Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Escola de Engenharia
Departamento de Engenharia Elétrica
ENG04037 Sistemas de Controle Digitais

Filtro de Kalman

Prof. Walter Fetter Lages

7 de junho de 2009

1 Filtro de Kalman

O artigo de Kalman descrevendo uma solução recursiva para o problema de filtragem linear de dados discretos foi publicado em 1960 [2]. Nesta mesma época os avanços na tecnologia de computadores digitais tornou possível a implementação de soluções recursivas para diversas aplicações em tempo real. Assim, o filtro de Kalman "pegou"quase que imediatamente.

Considere o sistema dinâmico descrito por (1):

$$x(k+1) = A(k)x(k) + w(k) \tag{1}$$

onde $x(k)$ é o estado do sistema, $A(k)$ é a matriz que relaciona $x(k)$ e $x(k+1)$ sem função forçante e $w(k)$ é um ruído branco com estrutura de covariância conhecida, denominado ruído de processo.

A observação (medida) do processo é descrita por (2):

$$y(k) = C(k)x(k) + v(k) \tag{2}$$

onde $C(k)$ é a matriz que relaciona $x(k)$ e $y(k)$ sem função forçante e $v(k)$ é um ruído branco com estrutura de covariância conhecida, denominado ruído de medida.

As matrizes de covariância são dadas por

$$E\left[w(k)w^T(i)\right] = P_w(k)\delta(k-i) \tag{3}$$
$$E\left[v(k)v^T(i)\right] = P_v(k)\delta(k-i) \tag{4}$$
$$E\left[w(k)v^T(i)\right] = 0 \tag{5}$$

Seja $\hat{x}(k|k-1)$ uma estimativa a priori do processo no instante k, baseada no conhecimento do processo até o instante $k-1$. Definido-se o erro de estimação como

$$e(k|k-1) = x(k) - \hat{x}(k|k-1) \tag{6}$$

a matriz de covariância associada à $e(k|k-1)$ será dada por

$$\begin{aligned} P(k|k-1) &= E\left[e(k|k-1)e^T(k|k-1)\right] \\ &= E\left[\left(x(k)-\hat{x}(k|k-1)\right)\left(x(k)-\hat{x}(k|k-1)\right)^T\right] \end{aligned} \tag{7}$$

Deseja-se, agora, utilizar a medida $y(k)$ para melhorar a estimativa *a priori* $\hat{x}(k|k-1)$. Para tanto, será utilizada uma combinação linear da medida com ruído com a sua estimativa *a priori*, conforme a expressão (8)

$$\hat{x}(k|k) = \hat{x}(k|k-1) + K(k)\left(y(k) - C(k)\hat{x}(k|k-1)\right) \tag{8}$$

Obviamente, o ganho $K(k)$ deve ser determinado de forma que a estimativa atualizada seja ótima em algum sentido. Em particular, será utilizado o critério do mínimo erro médio quadrático.

A matriz de covariância associada com a estimativa atualizada *a posteriori* é dada por

$$\begin{aligned} P(k|k) &= E\left[e(k|k)e^T(k|k)\right] \\ &= E\left[\left(x(k)-\hat{x}(k|k)\right)\left(x(k)-\hat{x}(k|k)\right)^T\right] \end{aligned} \tag{9}$$

Substituindo-se (2) em (8) e a seguir em (9) tem-se

$$\begin{aligned} P(k|k) = E\{&[x(k)-\hat{x}(k|k-1) - K(k)\left(C(k)x(k)+v(k)-C(k)\hat{x}(k|k-1)\right)] \\ &[x(k)-\hat{x}(k|k) - K(k)\left(C(k)x(k)+v(k)-C(k)\hat{x}(k|k-1)\right)]^T\Big\} \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} P(k|k) = E\{&[x(k)-\hat{x}(k|k-1) - K(k)C(k)\left(x(k)-\hat{x}(k|k-1)\right)+K(k)v(k)] \\ &[x(k)-\hat{x}(k|k) - K(k)C(k)\left(x(k)-\hat{x}(k|k-1)\right)+K(k)v(k)]^T\Big\} \end{aligned}$$

que pode ser rearranjado para

$$
\begin{aligned}
P(k|k) = E\{&[(I - K(k)C(k))\,(x(k) - \hat{x}(k|k-1)) + K(k)v(k)] \\
&[(I - K(k)C(k))\,(x(k) - \hat{x}(k|k)) + K(k)v(k)]^T\Big\}
\end{aligned}
$$

Computando-se as esperanças, lembrando a expressão (7) e que $(x(k) - \hat{x}(k|k-1))$ não está correlacionada com o erro de medida $v(k)$, pode-se escrever

$$
P(k|k) = (I - K(k)C(k))\,P(k|k-1)\,(I - K(k)C(k))^T + K(k)P_v(k)K^T(k) \tag{10}
$$

