

Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Escola de Engenharia
Departamento de Engenharia Elétrica
ENG04037 Sistemas de Controle Digitais

Projeto de Controladores Digitais no Plano z Utilizando Lugar das Raízes

Prof. Walter Fetter Lages

18 de outubro de 2011

1 Introdução

Nessa abordagem, digitaliza-se o modelo da planta e projeta-se um controlador diretamente no plano z . Discretizando o modelo da planta ao invés de discretizar o controlador, as aproximações para obter o controlador discreto são eliminadas. Para obter-se o modelo discreto da planta, a mesma é precedida por um segurador de ordem zero, de forma que possui um equivalente discreto exato.

Por outro lado, não existe um equivalente discreto exato do controlador contínuo porque a resposta depende do sinal de entrada entre os instantes de amostragem. Cada equivalente discreto assume um comportamento para o sinal entre os instantes de amostragem.

O lugar das raízes é o lugar dos pontos ocupados pelas raízes do polinômio característico do sistema e malha fechada em função de um parâmetro real que varia de zero a infinito. Usualmente, esse parâmetro é o ganho do controlador.

Considere o sistema mostrado na Fig. 1

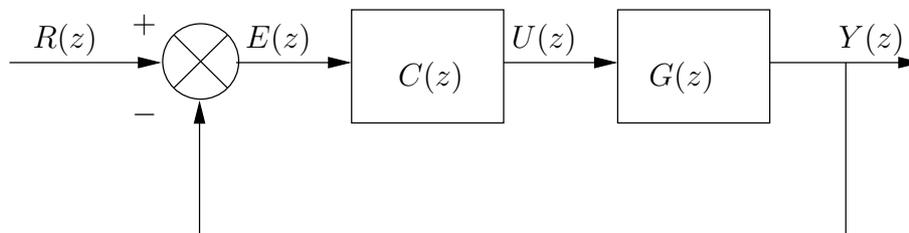


Figura 1: Diagrama de blocos de um controle digital.

cuja função de transferência em malha fechada é

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{C(z)G(z)}{1 + C(z)G(z)}$$

Como a forma da equação característica é a mesma do caso contínuo, as regras para construção do lugar das raízes são as mesmas. A diferença é apenas a interpretação do gráfico porque as posições dos polos tem significados diferentes.

Exemplo 1 *Suponha o projeto do sistema de controle de uma antena, para o qual deseja-se obter um overshoot $\leq 16\%$, erro à rampa de $0,01rd/s < 0,01rd$ e tempo de acomodação a $1\% \leq 10s$, com período de amostragem de $1s$.*

O modelo discretizado, considerando o segurador de ordem zero é

$$G(z) = 0,0484 \frac{z + 0,9672}{(z - 1)(z - 0,9048)}$$

Considerando um controlador proporcional, $C(z) = K$, tem-se que a equação característica é:

$$1 + 0,0484K \frac{z + 0,9672}{(z - 1)(z - 0,9048)} = 0 \quad (1)$$

cujo lugar das raízes é mostrado na Fig. 2.

Das especificações de desempenho tem-se:

$$\text{Overshoot} < 16\% \Rightarrow \xi > -\frac{\frac{\ln M_p}{\pi}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\ln M_p}{\pi}\right)^2}}$$

$$\xi > -\frac{\frac{\ln 0,16}{\pi}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\ln 0,16}{\pi}\right)^2}}$$

$$\xi > 0,5$$

$$t_s \leq 10s \Rightarrow t_s = \frac{4,6}{\xi \omega_n}$$

$$\omega_n \approx 1rd/s$$

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} = 0,867rd/s$$

$$\sigma = \xi \omega_n = 0,5rd/s$$

Portanto, os polos desejados para o sistema são:

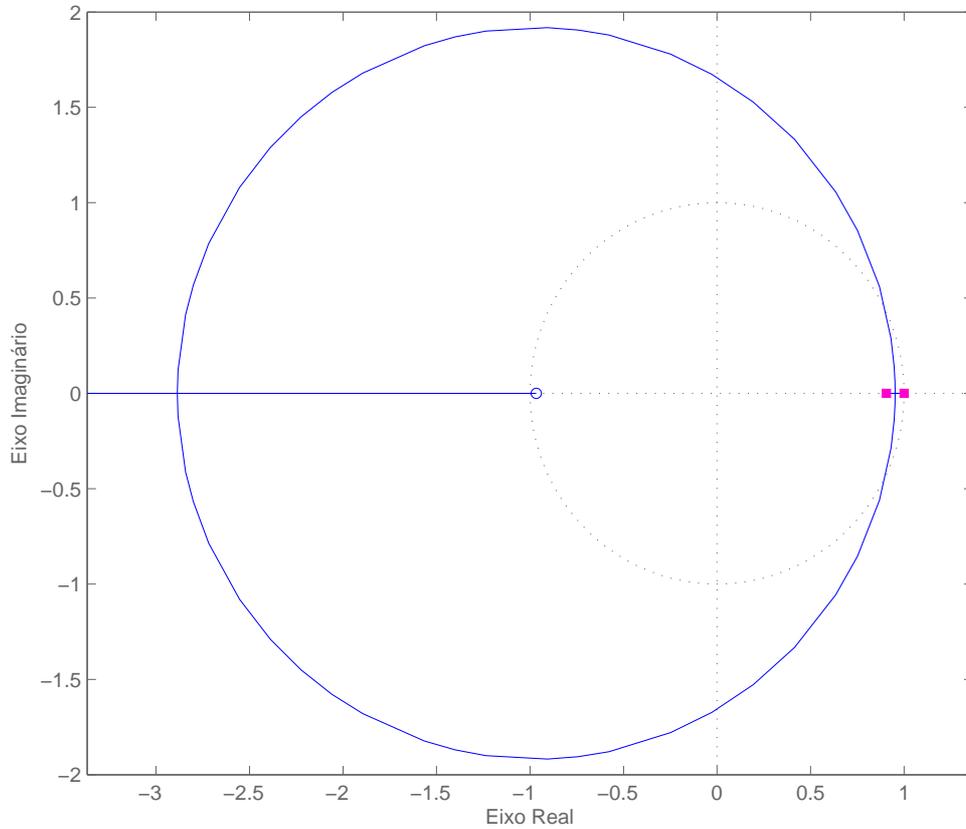


Figura 2: Lugar das raízes da equação (1).

$$s = -0,5 \pm j0,867$$

que mapeados para o plano z tornam-se

$$z = e^{sT} = 0,392 \pm j0,462$$

Cancelando o polo em $z = 0,9048$ com um zero e colocando um polo em $z = 0,3679$, tem-se o compensador:

$$C(z) = 6,64 \frac{z - 0,9048}{z - 0,3679} \quad (2)$$

que é exatamente a digitalização do compensador contínuo:

$$C(s) = \frac{10s + 1}{s + 1}$$

O lugar das raízes resultante é mostrado na Fig. 3.

