

Universidade Federal do Rio Grande do Sul  
Escola de Engenharia  
Departamento de Engenharia Elétrica  
ENG04037 Sistemas de Controle Digitais

## Observadores de Estado

Prof. Walter Fetter Lages

7 de junho de 2009

### 1 Introdução

Para utilizar realimentação de estados é necessário conhecer o estado do sistema. No entanto, nem sempre é possível medir todos os componentes do estado. Nesses casos, se o sistema for completamente observável<sup>1</sup>, é possível construir-se um observador para obter-se uma estimativa do estado a partir do conhecimento da entrada e da saída do sistema.

### 2 Observador em Malha Aberta

Seja o sistema dado por

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad (1)$$

$$y(k) = Cx(k) \quad (2)$$

que pode ser representado pelo diagrama de blocos mostrado na fig. 1

Conhecendo-se a entrada do sistema, pode-se construir um observador de estado para esse sistema como mostrado na Fig. 2.

No entanto, esse observador não será muito efetivo na prática, pois qualquer erro no estado inicial do sistema ou nos parâmetros fará  $\hat{x}(k)$  divergir de  $x(k)$ . Para resolver esse problema, pode-se introduzir um termo de correção, proporcional à diferença de  $y(k)$  e  $\hat{y}(k) \triangleq C\hat{x}(k)$ .

---

<sup>1</sup>Um sistema é completamente observável, se existir um  $t_0$  finito tal que o conhecimento das entradas  $u(t)$  e das saídas  $y(t)$  para  $t < t_0$  é suficiente para determinar o estado inicial do sistema  $x(0)$ .

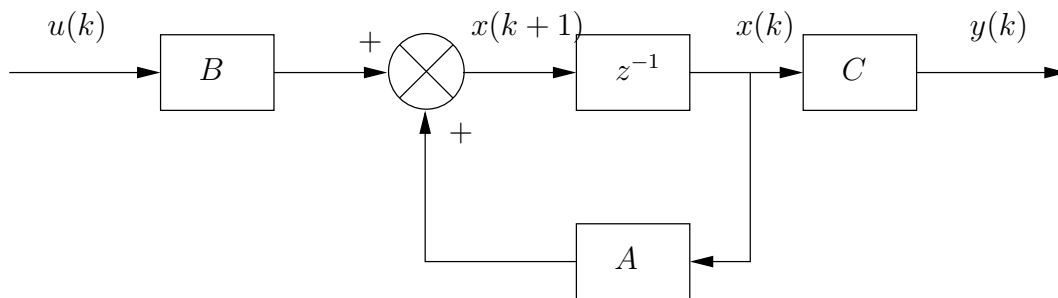


Figura 1: Diagrama de blocos do sistema (1).

### 3 Observador em Malha Fechada

Conhecendo-se além da entrada do sistema, a sua saída, pode-se construir um observador de estado em malha fechada para o sistema como mostrado na Fig. 3.

$$\begin{aligned}\hat{x}(k+1) &= A\hat{x}(k) + Bu(k) + L(y(k) - \hat{y}(k)) \\ \hat{x}(k+1) &= A\hat{x}(k) + Bu(k) + LC(x(k) - \hat{x}(k))\end{aligned}$$

Definindo  $\tilde{x}(k) = x(k) - \hat{x}(k)$ , tem-se

$$\begin{aligned}\tilde{x}(k+1) &= x(k+1) - \hat{x}(k+1) = Ax(k) + Bu(k) - A\hat{x}(k) - Bu(k) - LC\tilde{x}(k) \\ \tilde{x}(k+1) &= A(x(k) - \hat{x}(k)) - LC\tilde{x}(k) \\ \tilde{x}(k+1) &= \underbrace{(A - LC)}_{\substack{\text{autovalores} \\ \text{podem ser} \\ \text{alocados} \\ \text{livremente} \\ \text{escolhendo-se L}}}\tilde{x}(k)\end{aligned}$$

Portanto, se o sistema for completamente observável<sup>2</sup>, pode-se dar a  $\tilde{x}(k)$  o desempenho desejado. Em geral, deseja-se que  $\tilde{x}(k)$  convirja rapidamente (mais rápido do que a evolução de  $x(k)$ ) para zero.

Ainda sob a hipótese do sistema ser completamente observável, pode-se escrevê-lo na forma:

---

<sup>2</sup>Um sistema de ordem  $n$  é completamente observável se e somente se  $\text{rank}(\mathcal{O}(A, C)) =$

$$\text{rank} \left( \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \right) = n.$$

