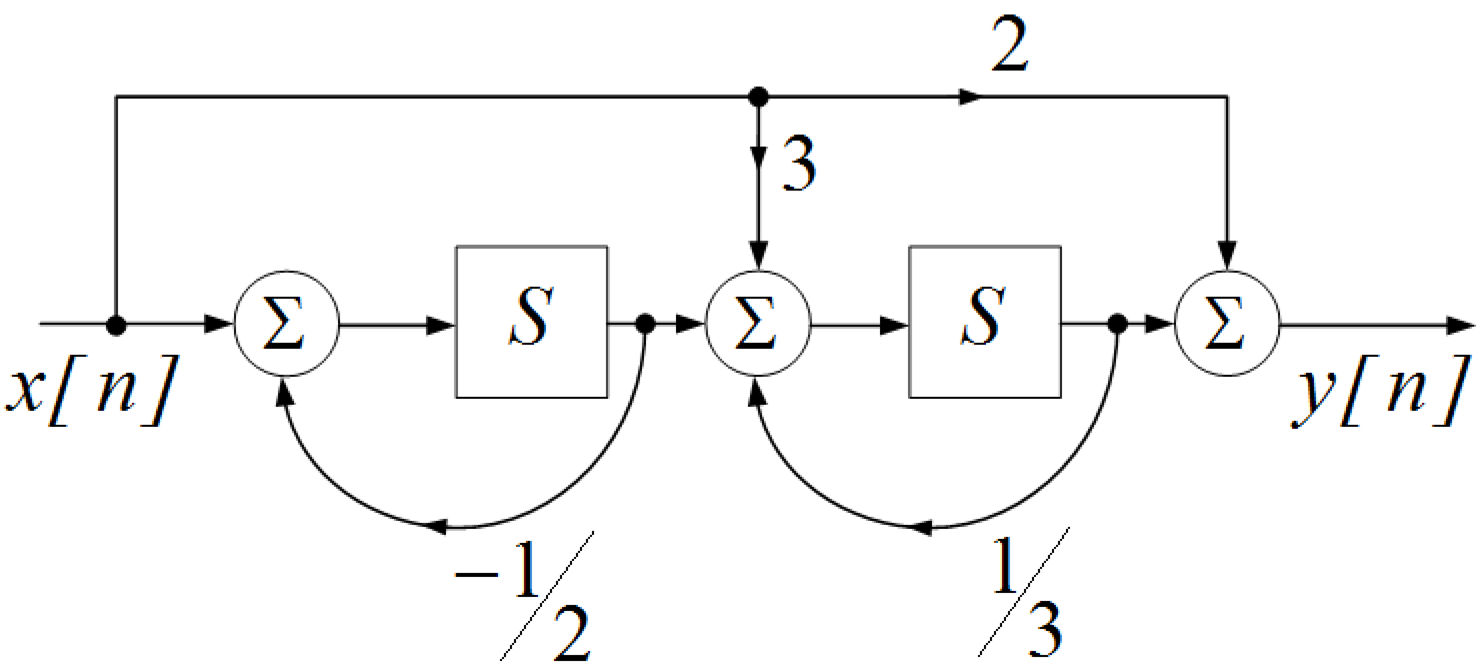
$$A = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C = [(b_1 - a_1) \quad (b_2 - a_2)], D = [1]$$

Exemplo 2.21: Para o sistema de tempo discreto representado pelo diagrama de blocos abaixo, obter a representação por variáveis de estado.



Exercício 2.15: Encontre a descrição por variáveis de estado correspondente ao diagrama de blocos apresentado a seguir.

