Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Escola de Engenharia
Departamento de Engenharia Elétrica
ENG04037 Sistemas de Controle Digitais

Controladores *Deadbeat*

Prof. Walter Fetter Lages

27 de outubro de 2011

1 Controlador *Deadbeat*

Considere o sistema discreto mostrado na Fig. 1.

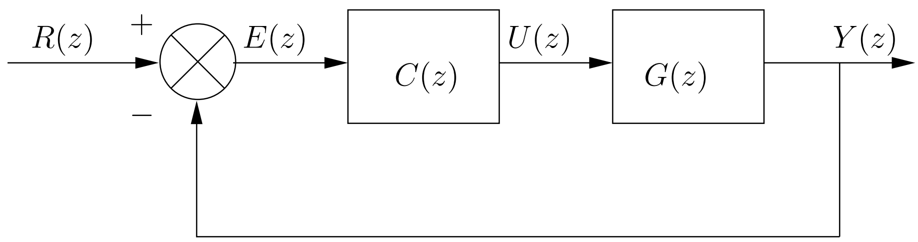

Figura 1: Diagrama de blocos de um sistema discreto.

com

$$G(z) = \frac{\beta_1 z^{-1} + \beta_2 z^{-2} + \cdots + \beta_m z^{-m}}{1 + \alpha_1 z^{-1} + \alpha_2 z^{-2} + \cdots + \alpha_n z^{-m}}$$

e $r(k) = 1, k \geq 0 \Leftrightarrow R(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}$.

Deseja-se determinar $u(k)$ tal que a saída atinja a referência em m passos e mantenha esse valor daí por diante.

Note que nesse caso se está desejando que a referência seja atingida em tempo finito e não de forma assintótica, como se deseja usualmente.

Supondo-se que $y(0) = 0$ e como a referência é unitária, deseja-se obter

$$Y(z) = y(1)z^{-1} + y(2)z^{-2} + \cdots + 1\left(z^{-m} + z^{-m-1} + \cdots\right)$$

o que torna necessário fazer

$$u(k) = u(m), k \geq m$$

ou seja

$$U(z) = u(0) + u(1)z^{-1} + u(2)z^{-2} + \cdots + u(m)\left(z^{-m} + z^{-m-1} + \cdots\right)$$

$$\begin{aligned}
\frac{Y(z)}{R(z)} &= \frac{Y(z)}{\frac{1}{1-z^{-1}}} = \frac{Y(z)\left(1 - z^{-1}\right)}{1} \\
&= \frac{Y(z)(z-1)}{z} \\
&= \frac{y(1) + y(2)z^{-1} + \cdots + 1\left(z^{-m+1} + z^{-m} + \cdots\right)}{z} \\
&- \frac{y(1)z^{-1} + y(2)z^{-2} + \cdots + 1\left(z^{-m} + z^{-m-1} + \cdots\right)}{z} \\
&= \frac{y(1) + \left(y(2) - y(1)\right)z^{-1} + \cdots + \left(1 - y(m-1)z^{-m+1}\right)}{z} \\
&= y(1)z^{-1} + \left(y(2) - y(1)\right)z^{-2} + \cdots + \left(1 - y(m-1)z^{-m}\right) \\
\frac{Y(z)}{R(z)} &= p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} + \cdots + p_m z^{-m} \triangleq P(z)
\end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned}
p_1 &= y(1) \\
p_2 &= y(2) - y(1) \\
&\vdots \\
p_m &= 1 - y(m-1)
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\frac{U(z)}{R(z)} = \frac{U(z)(z-1)}{z}$$

e por analogia

$$\frac{U(z)}{R(z)} = q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2} + \cdots + q_m z^{-m} \triangleq Q(z)$$

com

$$\begin{aligned}
q_0 &= u(0) \\
q_1 &= u(1) - u(0) \\
&\vdots \\
q_m &= u(m) - u(m-1)
\end{aligned}$$