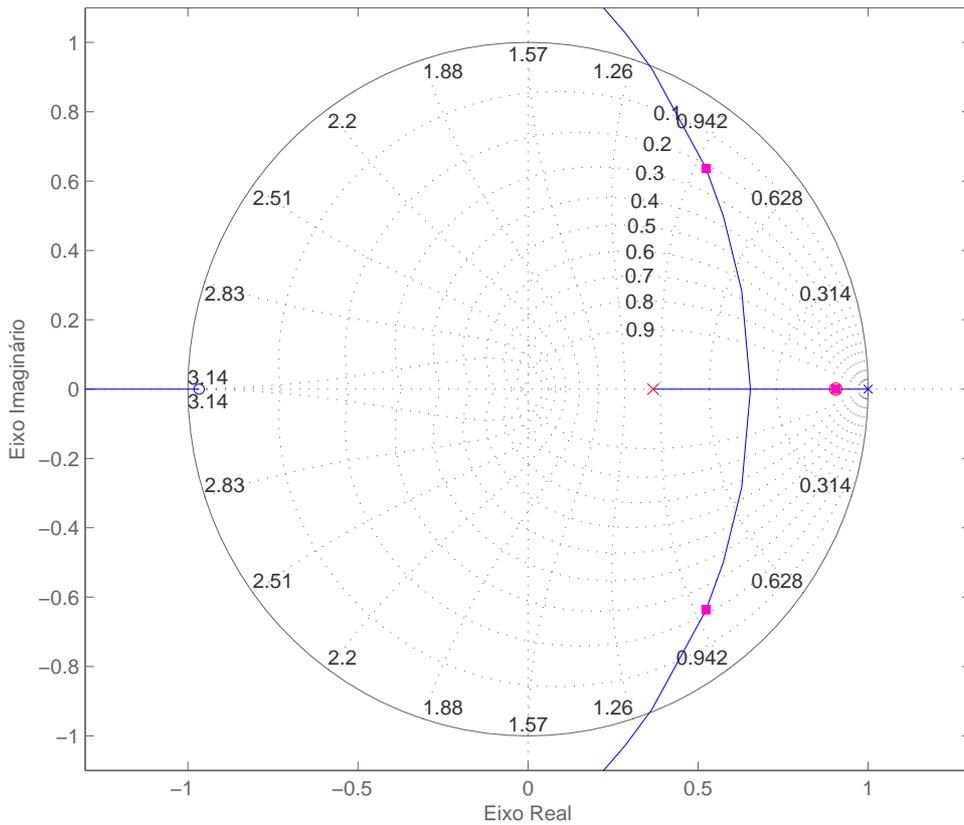


Figura 3: Lugar das raízes utilizando o compensador (2).

Para $K = 6,64$ tem-se

$$z = 0,523 \pm j0,636$$

$$s = -0,194 \pm j0,833 \Rightarrow \xi = 0,21$$

$$\Rightarrow t_s = \frac{4,6}{0,194} = 23,71s$$

$$\begin{aligned}
K_v &= \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{C(z)G(z)}{Tz} \\
&= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z-1)}{z} 6,64 \frac{z-0,9048}{z-0,3679} 0,0484 \frac{z+0,9672}{(z-1)(z-0,9048)} \\
K_v &= 6,64 \frac{0,0484(1,9672)}{1-0,3679} = 1
\end{aligned}$$

Essa escolha de compensador não permite atingir as especificações, pois o aumento do ganho para reduzir o tempo de acomodação reduziria ainda mais o coeficiente de amortecimento. Portanto, é necessário escolher outro polo e zero que permita posicionar os polos de malha fechado onde desejado.

┌
Um compensador equivalente ao compensador contínuo não funciona aqui devido à distorção no mapeamento $s \rightarrow z$, que é agravada para valores de T relativamente grandes. Ou seja, os polos que fazem o lugar das raízes em s passar pelo local adequado não necessariamente produzem um lugar das raízes adequado quando mapeados para z .

└
Uma outra forma de escolher o compensador é transformar as especificações para o plano z , como mostra Fig. 4.

$$t_s = 10s \Rightarrow \sigma = \xi\omega_n = 0,5 \Rightarrow \text{polos dentro do círculo de raio } r = e^{-\sigma T} = 0,61$$

$$\text{Overshoot} = 16\% \Rightarrow \xi = 0,5 \Rightarrow \text{cardióide em } z$$

Nesse caso, precisa-se aumentar o coeficiente de amortecimento ou "entortar" o lugar das raízes para a esquerda de forma que ele passe no local adequado. Obviamente, isso pode ser feito movendo o polo do compensador para a esquerda, mantendo o zero no lugar. Após algumas tentativas, tem-se que para um polo em $z = 0,05$ é possível o lugar das raízes passa pelo local desejado para os polos, como mostra a Fig. 5.

Dessa forma, o compensador é

$$C(z) = K \frac{z-0,9048}{z-0,05}$$

E o ganho que posiciona os polos no local desejado é:

$$K = \frac{\sqrt{(1-0,392)^2 + 0,462^2} \sqrt{(0,392-0,05)^2 + 0,462^2}}{0,0484 \sqrt{(0,9672+0,392)^2 + 0,462^2}} = 6,6132$$

