Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Escola de Engenharia
Departamento de Engenharia Elétrica

Sistemas e Sinais - Área I

FORMULÁRIO

I. TIPOS DE SINAIS

Sinal periódico

$$x(t) = x(t+T),\ \forall\ t \in \mathbb{R},\ T \in \mathbb{R}^+ \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$$
$$x[n] = x[n+N],\ \forall\ n \in \mathbb{Z},\ N \in \mathbb{Z}^+ \qquad \Omega = \frac{2\pi m}{T}$$

Sinal de energia

$$0 < E < \infty$$

$$E = \lim_{T\to\infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt$$
$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2[n]$$

Sinal de potência

$$0 < P < \infty$$

$$P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t)dt = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t)dt$$
$$P = \frac{1}{2N}\sum_{n=-N}^{N-1} x^2[n] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x^2[n]$$

II. CONVOLUÇÃO DE SINAIS

$$x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$
$$x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

Propriedades da resposta ao impulso

$$x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t) = x(t) * \{h_1(t) * h_2(t)\}$$
$$\{x(t) * h_1(t)\} * h_2(t) = x(t) * \{h_1(t)\} * h_2(t)$$
$$h_1(t) * h_2(t) = h_2(t) * h_1(t)$$

Seja $s(t)$ ou $s[n]$ a resposta a um degrau unitário. Então

$$h(t) = \frac{d}{dt}s(t)$$
$$h[n] = s[n] - s[n-1],$$

Dados

$$y(t) = x(t) * h(t)$$
$$y[n] = x[n] * h[n],$$

O sistema NÃO tem memória se

$$h(\tau) = c\delta(\tau)$$
$$h[k] = c\delta[k]$$

O sistema é causal se

$$h(\tau) = 0,\ \tau < 0$$
$$h[k] = 0,\ k < 0$$

O sistema é estável no sentido BIBO se

(a partir da propriedade da resposta ao impulso)

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|d\tau < \infty$$
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$$

(a partir das raízes da equação característica)

$$\Re\{r_i\} < 0 \qquad \text{tempo contínuo}$$
$$|r_i| < 1 \qquad \text{tempo discreto}$$

III. SOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS/ DE DIFERENÇAS

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k}{dt^k} y(t) = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k}{dt^k} x(t)$$
$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

Resposta completa

$$y(t) = y^n(t) + y^f(t)$$

$$y[n] = y^n[n] + y^f[n]$$

Resposta natural - $x(t) = 0,\ x[n] = 0$

Solução da equação homogênea

$$\begin{aligned} y^n(t) &= \sum_{i=1}^{N} c_i e^{r_i t}; \qquad \sum_{k=0}^{N} a_k r^k = 0 \\ y^n[n] &= \sum_{i=1}^{N} c_i r_i^n; \qquad \sum_{k=0}^{N} a_k r^{N-k} = 0 \end{aligned}$$

Se $r_{1,2} = a \pm bj$, então $y^n(t) = e^{at}(c_1 \cos(bt) + c_2 \sin(bt))$
Se $r_{1,2} = a$, então $y^n(t) = c_1 e^{at} + c_2 t e^{at}$

Resposta forçada - condições iniciais nulas

$$\begin{aligned} y^f(t) &= y^{nf}(t) + y^p(t) \\ y^f[n] &= y^{nf}[n] + y^p[n] \end{aligned}$$

Padrão da solução particular

Entrada	Sol. particular
1	c
e^{-at}	ce^{-at}
$\cos(\omega t + \phi)$	$c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)$
α^n	$c\alpha^n$
$\cos(\Omega n + \phi)$	$c_1 \cos(\Omega n) + c_2 \sin(\Omega n)$

IV. REPRESENTAÇÃO NO ESPAÇO DE ESTADOS

$$\begin{aligned} \dot{q}(t) &= Aq(t) + Bx(t) \qquad q[n+1] = Aq[n] + Bx[n] \\ y(t) &= Cq(t) + Dx(t) \qquad y[n] = Cq[n] + Dx[n] \end{aligned}$$

Transformações de similaridade

$$q'(t) = Tq(t), \qquad q'[n] = Tq[n]$$

$$\begin{aligned} A' &= TAT^{-1} \qquad B' = TB \\ C' &= CT^{-1} \qquad D' = D \end{aligned}$$

V. IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

$$\cos^2(x) = \frac{1}{2}[1 + \cos(2x)]$$
$$\sin^2(x) = \frac{1}{2}[1 - \cos(2x)]$$
$$\cos(a \pm b) = \cos(a)\cos(b) \mp \sin(a)\sin(b)$$
$$\sin(a \pm b) = \sin(a)\cos(b) \pm \cos(a)\sin(b)$$
$$\cos(a) + \cos(b) = 2\cos(\frac{1}{2}(a+b))\cos(\frac{1}{2}(a-b))$$
$$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos(a)\cos(b)$$
$$e^{\pm \jmath\theta} = \cos(\theta) \pm \jmath \sin(\theta)$$

VI. RELAÇÕES TENSÃO/CORRENTE

$$v_R(t) = Ri_R(t)$$
$$\lambda_L(t) = Li_L(t) \Rightarrow v_L(t) = L\frac{d}{dt}i_L(t)$$
$$q_C(t) = Cv_C(t) \Rightarrow v_C(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_C(t)dt$$

VII. SÉRIE GEOMÉTRICA

Seja β um número complexo, então

$$\sum_{n=0}^{N-1} \beta^n = \begin{cases} \frac{1-\beta^N}{1-\beta}, & \beta \neq 1 \\ N, & \beta = 1 \end{cases}$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} \beta^n = \frac{1}{1-\beta}, \qquad |\beta| < 1$$
$$\sum_{n=k}^{\infty} \beta^n = \frac{\beta^k}{1-\beta}, \qquad |\beta| < 1$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} n\beta^n = \frac{\beta}{(1-\beta)^2}, \qquad |\beta| < 1$$