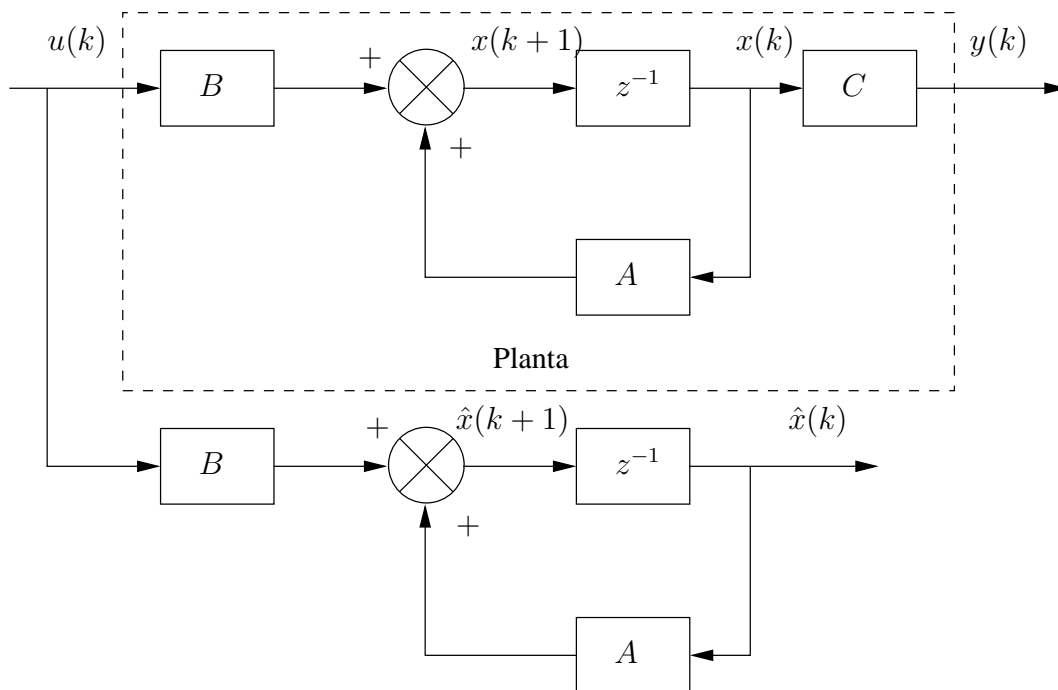


Figura 2: Observador em malha aberta para o sistema mostrado na Fig. 1.

$$\begin{aligned}\bar{x}(k+1) &= \bar{A}\bar{x}(k) + \bar{B}u(k) \\ y(k) &= \bar{C}\bar{x}(k)\end{aligned}$$

com

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_{n-1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -\alpha_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -\alpha_1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} \beta_n \\ \beta_{n-1} \\ \vdots \\ \beta_2 \\ \beta_1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{C} = [0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ 1]$$

onde  $\alpha_n$  e  $\beta_n$  são os coeficientes da função de transferência

$$G(z) = \frac{\beta_1 z^{n-1} + \beta_2 z^{n-2} + \dots + \beta_n}{z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \alpha_2 z^{n-2} + \dots + \alpha_n}$$

através da transformação de similaridade

$$P = \begin{bmatrix} \alpha_{n-1} & \alpha_{n-2} & \cdots & \alpha_1 & 1 \\ \alpha_{n-2} & \alpha_{n-3} & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \alpha_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

De onde

$$\begin{aligned} \bar{A} &= PAP^{-1} \\ \bar{B} &= PB \\ \bar{C} &= CP^{-1} \end{aligned}$$

Considerando-se a expressão do estimador de estado

$$\hat{x}(k+1) = A\hat{x}(k) + Bu(k) + L(y(k) - \hat{y}(k))$$

e utilizando-se a transformação de similaridade, resulta

$$\hat{x}(k+1) = P^{-1}(\bar{A} - \bar{L}\bar{C})P\hat{x}(k) + Bu(k) + Ly(k)$$

[  $P^{-1}(\bar{A} - \bar{L}\bar{C})P$  tem os mesmos autovalores de  $A - LC$ .

[ Fazendo-se  $\bar{L} = [(\bar{\alpha}_n - \alpha_n) \quad (\bar{\alpha}_{n-1} - \alpha_{n-1}) \quad \cdots \quad (\bar{\alpha}_1 - \alpha_1)]$  onde  $\bar{\alpha}_i$  são os coeficientes do polinômio característico desejado, tem-se

$$\bar{A} - \bar{L}\bar{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -\bar{\alpha}_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -\bar{\alpha}_{n-1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -\bar{\alpha}_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -\bar{\alpha}_{n-1} \end{bmatrix}$$

## 4 Algoritmo para Projeto de Observador de Luenberger

Dado um sistema completamente observável na forma

$$\begin{aligned}x(k+1) &= Ax(k) + bu(k) \\ y(k) &= Cx(k)\end{aligned}$$

determinar um observador de estados na forma  $\hat{x}(k+1) = A\hat{x}(k) + Bu(k) + L(y(k) - \hat{y}(k))$  de forma que  $\hat{x}(k)$  convirja assintoticamente para  $x$ , com autovalores  $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \dots, \bar{\lambda}_n$ .

