

Modelagem de Sistemas Discretos

Prof. Walter Fetter Lages

30 de agosto de 2011

1 Introdução

Considere o sistema mostrado na Fig. 1.

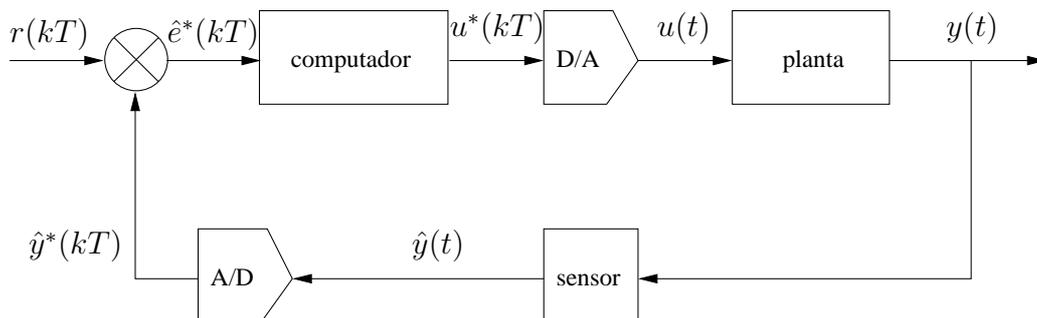


Figura 1: Diagrama de blocos de um sistema amostrado.

Assume-se que o A/D amostra $y(t)$ em instantes de tempo discretos e os passa ao computador (abstrai-se o fato de que existem erros no sensor). A tarefa do computador é obter estas amostras e computar o sinal de controle a ser enviado através do D/A. O A/D e o D/A serão abordados posteriormente. Aqui se está interessado no tratamento dos dados realizado pelo computador.

Sejam os sinais de erro até o instante k dados por $e(0), e(1), \dots, e(k)$ e os sinais de saída anteriores ao instante k , $u(0), u(1), \dots, u(k-1)$. O próximo sinal de controle será dado por alguma função na forma (1):

$$u(k) = f(e(0), e(1), \dots, e(k), u(0), u(1), \dots, u(k-1)) \quad (1)$$

Se está interessado em sistemas lineares de dimensão finita. Portanto, assume-se que $f(\cdot)$ é linear e depende de um número finito de valores de $e(\cdot)$ e $u(\cdot)$. Logo tem-se

$$u(k) = -a_1u(k-1) - a_2u(k-2) - \dots - a_nu(k-n) + b_0e(k) + b_1e(k-1) + \dots + b_me(k-m) \quad (2)$$

que é denominada equação de recorrência ou equação a diferenças.

⌈ A rigor, (2) não é uma equação a diferenças. No entanto, pode-se mostrar que ela é equivalente a uma equação a diferenças:

Definindo

$$\begin{aligned} \Delta u(k) &= u(k) - u(k-1) \\ \Delta^2 u(k) &= \Delta u(k) - \Delta u(k-1) \\ &\vdots \\ \Delta^n u(k) &= \Delta^{n-1}u(k) - \Delta^{n-1}u(k-1) \end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned} u(k) &= u(k) \\ u(k-1) &= u(k) - \Delta u(k) \\ &\vdots \\ u(k-2) &= u(k) - 2\Delta u(k) + \Delta^2 u(k) \end{aligned}$$

Assim, uma equação de recorrência de 2ª ordem, por exemplo, com a_1 , a_2 e $b_0 \neq 0$ e $b_1 = b_2 = 0$ é

$$u(k) = -a_1u(k-1) - a_2u(k-2) + b_0e(k)$$

pode ser escrita como

$$u(k) + a_1(u(k) - \Delta u(k)) + a_2(u(k) - 2\Delta u(k) + \Delta^2 u(k)) = b_0e(k)$$

ou

$$a_2\Delta^2 u(k) - (a_1 + a_2)\Delta u(k) + (a_2 + a_1 + 1)u(k) = b_0e(k)$$

Embora as duas expressões sejam equivalentes, a forma de equação de recorrência é mais conveniente para implementação no computador. Portanto, esta será a forma utilizada, embora continue a ser chamada de equação a diferenças ⌋

2 Solução de Equações a Diferenças

Seja a sequência de Fibonacci dada por $u(k) = u(k - 1) + u(k - 2)$, dados $u(0)$ e $u(1)$.