Mas tem-se também que

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{C(z)G(z)}{1 + C(z)G(z)}$$

$$U(z) = C(z)E(z) = C(z)\left(R(z) - Y(z)\right)$$

De onde

$$\frac{U(z)}{R(z)} = Q(z) = \frac{C(z)\left(R(z) - Y(z)\right)}{R(z)}$$

$$C(z)\left(1 - \frac{Y(z)}{R(z)}\right) = Q(z)$$

$$C(z) = \frac{Q(z)}{1 - P(z)}$$

$$C(z) = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + \cdots + q_m z^{-m}}{1 - p_1 z^{-1} - p_2 z^{-2} - \cdots - p_m z^{-m}}$$

Notando que

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

tem-se

$$\begin{aligned}
\frac{\beta_1 z^{-1} + \beta_2 z^{-2} + \cdots + \beta_m z^{-m}}{1 + \alpha_1 z^{-1} + \alpha_2 z^{-2} + \cdots + \alpha_m z^{-m}} &= \frac{p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} + \cdots + p_m z^{-m}}{q_0 + q_1 z^{-1} + \cdots + q_m z^{-m}} \\
&= \frac{\left(p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} + \cdots + p_m z^{-m}\right)/q_0}{1 + \left(q_1 z^{-1} + \cdots + q_m z^{-m}\right)/q_0}
\end{aligned}$$

Como $p_1 + p_2 + \cdots + p_m = 1$, tem-se

$$\frac{p_1}{q_0} + \frac{p_2}{q_0} + \cdots + \frac{p_m}{q_0} = \frac{1}{q_0}$$

Portanto

$$\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_m = \frac{1}{q_0}$$

e os coeficientes do controlador podem ser calculados por

$$\begin{aligned} q_1 &= q_0\alpha_1 \\ q_2 &= q_0\alpha_2 \\ &\vdots \\ q_m &= q_0\alpha_m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_1 &= q_0\beta_1 \\ p_2 &= q_0\beta_2 \\ &\vdots \\ p_m &= q_0\beta_m \end{aligned}$$

A função de transferência de malha fechada é

$$\begin{aligned} \frac{Y(z)}{R(z)} &= P(z) = p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} + \cdots + p_m z^{-m} \\ &= \frac{p_1 z^{m-1} + p_2 z^{m-2} + \cdots + p_m}{z^m} \end{aligned}$$

Ou seja, a função de transferência possui m polos na origem, portanto, o controlador *deadbeat* é um alocador de polos na origem.

Exemplo 1 *Seja o sistema de controle da Fig. 2, com* $G(s) = \frac{200}{(s+3)(s+10)^2}$.

Esse diagrama de blocos pode ser convertido para o diagrama mostrado na Fig. 3, que é mais significativo do ponto de vista de sistemas de controle.

Discretizando $G(s)$ *com* $T = 0,2s$ *tem-se*

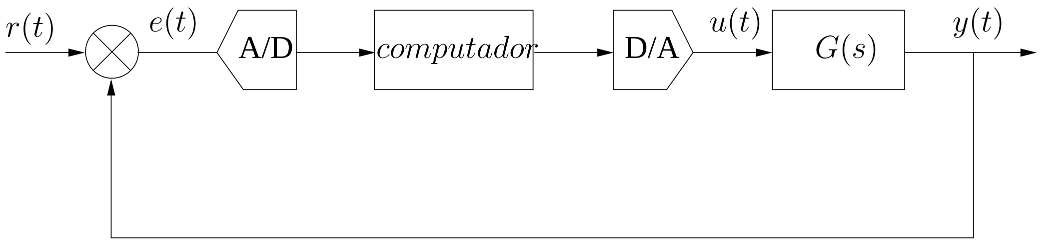

Figura 2: Sistema para controle *deadbeat*.