Deseja-se encontrar o valor de $K(k)$ que minimiza os termos da diagonal principal de $P(k|k)$, pois estes elementos são as variâncias dos erros de estimação do estado sendo estimado. Derivando-se (10) com relação a $K(k)$ e igualando-se a zero tem-se

$$
\frac{\partial P(k|k)}{\partial K(k)} = -2\,(I - K(k)C(k))\,P(k|k-1)C^T(k) + 2K(k)P_v(k) = 0
$$

$$
-P(k|k-1)C^T(k) + K(k)\Big(C(k)P(k|k-1)C^T(k) + P_v(k)\Big) = 0
$$

ou

$$
K(k) = P(k|k-1)C^T(k)\Big(C(k)P(k|k-1)C^T(k) + P_v(k)\Big)^{-1} \tag{11}
$$

que minimiza o erro médio quadrático da estimação e é denominado *ganho de Kalman*.

A matriz de covariância associada à estimativa ótima pode ser obtida substituindo-se (11) em (10):

$$
\begin{aligned}
P(k|k) \;&=\; P(k|k-1) \\
&-\; P(k|k-1)C^T(k)\Big(C(k)P(k|k-1)C^T(k) + P_v(k)\Big)^{-1} C(k)P(k|k-1) \\
&-\; P(k|k-1)C^T(k)\Big(C(k)P(k|k-1)C^T(k) + P_v(k)\Big)^{-T} C(k)P^T(k|k-1) \\
&+\; P(k|k-1)C^T(k)\Big(C(k)P(k|k-1)C^T(k) + P_v(k)\Big)^{-1} \\
&\quad\;\Big(C(k)P(k|k-1)C^T(k) + P_v(k)\Big) \\
&\quad\;\Big(C(k)P(k|k-1)C^T(k) + P_v(k)\Big)^{-1} C(k)P^T(k|k-1)
\end{aligned}
$$

que pode ser reescrita na forma

$$
\begin{aligned}
P(k|k) &= P(k|k-1) \\
&- P(k|k-1)C^T(k)\left(C(k)P(k|k-1)C^T(k)+P_v(k)\right)^{-1}C(k)P(k|k-1)
\end{aligned}
$$

ou ainda, utilizando-se (11),

$$P(k|k) = P(k|k-1) - K(k)C(k)P(k|k-1)$$

ou

$$P(k|k) = (I - K(k)C(k))\,P(k|k-1) \tag{12}$$

Note que a expressão (10) é válida para qualquer ganho $K(k)$, ótimo ou subótimo, enquanto a expressão (12) é válida apenas para o ganho ótimo.

Tem-se portanto um método para obter a estimativa ótima $\hat{x}(k|k)$ a partir de $\hat{x}(k|k-1)$, $P(k|k-1)$ e da medida $y(k)$ obtida no instante k. No entanto, no instante $k+1$, para que a medida $y(k+1)$ possa ser incorporada serão necessários $\hat{x}(k+1|k)$ e $P(k+1|k)$. Ou seja, é preciso projetar a estimativa atualizada $\hat{x}(k|k)$ para o instante $k+1$. Isto pode ser feito através da expressão (1), ignorando-se a contribuição de $w(k)$ porque possui média zero e não é correlacionado com os seus valores anteriores. Isto é:

$$\hat{x}(k+1|k) = A(k)\hat{x}(k|k) \tag{13}$$

A matriz de covariância do erro associado à $x(k+1|k)$ é obtida a partir de:

$$
\begin{aligned}
e(k+1|k) &= x(k+1) - \hat{x}(k+1|k) \\
&= (A(k)x(k) + w(k)) - A(k)\hat{x}(k|k) = A(k)e(k|k) + w(k)
\end{aligned}
$$

Como $w(k)$ e $e(k|k)$ são descorrelacionados, pode-se escrever

$$
\begin{aligned}
P(k+1|k) &= E\left[e(k+1|k)e^T(k+1|k)\right] \\
&= E\left[(A(k)e(k|k)+w(k))\,(A(k)e(k|k)+w(k))^T\right] \\
&= A(k)P(k|k)A^T(k) + P_w(k) \qquad (14)
\end{aligned}
$$

As expressões (8), (11), (12), (13) e (14) são as expressões do filtro de Kalman recursivo. Note que as expressões (11), (12) e (14) não dependem de variáveis do sistema (apenas de parâmetros) e portanto podem ser calculadas *off-line*.

2 Filtro de Kalman para Sistemas com Entradas Determinísticas

Em grande parte das aplicações em controle, os processos cujos estados devem ser estimados possuem entradas determinísticas, ou seja

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k) + w(k) \tag{15}$$

onde $B(k)u(k)$ representa uma entrada determinística.