Supondo $u(0) = u(1) = 1$, tem-se

$$u(k) = 1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots \text{ para } k = 2, 3, \dots$$

Pode-se perceber que nesse caso, $u(k)$ cresce indefinidamente. Se fosse a saída de um sistema, o sistema seria instável. Por outro lado, se $u(k)$ converge para algum valor quando $k \rightarrow \infty$, o sistema é estável.

Deseja-se obter um método para determinar se uma equação a diferenças é estável ou não, e se ter uma ideia da forma da solução, sem precisar resolvê-la explicitamente.

Uma forma de resolver este problema é assumir uma forma de solução para a equação com constantes a determinar e obter os valores das constantes a partir das condições iniciais.

Para equações diferenciais ordinárias, contínuas com constantes lineares, a solução tem a forma e^{at} , que na forma discretizada seria $e^{a(kT)}$ ou ainda $(e^{aT})^k = \lambda^k$. Assim, a forma geral da solução da equação a diferenças seria λ^k .

Para o caso da sequência de Fibonacci, tem-se

$$u(k) = u(k - 1) + u(k - 2)$$

Supondo $u(k) = A\lambda^k$, tem-se

$$A\lambda^k = A\lambda^{k-1} + A\lambda^{k-2}$$

Assumindo-se que $A \neq 0$ e $\lambda \neq 0$, pode-se dividir por A e multiplicar por λ^{-k} , resultando

$$1 = \lambda^{-1} + \lambda^{-2}$$

ou

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

e portanto

$$\lambda = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$$

ou ainda $\lambda_1 \approx 1,618$ e $\lambda_2 \approx -0,618$.

Logo,

$$u(k) = A_1 \lambda_1^k + A_2 \lambda_2^k$$

Utilizando as condições iniciais ($u(0) = u(1) = 1$), pode-se determinar as constantes de

$$\begin{cases} 1 = A_1 + A_2 \\ 1 = A_1 \lambda_1 + A_2 \lambda_2 \end{cases}$$

que resulta

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \approx 0,7236 \\ A_2 &= \frac{\sqrt{5} - 1}{2\sqrt{5}} \approx 0,2764 \end{aligned}$$

E portanto, a solução da equação é

$$u(k) = 0.7236 \underbrace{(1,618)^k}_{\substack{\text{cresce} \\ \text{indefinidamente} \\ \text{quando } k \\ \text{cresce}}} + 0.2764(-0,618)^k$$

A equação em λ obtida ao fazer-se $u(k) = A\lambda^k$ é chamada de equação característica e é uma equação polinomial em λ . Portanto, em geral, possui soluções complexas. Se alguma das soluções estiver fora do círculo unitário no plano complexo¹, a equação a diferenças será instável para alguma condição inicial finita. Se todas as raízes do polinômio característico estiverem dentro do círculo unitário, então a equação a diferenças será estável, como mostra a Fig. 2.

3 Aproximação de Equações Diferenciais por Equações a Diferenças

Considere o problema de obter uma expressão recursiva para o cálculo de uma aproximação para a integral

$$u(t) = \int_0^t e(t) dt \tag{3}$$

utilizando apenas valores de $e(\cdot)$ amostrados.

¹Ou seja, se $|\lambda| > 1$.

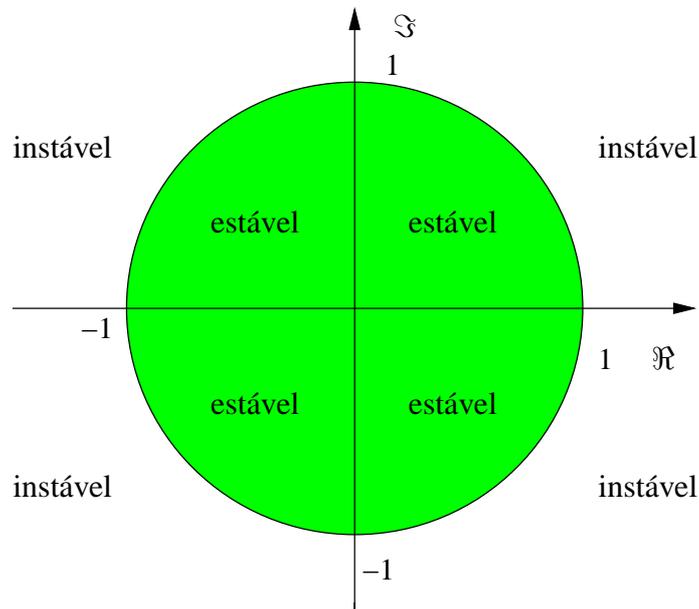


Figura 2: Plano complexo.