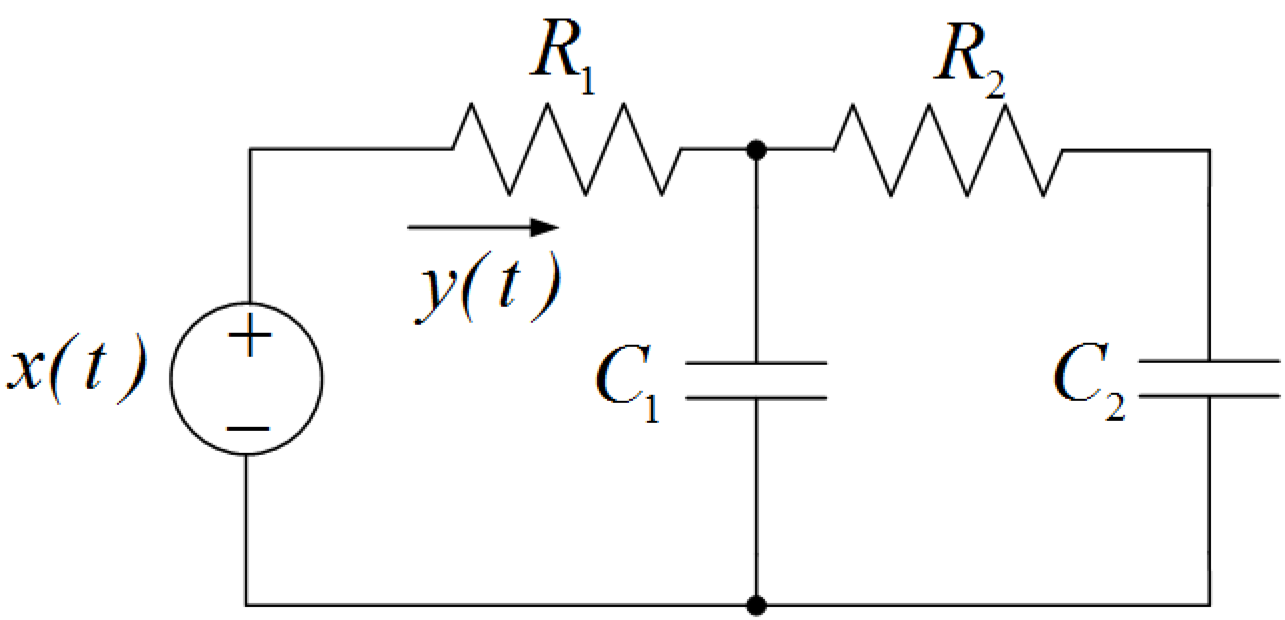


Para sistemas de tempo contínuo, a forma de representação por variáveis de estado é análoga àquela de tempo discreto, e é representada na forma