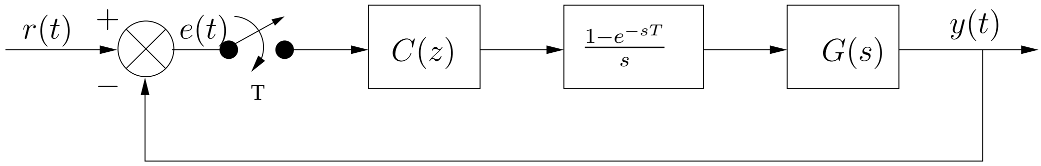

Figura 3: Sistema amostrado para controle *deadbeat*.

$$
\begin{aligned}
G(z) &= \left(1-z^{-1}\right)\mathcal{Z}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\} \\
&= \frac{0.091z^2+0,125z+0,009}{z^3-0,819z^2+0,167z-0,010} \\
G(z) &= \frac{0.091z^{-1}+0,125z^{-2}+0,009z^{-3}}{1-0,819z^{-1}+0,167z^{-2}-0,010z^{-3}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q_0 &= \frac{1}{\beta_1+\beta_2+\beta_3} = \frac{1}{0,091+0,125+0,009} = 4,444 \\
q_1 &= q_0\alpha_1 = 4,4444\times(-0,819) = -3,640 \\
q_2 &= q_0\alpha_2 = 4,4444\times(0,167) = 0,742 \\
q_3 &= q_0\alpha_3 = 4,4444\times(-0,010) = -0,044
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p_1 &= q_0\beta_1 = 4,4444\times(0,091) = 0,404 \\
p_2 &= q_0\beta_2 = 4,4444\times(0,125) = 0,556 \\
p_3 &= q_0\beta_3 = 4,4444\times(0,009) = 0,040
\end{aligned}
$$

$$
C(z) = \frac{Q(z)}{1-P(z)} = \frac{4,444-3,640z^{-1}+0,742z^{-2}-0,044z^{-3}}{1-0,404z^{-1}-0,556z^{-2}-0,040z^{-3}} = \frac{U(z)}{E(z)}
$$

$$\begin{aligned} u(k) &= 0,404u(k-1) + 0,556u(k-2) + 0,040u(k-3) \\ &+ 4,444e(k) - 3,640e(k-1) + 0,742e(k-2) - 0,044e(k-3) \end{aligned}$$

Note que $u(0) = q_0 = 4,444$.
Se $T = 0,02s$:

$$G(z) = \frac{0,0002z^{-1} + 0,0008z^{-2} + 0,0002z^{-3}}{1 - 2,579z^{-1} + 2,212z^{-2} - 0,631z^{-3}}$$

$$q_0 = \frac{1}{0,0002 + 0,0008 + 0,0002} = 833,33 = u(0)$$

Os valores iniciais de $u(k)$ podem ser bastante elevados se o período de amostragem não for adequado, forçando os atuadores a entrar em saturação. Isso ocorre porque T pequeno significa atingir a referência em tempo pequeno. O controlador *deadbeat* força a convergência em a partir do instante mT.

Em [1] é recomendado utilizar

$$\frac{T}{T_{95}} \geq 0,2$$

onde T_{95} é o tempo de acomodação a 5%.

2 Controlador *Deadbeat* com Ordem Aumentada

Para reduzir a amplitude de $u(0)$ pode-se utilizar o controlador *deadbeat* com ordem aumentada, que permite arbitrar-se $u(0)$.

Modificando os polinômios $P(z)$ e $Q(z)$ para:

$$P(z) \triangleq p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} + \cdots + p_m z^{-m} + p_{m+1} z^{-m-1}$$

$$Q(z) \triangleq q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2} + \cdots + q_m z^{-m} + q_{m+1} z^{-m-1}$$

tem-se

$$G(z) = \frac{\beta_1 z^{-1} + \beta_2 z^{-2} + \cdots + \beta_m z^{-m}}{1 + \alpha_1 z^{-1} + \alpha_2 z^{-2} + \cdots + \alpha_n z^{-m}} = \frac{p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} + \cdots + p_m z^{-m} + p_{m+1} z^{-m-1}}{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2} + \cdots + q_m z^{-m} + q_{m+1} z^{-m-1}}$$