Assumindo que se tem uma aproximação para a integral no instante $k - 1$, $u(k - 1)$, o problema é obter uma expressão para $u(k)$. É possível obter-se diversas soluções diferentes para este problema, dependendo de quais aproximações são feitas, mas três tipos de aproximações são particularmente interessantes em problemas de controle, devido às suas propriedades²:

- *Forward Differences*

Nesta aproximação considera-se que o valor de $e(t)$ no intervalo $((k - 1)T, kT)$ é constante e dado por $e((k - 1)T) = e(k - 1)$, como mostra a Fig. 3.

Consequentemente, tem-se

$$u(k) = u(k - 1) + Te(k - 1) \quad (4)$$

- *Backward Difference*

Nesta aproximação considera-se que o valor de $e(t)$ no intervalo $((k - 1)T, kT)$ é constante e dado por $e(kT) = e(k)$, como mostra a Fig. 4.

Consequentemente, tem-se

$$u(k) = u(k - 1) + Te(k) \quad (5)$$

²Estas propriedades serão estudadas em detalhes futuramente.

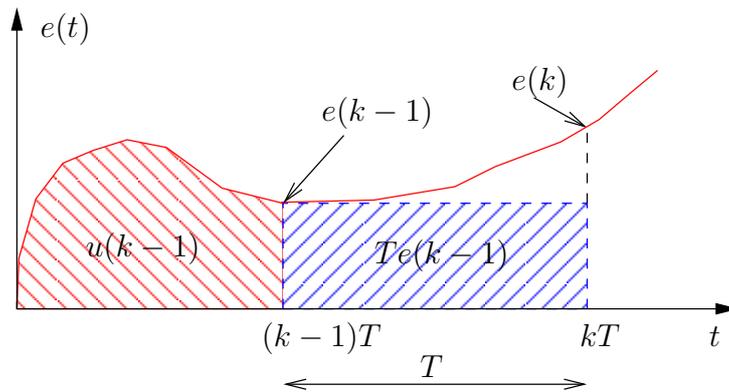


Figura 3: Aproximação forward differences.

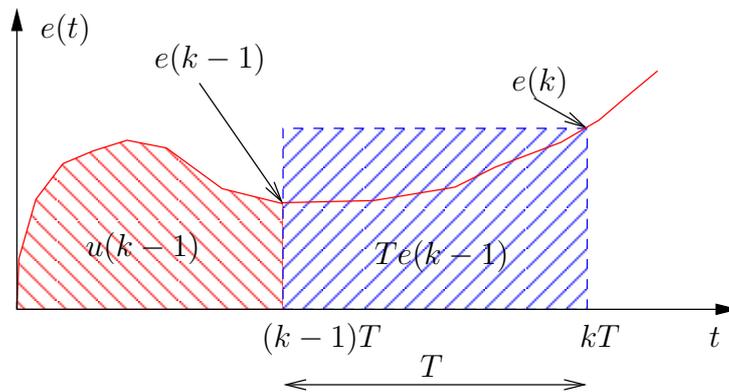


Figura 4: Aproximação backward differences.

- Regra do Trapézio

Nesta aproximação considera-se que o valor de $e(t)$ no intervalo $((k-1)T, kT)$ é constante e dado pela média entre $e((k-1)T) = e(k-1)$ e $e(kT) = e(k)$, como mostra a Fig. 5. Esta aproximação também é chamada de aproximação bilinear ou aproximação de Tustin.

Consequentemente, tem-se

$$u(k) = u(k-1) + \frac{T}{2} (e(k) + e(k-1)) \quad (6)$$

É possível obter aproximações equivalentes partindo-se da versão diferencial de (3):

$$e(t) = \frac{du(t)}{dt} \quad (7)$$

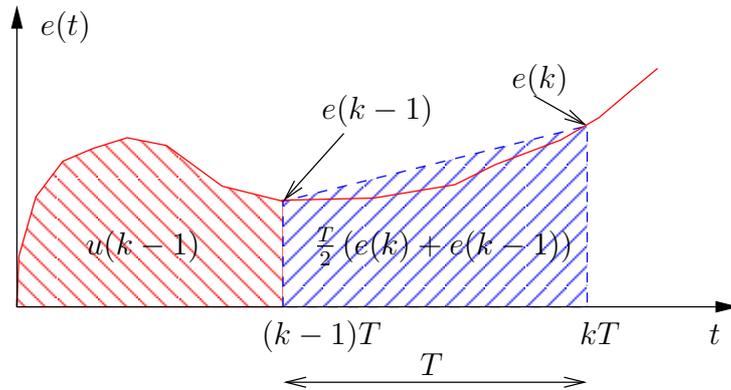


Figura 5: Aproximação de Tustin.