Como o sistema é linear, pode-se utilizar superposição e considerar as entradas aleatórias e determinísticas separadamente. O filtro de Kalman necessita ser um pouco modificado para tratar este tipo de sistema. A única modificação necessária é na expressão da projeção da estimativa (13) que passará a ser

$$\hat{x}(k+1|k) = A(k)\hat{x}(k|k) + B(k)u(k) \tag{16}$$

3 Exercícios

A figura 1 mostra um esboço do processo térmico PT236 da Feedback. Utilizando-se um período de amostragem de $2s$, pode-se obter o seguinte modelo discreto para este sistema:

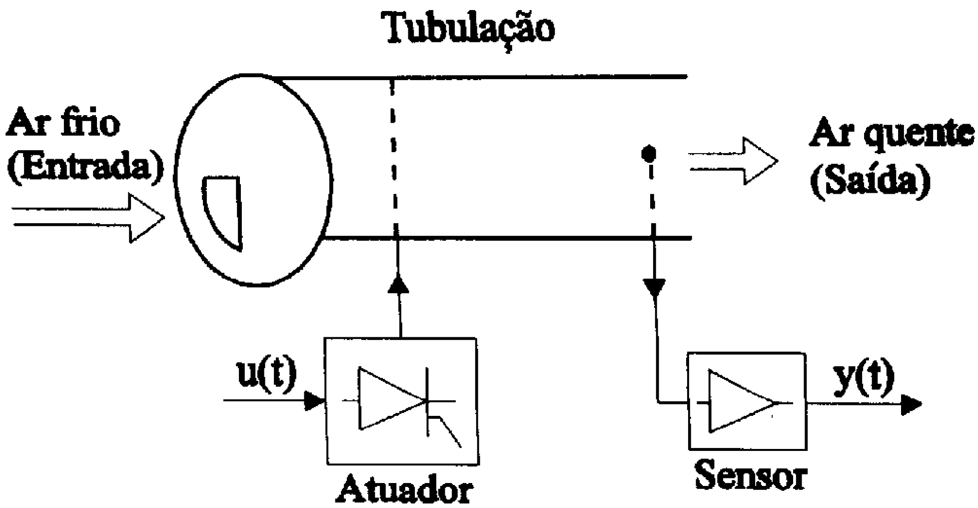

Figura 1: Processo Térmico PT326.

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.2272 & 1.0 \\ -0.3029 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.0634 \\ 0.0978 \end{bmatrix} u(k) + w(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + v(k)$$

com $P_w(k) = 0.01I$ e $P_v(k) = 0.04$.

1. Simule a resposta do sistema ao degrau para $k = [0, 150]$ e apresente os gráficos de $x_1(k)$, $x_2(k)$ e $y(k)$.

2. Utilize o filtro de Kalman e obtenha uma estimativa para o estado do sistema. Apresente os gráficos de $x(k)$, $\hat{x}_1(k)$, $\hat{x}_2(k)$ e da diagonal principal da matriz de covariância.

Referências

[1] L. A. Aguirre. *Introdução à Identificação de Sistemas: Técnicas Lineares e Não Lineares Aplicadas a Sistemas Reais*. Editora UFMG, Belo Horizonte, MG, 2000.

[2] R. E. Kalman. A new approach to linear filtering and prediction problems. *Transactions of the ASME Journal of Basic Engineering*, pages 35–45, March 1960.

A Resultados Úteis

Lema 1 (Lema de Inversão de Matrizes[1]) *Sejam A, B, C e D matrizes tais que A, C e $(A+BCD)$ sejam inversíveis, então*

$$(A+BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B\left(C^{-1} + DA^{-1}B\right)^{-1}DA^{-1} \tag{17}$$

Prova 1 *Pré-multiplicando-se ambos os lados de (17) por $(A+BCD)$ tem-se:*

$$(A+BCD)(A+BCD)^{-1} = (A+BCD)A^{-1} - (A+BCD)A^{-1}B\left(C^{-1} + DA^{-1}B\right)^{-1}DA^{-1}$$

$$I = I + BCDA^{-1} - \left(I + BCDA^{-1}\right)B\left(C^{-1} + DA^{-1}B\right)^{-1}DA^{-1}$$

$$I = I + BCDA^{-1} - \left(B + BCDA^{-1}B\right)\left(C^{-1} + DA^{-1}B\right)^{-1} DA^{-1}$$

Colocando-se BC *em evidência no terceiro termo, tem-se*

$$I = I + BCDA^{-1} - BC\left(C^{-1} + DA^{-1}B\right)\left(C^{-1} + DA^{-1}B\right)^{-1} DA^{-1}$$

$$I = I + BCDA^{-1} - BCDA^{-1}$$

e portanto

$$I = I$$