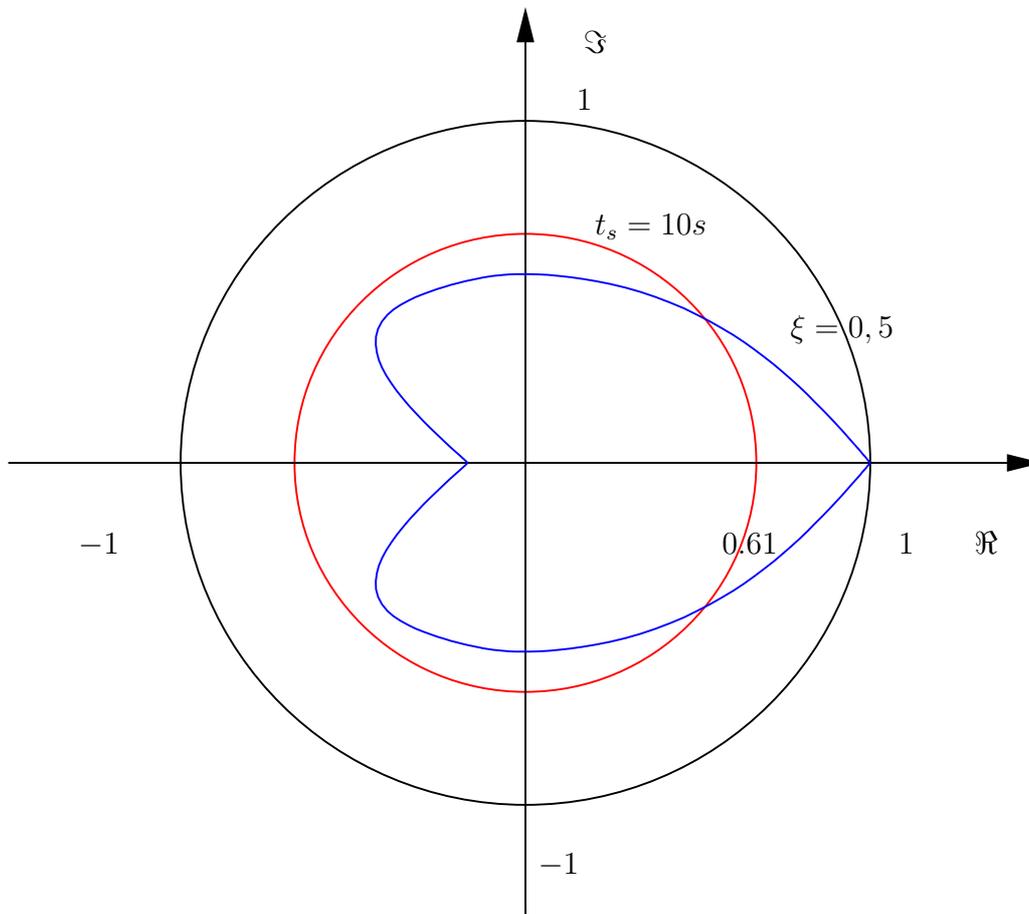


Figura 4: Curvas no lugar das raízes correspondentes as especificações.

$$\begin{aligned}
 K_v &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{Tz} C(z)G(z) \\
 &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} 6,6132 \frac{z-0,9048}{z-0,05} 0,0484 \frac{z+0,9672}{(z-1)(z-0,9048)} \\
 &= \frac{0,3058}{0,95} 1,9672 \\
 K_v &= 0,63
 \end{aligned}$$

Assim, esse compensador não atende ao K_v desejado. Para satisfazer K_v é necessário aumentar o ganho, mas isso reduziria ξ . Portanto, é necessário utilizar outra compensação que permita aumentar o ganho e manter ξ . A única forma de aumentar o K_v e atingir as especificações de amortecimento e tempo de acomodação é mover também o zero para a esquerda.