O problema da comparação dos polinômios só terá solução se $P(z)$ e $Q(z)$ tiverem uma raiz em comum, ou seja

$$\frac{\beta_1 z^{-1} + \beta_2 z^{-2} + \cdots + \beta_m z^{-m}}{1 + \alpha_1 z^{-1} + \alpha_2 z^{-2} + \cdots + \alpha_n z^{-m}} = \frac{\left(\bar{p}_1 z^{-1} + \bar{p}_2 z^{-2} + \cdots + \bar{p}_m z^{-m}\right)\left(\alpha - z^{-1}\right)}{\left(\bar{q}_0 + \bar{q}_1 z^{-1} + \bar{q}_2 z^{-2} + \cdots + \bar{q}_m z^{-m}\right)\left(\alpha - z^{-1}\right)}$$

e portanto, como no caso do controlador *deadbeat* convencional:

$$\begin{aligned}
\bar{q}_1 &= \bar{q}_0 \alpha_1 \\
\bar{q}_2 &= \bar{q}_0 \alpha_2 \\
&\vdots \\
\bar{q}_m &= \bar{q}_0 \alpha_m
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{p}_1 &= \bar{q}_0 \beta_1 \\
\bar{p}_2 &= \bar{q}_0 \beta_2 \\
&\vdots \\
\bar{p}_m &= \bar{q}_0 \beta_m
\end{aligned}$$

Efetuando-se as multiplicações por $(\alpha - z^{-1})$ tem-se:

$$\begin{aligned}
& G(z) = \\
= \; & \frac{\bar{p}_1 \alpha z^{-1} + \left(\bar{p}_2 \alpha - \bar{p}_1\right) z^{-2} + \left(\bar{p}_3 \alpha - \bar{p}_2\right) z^{-3} \cdots + \left(\bar{p}_m \alpha - \bar{p}_{m-1}\right) z^{-m} - p_m z^{-m-1}}{\bar{q}_0 \alpha + \left(\bar{q}_1 \alpha - \bar{q}_0\right) z^{-1} + \left(\bar{q}_2 \alpha - \bar{q}_1\right) z^{-2} + \cdots + \left(\bar{q}_m \alpha - \bar{q}_{m-1}\right) z^{-m} - q_m z^{-m-1}} \\
= \; & \frac{p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} + \cdots + p_m z^{-m} + p_{m+1} z^{-m-1}}{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2} + \cdots + q_m z^{-m} + q_{m+1} z^{-m-1}}
\end{aligned}$$

e novamente por comparação de polinômios:

$$\begin{aligned}
q_0 &= \alpha \bar{q}_0 \\
q_1 &= \alpha \bar{q}_1 - \bar{q}_0 \\
q_2 &= \alpha \bar{q}_2 - \bar{q}_1 \\
&\vdots \\
q_m &= \alpha \bar{q}_m - \bar{q}_{m-1} \\
q_{m+1} &= -\bar{q}_m
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_1 &= \alpha \bar{p}_1 \\
p_2 &= \alpha \bar{p}_2 - \bar{p}_1 \\
&\vdots \\
p_m &= \alpha \bar{p}_m - \bar{p}_{m-1} \\
p_{m+1} &= -\bar{p}_m
\end{aligned}$$

Também como no caso anterior tem-se:

$$q_0 = u(0) = \alpha \bar{q}_0$$

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_{m+1} = 1$$

de onde

$$\alpha \bar{p}_1 + \alpha \bar{p}_2 - \bar{p}_1 + \alpha \bar{p}_3 - \bar{p}_2 + \cdots + \alpha \bar{p}_m - \bar{p}_{m-1} - \bar{p}_m = 1$$

ou

$$\alpha \beta_1 \bar{q}_0 + \alpha \beta_2 \bar{q}_0 - \beta_1 \bar{q}_0 + \alpha \beta_3 \bar{q}_0 - \beta_2 \bar{q}_0 + \cdots + \alpha \beta_m \bar{q}_0 - \beta_{m-1} \bar{q}_0 - \beta_m \bar{q}_0 = 1$$

ou seja

$$\alpha = 1 + \frac{1}{\bar{q}_0 \sum_{i=1}^{m} \beta_i}$$

E como $q_0 = \alpha \bar{q}_0$:

$$\bar{q}_0 = q_0 - \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} \beta_i}$$