de forma que as aproximações tornam-se:

- *Forward differences*

$$e(k) = \frac{u(k+1) - u(k)}{T} \quad (8)$$

- *Backward differences*

$$e(k) = \frac{u(k) - u(k-1)}{T} \quad (9)$$

- *Regra do trapézio*

$$e(k) = 2 \frac{u(k) - u(k-1)}{T} - e(k-1) \quad (10)$$

┌

Pode-se observar que as equações a diferenças podem ser utilizadas para aproximar equações diferenciais que representam sistemas físicos. Essas equações a diferenças são semelhantes às estudadas anteriormente, porém não são homogêneas. Embora existam diversos métodos para resolver equações a diferenças não homogêneas, o método de interesse aqui consiste em considerar a parte não homogênea da equação como entrada de um sistema cuja saída é a variável homogênea, como mostrado na Fig. 6.

Se a equação a diferenças for linear e com coeficientes constantes, pode-se descrever a relação entre $u(k)$ e $e(k)$ através de uma função de transferência. Essa função de transferência será definida utilizando-se a transformada z . A transformada z transforma uma sequência de números em uma função da variável z .

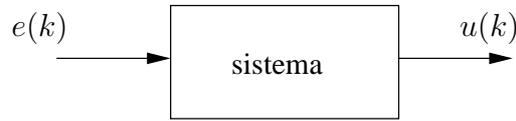


Figura 6: Sistema representado por uma equação a diferenças.

4 Transformada z

Considere o sinal discreto

$$y(k) = \begin{cases} \left(\frac{1}{4}\right)^k & k \geq 0 \\ \left(\frac{1}{9}\right)^{-k} & k < 0 \end{cases}$$

Esse sinal pode ser representado por uma sequência infinita:

$$S_1 = \left\{ \dots, \left(\frac{1}{9}\right)^2, \left(\frac{1}{9}\right), 1, \left(\frac{1}{4}\right), \left(\frac{1}{4}\right)^2, \dots \right\}$$

ou ainda por uma série infinita

$$S_2 = \dots + \left(\frac{1}{9}\right)^2 z^2 + \left(\frac{1}{9}\right) z + 1 + \left(\frac{1}{4}\right) z^{-1} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 z^{-2} + \dots$$

onde z pode ser encarado como um marcador de posição dos elementos de S_1 . Assim, para os valores de z para os quais a série converge, pode-se obter uma representação compacta para o sinal $y(k)$. Reescrevendo S_2 na forma:

$$S_2 = \dots + \underbrace{\left(\frac{1}{9}\right)^2 z^2 + \left(\frac{1}{9}\right) z + 1}_{S'_2} + 1 + \underbrace{\left(\frac{1}{4}\right) z^{-1} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 z^{-2} + \dots}_{S''_2} - 1 = S'_2 + S''_2 - 1$$

onde S'_2 converge para $|z| < 9$ e S''_2 converge para $|z| > \frac{1}{4}$.

$$S'_2 = \frac{1}{1 - \frac{z}{9}}$$

$$S''_2 = \frac{1}{1 - (4z)^{-1}}$$

e portanto

$$S_2 = \frac{1}{1 - \frac{z}{9}} + \frac{1}{1 - (4z)^{-1}} - 1 = \frac{35z}{(9-z)(4z-1)}$$