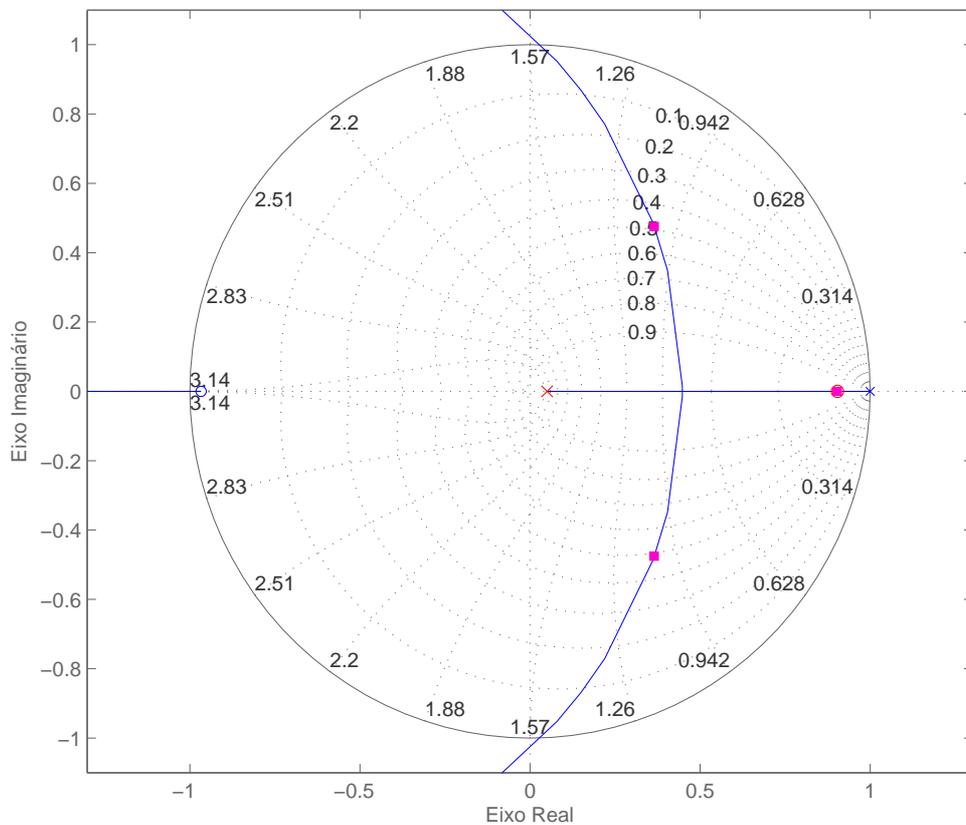


Figura 5: Lugar das raízes passando pelo local desejado para os polos.

Após mais algumas tentativas, chega-se à

$$C(z) = K \frac{z - 0,8}{z - 0,05}$$

que tem o lugar das raízes mostrado na Fig. 6.

O ganho é

$$K = \frac{\sqrt{(1 - 0,392)^2 + 0,462^2} \sqrt{(0,9048 - 0,392)^2 + 0,462^2}}{0,0484 \sqrt{(0,9672 + 0,392)^2 + 0,462^2}} \times \frac{\sqrt{(0,392 - 0,05)^2 + 0,462^2}}{\sqrt{(0,8 - 0,392)^2 + 0,462^2}} = 7,0742$$