1. Obter o polinômio característico de A

$$\det(zI - A) = z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \dots + \alpha_n$$

2. Obter o polinômio característico do observador

$$(z - \bar{\lambda}_1)(z - \bar{\lambda}_2) \dots (z - \bar{\lambda}_n) = z^n + \bar{\alpha}_1 z^{n-1} + \dots + \bar{\alpha}_n$$

3. Calcular a transformação de similaridade

$$P = \begin{bmatrix} \alpha_{n-1} & \alpha_{n-2} & \dots & \alpha_1 & 1 \\ \alpha_{n-2} & \alpha_{n-3} & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \alpha_1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

4. Calcular o ganho

$$\bar{L} = [(\bar{\alpha}_n - \alpha_n) \quad (\bar{\alpha}_{n-1} - \alpha_{n-1}) \quad \dots \quad (\bar{\alpha}_1 - \alpha_1)]$$

5.  $L = P^{-1}\bar{L}$

## 5 Exercícios

Dado o sistema

$$\begin{aligned}x(k+1) &= \begin{bmatrix} 10 & 1,5 & 0,1 \\ -0,1 & 9,8 & 1,2 \\ -1,2 & -2,5 & 6,2 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0,01 \\ 0,1 \\ 1,2 \end{bmatrix} u(k) \\ y &= [1 \ 0 \ 0] x(k)\end{aligned}$$

determinar  $L$  de forma que o observador tenha como autovalores  $\lambda_1 = 0,8$ ,  $\lambda_2 = 0,7$  e  $\lambda_3 = 0,2$ .

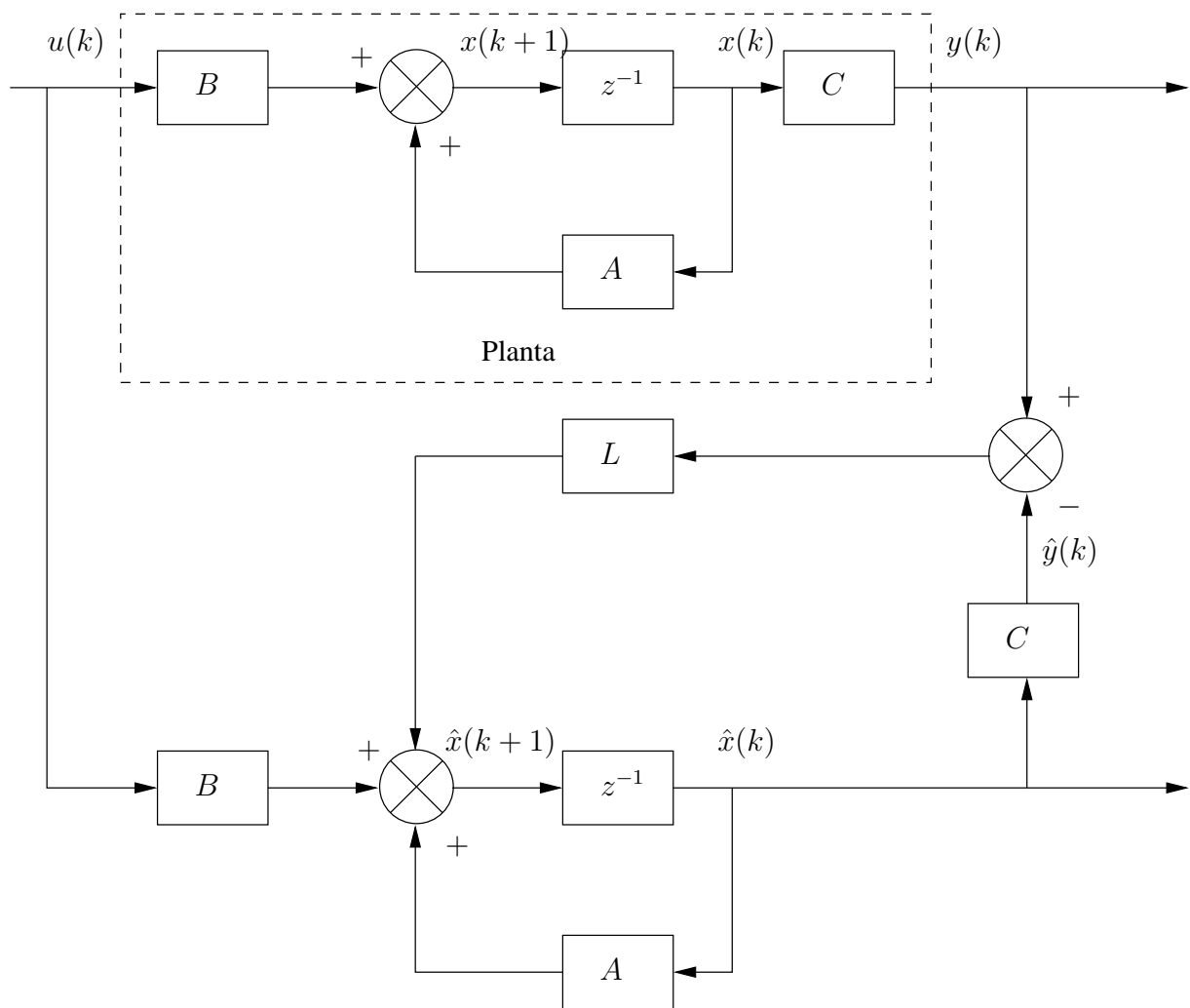


Figura 3: Observador em malha fechada para o sistema mostrado na Fig. 1.