Resumindo:

$$C(z) = \frac{Q(z)}{1 - P(z)} = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2} + \cdots + q_m z^{-m} + q_{m+1} z^{-m-1}}{1 - p_1 z^{-1} - p_2 z^{-2} - \cdots - p_m z^{-m} - p_{m+1} z^{-m-1}}$$

$$
\begin{aligned}
q_0 &= \alpha\bar{q}_0 \text{ (arbitrado)} \\
q_1 &= \alpha\bar{q}_1 - \bar{q}_0 = \alpha\bar{q}_0\alpha_1 - \bar{q}_0 = q_0(\alpha_1 - 1) + \frac{1}{\sum_{i=1}^{m}\beta_i} \\
q_2 &= \alpha\bar{q}_2 - \bar{q}_1 = \alpha\bar{q}_0\alpha_2 - \bar{q}_0\alpha_1 = q_0(\alpha_2 - \alpha_1) + \frac{\alpha_1}{\sum_{i=1}^{m}\beta_i} \\
&\vdots \\
q_m &= \alpha\bar{q}_m - \bar{q}_{m-1} = \alpha\bar{q}_0\alpha_m - \bar{q}_0\alpha_{m-1} = q_0(\alpha_m - \alpha_{m-1}) + \frac{\alpha_{m-1}}{\sum_{i=1}^{m}\beta_i} \\
q_{m+1} &= -\bar{q}_m = -\bar{q}_0\alpha_m = q_0(-\alpha_m) + \frac{\alpha_m}{\sum_{i=1}^{m}\beta_i}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p_1 &= \alpha\bar{p}_1 = \alpha\bar{q}_0\beta_1 = q_0\beta_1 \\
p_2 &= \alpha\bar{p}_2 - \bar{p}_1 = \alpha\bar{q}_0\beta_2 - \bar{q}_0\beta_1 = q_0(\beta_2 - \beta_1) + \frac{\beta_1}{\sum_{i=1}^{m}\beta_i} \\
&\vdots \\
p_m &= \alpha\bar{p}_m - \bar{p}_{m-1} = \alpha\bar{q}_0\beta_m - \bar{q}_0\beta_{m-1} = q_0(\beta_m - \beta_{m-1}) + \frac{\beta_{m-1}}{\sum_{i=1}^{m}\beta_i} \\
p_{m+1} &= -\bar{p}_m = -\bar{q}_0\beta_m = q_0(-\beta_m) + \frac{\beta_m}{\sum_{i=1}^{m}\beta_i}
\end{aligned}
$$

Exemplo 2

$$
G(z) = \frac{0.091z^{-1} + 0,125z^{-2} + 0,009z^{-3}}{1 - 0,819z^{-1} + 0,167z^{-2} - 0,010z^{-3}}
$$

Arbitrando-se $u(0) = q_0 = 4,444$ *obtém-se:*

$$
\begin{aligned}
q_1 &= 4,444(-0,819 - 1) + \frac{1}{0,091 + 0,125 + 0,009} = -3,640 \\
q_2 &= 4,444(0,167 + 0,819) - \frac{0,819}{0,091 + 0,125 + 0,009} = 0,742 \\
q_3 &= 4,444(-0,010 - 0,167) + \frac{0,167}{0,091 + 0,125 + 0,009} = -0,044 \\
q_4 &= 4,444(0,010) - \frac{0,010}{0,091 + 0,125 + 0,009} = 0
\end{aligned}
$$