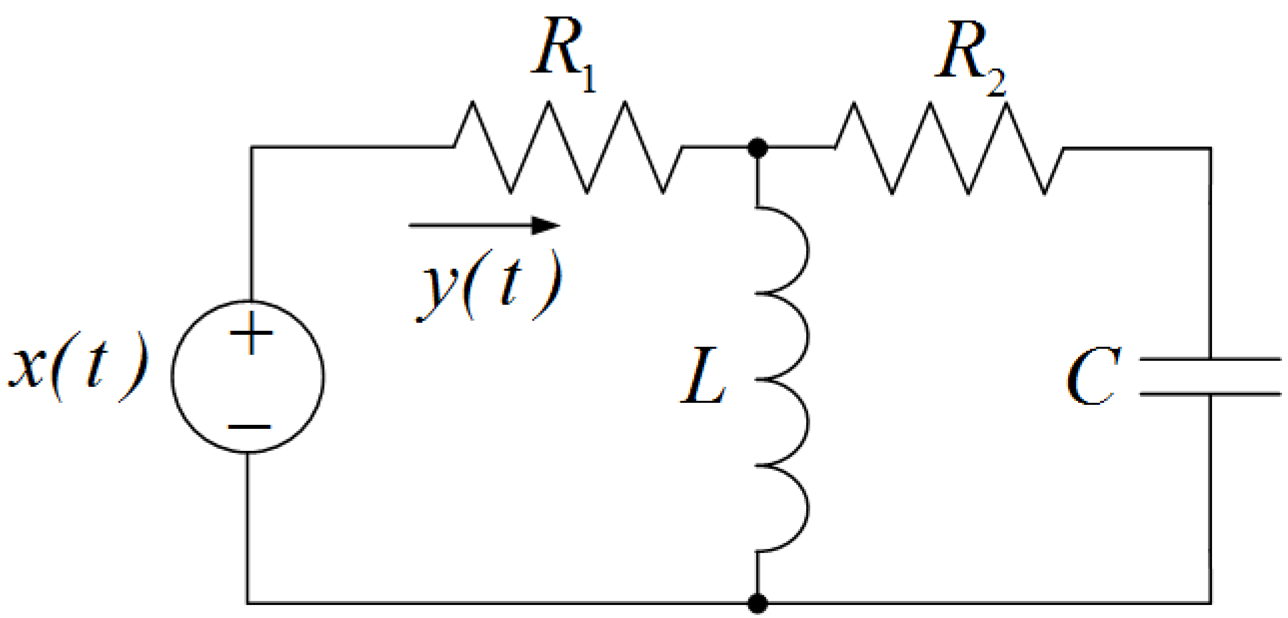
$$\frac{dq(t)}{dt} = Aq(t) + Bx(t)$$

$$y(t) = Cq(t) + Dx(t)$$

Para o circuito elétrico apresentado a seguir obter a representação por variáveis de estado. Após obter esta representação, obter o diagrama de blocos equivalente.



Para o circuito elétrico apresentado a seguir obter a representação por variáveis de estado. Após obter esta representação, obter o diagrama de blocos equivalente.



Transformação de Estados

Suponha que um mesmo sistema possa ser descrito por um outro conjunto de variáveis de estado tal que

$$\bar{q} = Tq \Rightarrow q = T^{-1}\bar{q}$$

$$\begin{aligned} \dot{q} &= Aq + Bx \\ y &= Cq + Dx \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \dot{\bar{q}} &= TAT^{-1}\bar{q} + TBx \\ y &= CT^{-1}\bar{q} + Dx \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \dot{\bar{q}} &= \bar{A}\bar{q} + \bar{B}x \\ y &= \bar{C}\bar{q} + Dx \end{aligned}$$

Exemplo 2.24: Um sistema LTI de tempo discreto é representado pelas seguintes matrizes:

$$A = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$C = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}$$

Admitindo que este sistema vai ser representado por novos estados

$$\overline{q}_1 = -\frac{1}{2}q_1 + \frac{1}{2}q_2$$

$$\overline{q}_2 = \frac{1}{2}q_1 + \frac{1}{2}q_2$$

determinar as matrizes $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}\ e\ \overline{D}$.

Exercício 2.21: Um sistema LTI de tempo contínuo é descrito pelas seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$$