que posiciona os polos de malha fechada em $z = 0,4271 \pm j0,4762$ com

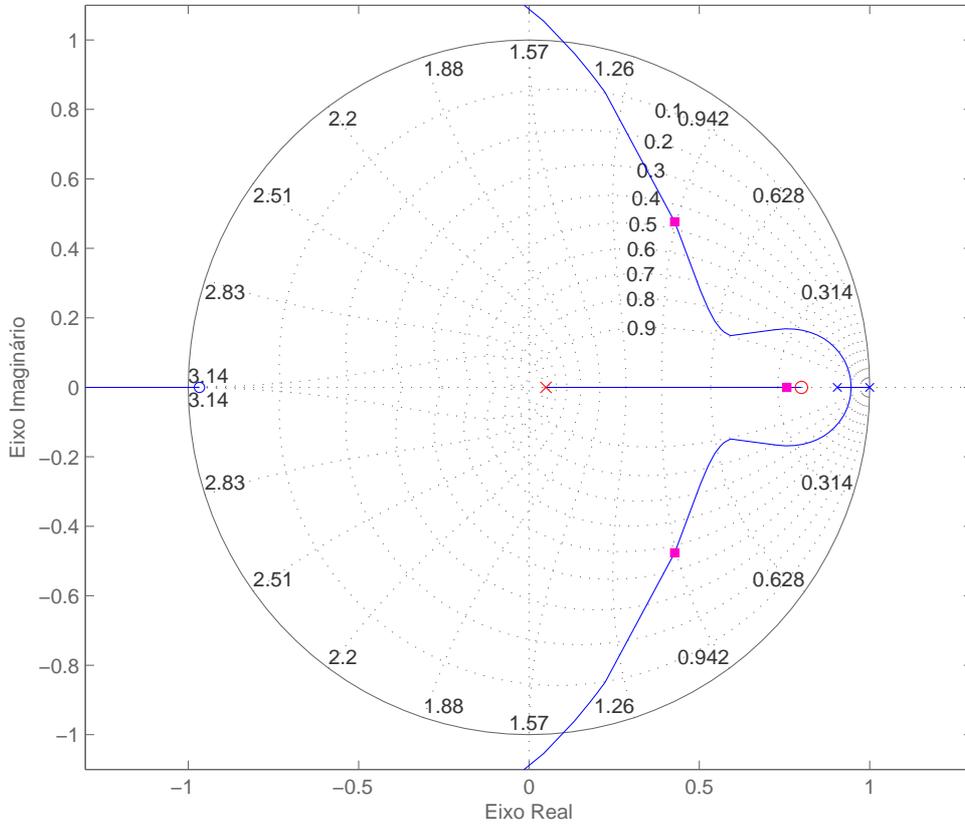


Figura 6: Lugar das raízes utilizando o compensador (1).

$$\begin{aligned}
 K_v &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{Tz} C(z)G(z) \\
 &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} 7,0742 \frac{z-0,8}{z-0,05} 0,0484 \frac{z+0,9672}{(z-1)(z-0,9048)} \\
 &= 7,0742 \frac{0,2}{0,95} 0,0484 \frac{1,9672}{0,0952} \\
 K_v &= 1,48
 \end{aligned}$$

Aparentemente o objetivo foi satisfeito, no entanto, para posicionar o par de polos em $z = 0,4271 \pm j0,4762$ o outro polo foi parar em $z = 0,756$ e com isso o par de polos conjugados não é mais dominante. A existência desse polo extra prejudica a resposta, fazendo com que o overshoot e o tempo de acomodação seja

maiores do que os desejados.

Se polo real estivesse mais próximo de um zero seus efeitos diminuiriam. Isso pode ser feito utilizando o compensador

$$C(z) = K \frac{z - 0,88}{z + 0,5} \quad (3)$$

que tem o lugar das raízes mostrado na Fig. 7.

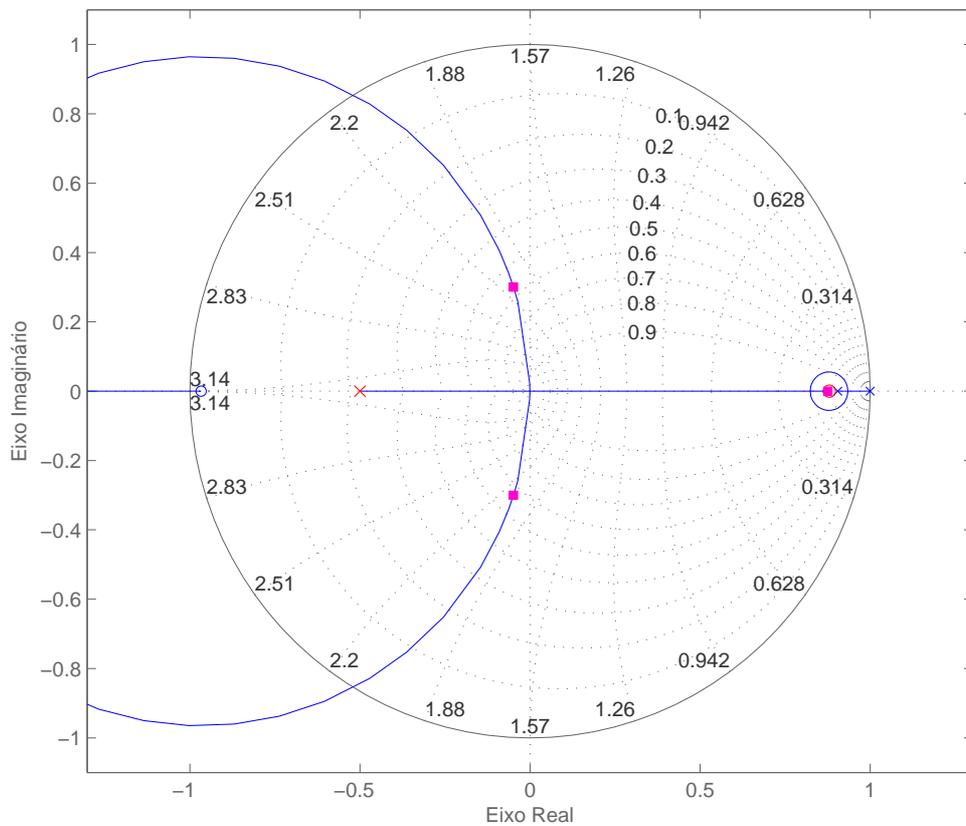


Figura 7: Lugar das raízes utilizando o compensador (3).