Obtém-se o mesmo resultado que no caso convencional porque com $u(0) = 4,444$ *é possível atingir-se a referência em 3 passos.*

Se $u(0) = q_0 = 3$*:*

$$
\begin{aligned}
q_1 &= 3(-0,819 - 1) + \frac{1}{0,091 + 0,125 + 0,009} = -1,013 \\
q_2 &= 3(0,167 + 0,819) - \frac{0,819}{0,091 + 0,125 + 0,009} = -0,682 \\
q_3 &= 3(-0,010 - 0,167) + \frac{0,167}{0,091 + 0,125 + 0,009} = 0,211 \\
q_4 &= 3(0,010) - \frac{0,010}{0,091 + 0,125 + 0,009} = -0,014
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p_1 &= 3(0,091) = 0,273 \\
p_2 &= 3(0,125 - 0,091) + \frac{0,091}{0,091 + 0,125 + 0,009} = 0,506 \\
p_3 &= 3(0,009 - 0,125) + \frac{0,125}{0,091 + 0,125 + 0,009} = 0,208 \\
p_4 &= 3(-0,009) + \frac{0,009}{0,091 + 0,125 + 0,009} = 0,013
\end{aligned}
$$

$$
C(z) = \frac{Q(z)}{1 - P(z)} = \frac{3 - 1,013z^{-1} - 0,682z^{-2} + 0,210z^{-3} - 0,014z^{-4}}{1 - 0,273z^{-1} - 0,506z^{-2} - 0,208z^{-3} - 0,013z^{-4}}
$$

3 Controlador *Deadbeat* no Espaço de Estados

Seja a planta, com modelo contínuo no espaço de estados dado por

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= Fx(t) + Gu(t) \\
y(t) &= Cx(t)
\end{aligned}
$$

que tem o correspondente discreto dado por

$$
\begin{aligned}
x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\
y(k) &= Cx(k)
\end{aligned}
$$

com $A = e^{FT}$ e $B = \int_0^T e^{F\tau} G d\tau$.

⌈

$e^X = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} X^k$ ou, supondo $X = PJP^{-1}$, onde J é a forma de Jordan de X, $e^X = Pe^J P^{-1}$.
$\lfloor$

Supondo $x(0) = 0$ tem-se

$$\begin{aligned} x(k) &= A^K x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1} Bu(i) = \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1} Bu(i) \\ y(k) &= \sum_{i=0}^{k-1} CA^{k-i-1} Bu(i) \text{ para } k \geq 1 \text{ e } y(0) = Cx(0) = 0 \end{aligned}$$

Como deseja-se $e(k) = 0$ para $k > n$ onde n é a dimensão de $x(t)$ e supondo $r(t) = r$, tem-se

$$y(n) = r = \sum_{i=0}^{n-1} CA^{n-i-1} Bu(i)$$

com isso garante-se que a saída atingirá r em n passos, mas não que permanecerá igual a r. Para tanto, é necessário que o ponto $x(n)$ seja um ponto de equilíbrio, ou seja que $\dot{x}(n) = 0$.

$$\dot{x}(nT) = Fx(nT) + Gu(nT) = \sum_{i=0}^{n-1} FA^{n-i-1} Bu(iT) + Gu(nT) = 0$$

ou, reescrevendo na forma matricial

$$\begin{bmatrix} CA^{n-1}B & CA^{n-2}B & \cdots & CB & 0 \\ FA^{n-1}B & FA^{n-2}B & \cdots & FB & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \\ \vdots \\ u(n-1) \\ u(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Definindo $u(i) = S(i)r$, tem-se

$$e(k) = r - y(k) = r - \sum_{i=0}^{k-1} CA^{k-i-1} BS(i) r = \left(I - \sum_{i=0}^{k-1} CA^{k-i-1} BS(i) \right) r \quad (1)$$