Admitindo que este sistema vai ser representado por novos estados

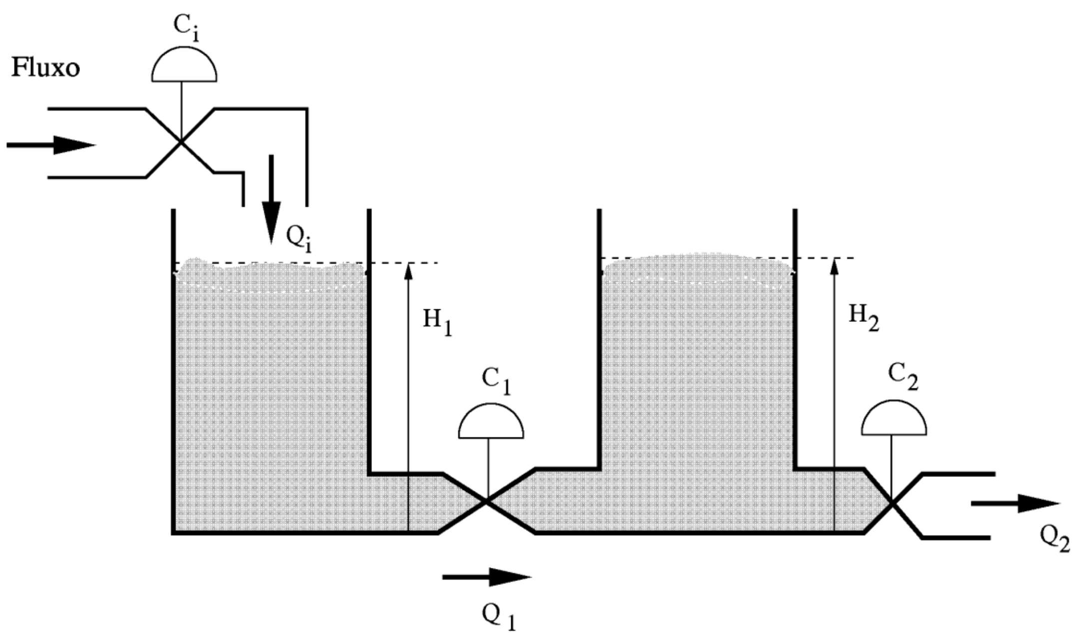
$$\overline{q}_1 = 2q_1 + q_2$$

$$\overline{q}_2 = q_1 - q_2$$

determinar as matrizes $\overline{A}\,,\overline{B}\,,\overline{C}\ e\ \overline{D}$.

Para os dois circuitos elétricos anteriores, determinar as matrizes de transformação de similaridade – T, de forma que as novas variáveis de estado sejam as cargas nos capacitores e os fluxos nos indutores. Obter as novas realizações na forma de espaço de estados.

Exercícios:



- Hipóteses:
  - Relação Linear
    - ☞ Vazões $Q_1(t)$ e $Q_2(t)$
    - ☞ Alturas das colunas de líquido $H_1(t)$ e $H_2(t)$
  - R_1 e R_2 resistências ao fluxo
  - A_1 e A_2 áreas uniformes

Equações fundamentais do processo:

$$Q_1(t) = \frac{H_1(t) - H_2(t)}{R_1}$$

$$Q_2(t) = \frac{H_2(t)}{R_2}$$

Equações dinâmicas do processo:

$$A_1 \frac{dH_1(t)}{dt} = Q_i(t) - \left[\frac{H_1(t) - H_2(t)}{R_1}\right]$$

$$A_2 \frac{dH_2(t)}{dt} = \left[\frac{H_1(t) - H_2(t)}{R_1}\right] - \frac{H_2(t)}{R_2}$$

Mostre que a equação diferencial homogênea de ordem n:

$$\frac{d^n y}{dt_n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt_{n-1}} + \ldots + a_{n-1} \frac{dy}{dt} + a_n y = 0$$

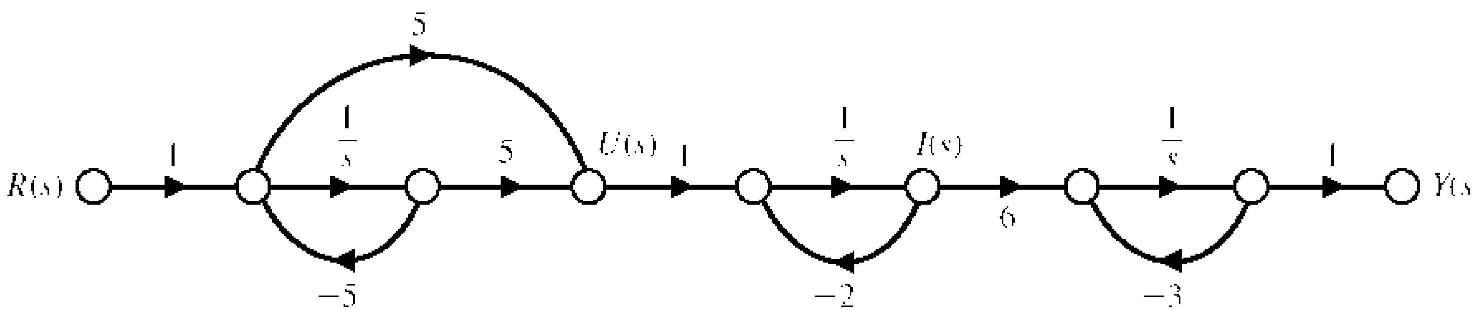
Pode ser representada na forma de espaço de estados por:

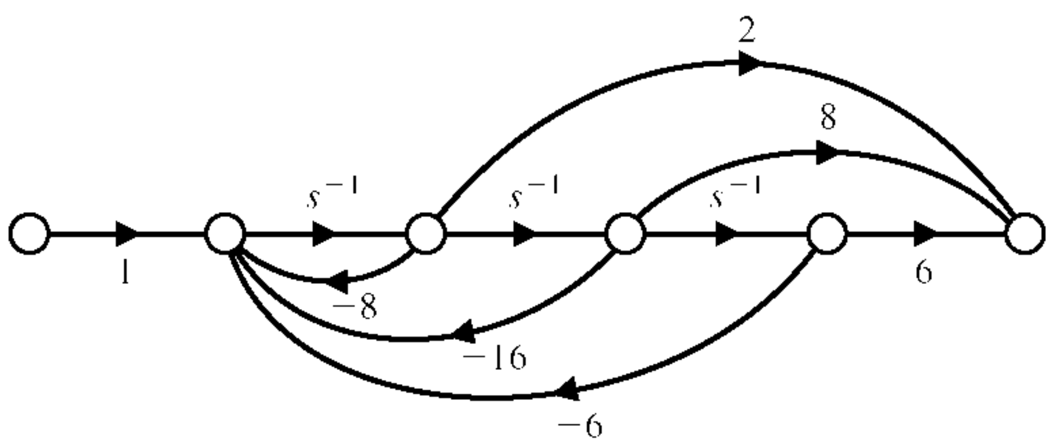
$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & . & 0 \\ 0 & 0 & 1 & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & . & -a_1 \end{bmatrix} x$$

Determine a representação na forma de espaço de estados do seguinte sistema multivariável:

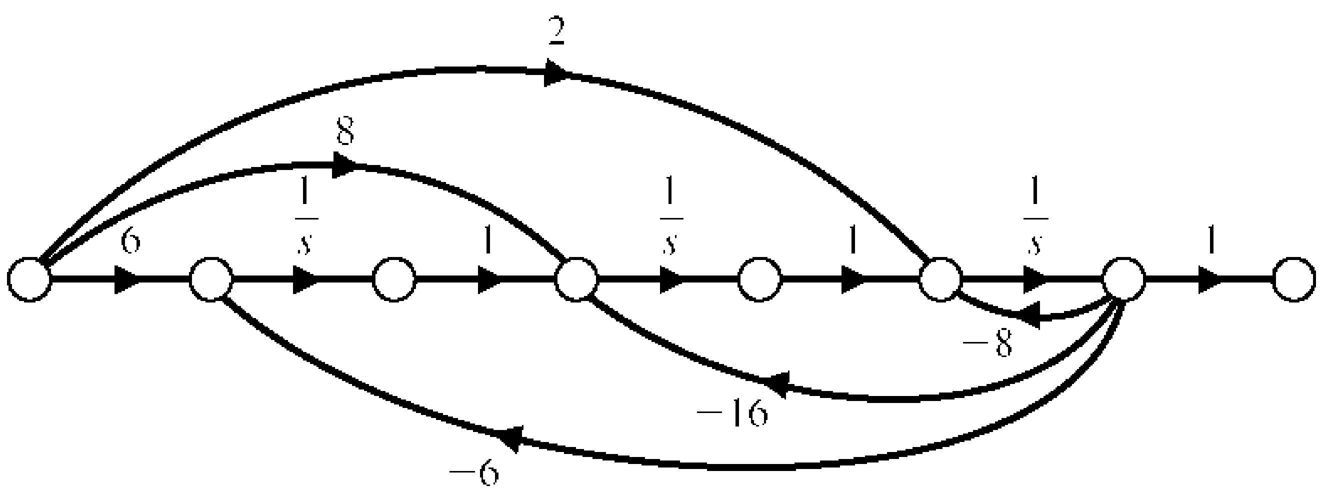
$$\ddot{y}_1 + a_1\dot{y}_1 + a_2 y_1 + c_3\dot{y}_2 + c_4 y_2 = b_1 u_1 + d_1 u_2$$
$$\ddot{y}_2 + c_1\dot{y}_2 + c_2 y_2 + a_3\dot{y}_1 + a_4 y_1 = b_2 u_1 + d_2 u_2$$

A partir dos diagramas de fluxo, obter as representações por variáveis de estados.





A partir dos diagramas de fluxo, obter as representações por variáveis de estados.



A partir dos diagramas de fluxo, obter as representações por variáveis de estados.