Pode-se notar que a curva do lugar das raízes não passa perto do lugar desejado ($z = 0,392 \pm j0,462$). No entanto, uma parte significativa da curva está dentro da região de interesse (dentro do cardióide de $\xi = 0.5$ e dentro do círculo de raio igual a 0.6, que corresponde a $t_s = 10s$), de forma que pode-se selecionar uma nova posição desejada para os polos que também atenda as especificações. Escolhendo:

$$z = -0.05 \pm j0,3$$

tem-se que o ganho é

$$K = \frac{\sqrt{(1 + 0,05)^2 + 0,3^2} \sqrt{(0,9048 + 0,05)^2 + 0,3^2}}{0,0484 \sqrt{(0,9672 - 0,05)^2 + 0,462^2}} \times \frac{\sqrt{(0,5 - 0,05)^2 + 0,3^2}}{\sqrt{(0,88 + 0,05)^2 + 0,3^2}} = 12.9506$$

que posiciona os polos complexos de malha fechada em $z = -0,0488 \pm j0,3$ e o polo real de malha fechada em $z = 0,876$. Como esse polo está bastante próximo do zero em $z = 0,88$, o seu efeito na resposta não chega a prejudicar o desempenho desejado, como mostra a Fig. 8.

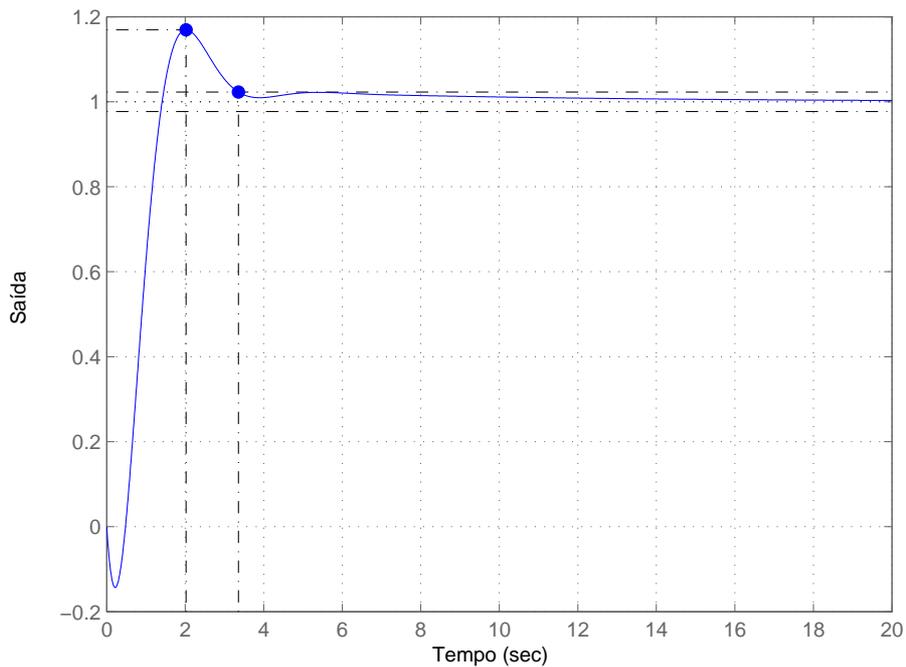


Figura 8: Saída do sistema utilizando o compensador (3).

O coeficiente de erro de velocidade é:

$$\begin{aligned}
K_v &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{Tz} C(z)G(z) \\
&= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} 12,9506 \frac{z-0,88}{z+0,5} 0,0484 \frac{z+0,9672}{(z-1)(z-0,9048)} \\
&= 12,9506 \frac{0,2}{1,5} 0,0484 \frac{1,9672}{0,0952} \\
K_v &= 1.7270
\end{aligned}$$

Portanto, todas as especificações do projeto foram atendidas.