Assim, como $u(k)$ é constante para $k \geq n$, tem-se

$$U(z) = \sum_{k=0}^{\infty} S(k) r z^{-k} = \left(\sum_{k=0}^{n-1} S(k) z^{-k} + S(n) \sum_{k=n}^{\infty} z^{-k} \right) r = \left(\sum_{k=0}^{n-1} S(k) z^{-k} + S(n) \frac{z^{-n}}{1 - z^{-1}} \right) r$$

e de (1) obtém-se

$$E(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(I - \sum_{i=0}^{k-1} CA^{k-i-1} BS(i) \right) r z^{-k}$$

pois $e(k) = 0$ para $k \geq n$.

Logo,

$$C(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} S(k) z^{-k} + S(n) \frac{z^{-n}}{1-z^{-1}}}{\sum_{k=0}^{n-1} \left(I - \sum_{i=0}^{k-1} CA^{k-i-1} BS(i) \right) z^{-k}}$$

Exemplo 3 *Projetar um controlador deadbeat no espaço de estado para a planta descrita por* $G(s) = \frac{200}{(s+3)(S+10)^2}$.

Uma representação no espaço de estados dessa planta é:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -300 & -160 & -23 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 200 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) \end{aligned}$$

Discretizando com $T = 0.2s$ *resulta*

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \begin{bmatrix} 0,863 & 0,118 & 0,005 \\ -1,371 & 0,132 & 0,013 \\ -4,006 & -3,508 & -0,175 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0,091 \\ 0,914 \\ 2,670 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(k) \end{aligned}$$

Substituindo A, B, C, F *e* G, *tem-se*

$$\begin{bmatrix} 0,156 & 0,200 & 0,091 & 0 \\ -0,321 & 0,031 & 0,914 & 0 \\ -0,201 & -4,038 & 2,670 & 0 \\ 9,183 & 27,914 & -234,950 & 200 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \\ u(2) \\ u(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

de onde

$$
\begin{aligned}
u(0) &= 4,482r \Rightarrow S(0) = 4,482 \\
u(1) &= 0,799r \Rightarrow S(1) = 0,799 \\
u(2) &= 1,546r \Rightarrow S(2) = 1,546 \\
u(3) &= 1,499r \Rightarrow S(3) = 1,499
\end{aligned}
$$

Portanto

$$
\begin{aligned}
E(z) &= \sum_{k=0}^{2}\left(I - \sum_{i=0}^{k-1} CA^{k-i-1}BS(i)\right) rz^{-k} \\
&= \left((1-0)z^{-0} + (1 - CB(4,482))\, z^{-1} + (1 - CAB(4,482) - CB(0,799))\, z^{-2}\right) r \\
&= \left(1 + 0.592z^{-1} + 0.031z^{-2}\right) r
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
U(z) &= \left(\sum_{k=0}^{n-1} S(k)z^{-k} + S(n)\frac{z^{-n}}{1-z^{-1}}\right) r \\
&= \left(4,482 + 0,799z^{-1} + 1,546z^{-2} + 1.499\frac{z^{-3}}{1-z^{-1}}\right) r \\
&= \left(\frac{4,482 - 3,683z^{-1} + 0,747z^{-2} - 0,047z^{-3}}{1-z^{-1}}\right) r
\end{aligned}
$$

E o controlador é dado por

$$
C(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{4,482 - 3,683z^{-1} + 0,747z^{-2} - 0,047z^{-3}}{1 - 0.408z^{-1} - 0.561z^{-2} - 0.031z^{-3}}
$$

que, a menos de diferenças nos coeficientes devidos a truncamentos numéricos é idêntico ao controlador obtido anteriormente.

4 Exercício

O processo térmico PT326 da Feedback tem a função de transferência $G(s) = \frac{50,52(s+14,31)}{(s+2,48)(s+8,96)(s+16,95)}$. Projete um controlador *deadbeat* para essa planta.

Referências

[1] K. J. Åström and B. Wittenmark. *Computer Controlled Systems - Theory and Design*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1984.