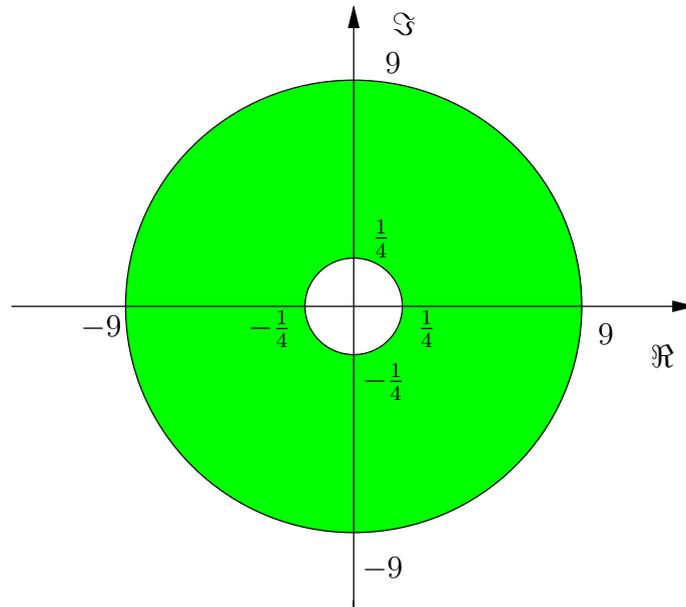


Figura 7: Região de convergência de S_2 .

A região de convergência de S_2 pode ser vista na Fig. 7.

Na região de convergência, S_2 é denominada transformada z de $y(k)$ e representada por $\mathcal{Z}[y(k)] = Y(z)$.

Definição 1 (Transformada z) Seja um sinal com valores discretos $\dots, e(-1), e(0), e(1), \dots, e(k), \dots$. A sua transformada z é

$$E(z) = \mathcal{Z}[e(k)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e(k)z^{-k}, \text{ com } r_0 < |z| < R_0$$

assumindo que se pode encontrar os valores r_0 e R_0 que delimitam uma região no plano complexo para a qual a série converge.

Exemplo 1 Calcular a transformada z do sinal $e^{-at}u(t)$ amostrado com um período T .

$$e(k) = e^{-akT}u(kT)$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}[e(k)] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-akT} u(kT) z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-akT} z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (e^{-aT} z^{-1})^k \\
&= \frac{1}{1 - e^{-aT} z^{-1}}, \quad e^{-aT} < |z| < \infty \\
&= \frac{z}{z - e^{-aT}}, \quad |z| > e^{-aT}
\end{aligned}$$

5 Função de Transferência

Considerando o caso da integração pela regra trapezoidal, tem-se um sistema como o mostrado na Fig. 8

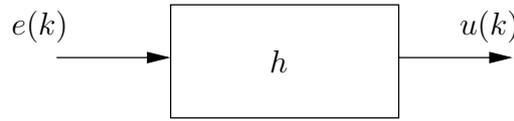


Figura 8: Função de Transferência.

cuja saída é dada por

$$u(k) = u(k-1) + \frac{T}{2} (e(k) + e(k-1)) \quad (11)$$

Deseja-se obter a função de transferência $H(z)$ que representa (11). Para tanto, multiplica-se (11) por z^{-k} e soma-se em k , resultando

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-\infty}^{\infty} u(k) z^{-k} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(k-1) z^{-k} + \frac{T}{2} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} e(k) z^{-k} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} e(k-1) z^{-k} \right) \\
U(z) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(k-1) z^{-(k-1)} z^{-1} + \frac{T}{2} \left(E(z) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} e(k-1) z^{-(k-1)} z^{-1} \right) \\
U(z) &= U(z) z^{-1} + \frac{T}{2} (E(z) + E(z) z^{-1}) \\
U(z) &= \frac{T}{2} \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}} E(z) \\
\frac{U(z)}{E(z)} &= \frac{T}{2} \frac{z + 1}{z - 1} = H(z) = \text{função de transferência da integração trapezoidal}
\end{aligned}$$

Para o caso geral, tem-se

$$u(k) = -a_1u(k-1) - a_2u(k-2) - \dots - a_nu(k-n) + b_0e(k) + b_1e(k-1) + \dots + b_me(k-m)$$

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + \dots + b_mz^{-m}}{1 + a_1z^{-1} + \dots + a_nz^{-n}}$$

Se $n \geq m$, pode-se escrever na forma

$$H(z) = \frac{b_0z^n + b_1z^{n-1} + \dots + b_mz^{n-m}}{z^n + a_1z^{n-1} + \dots + a_n} = \frac{b(z)}{a(z)}$$

6 Significado Físico de z

Suponha $H(z) = z^{-1}$:

$$\begin{aligned} U(z) &= z^{-1}E(z) \\ \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(k)z^{-k} &= z^{-1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e(k)z^{-k} \\ \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(k)z^{-k} &= z^{-1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e(k-1)z^{-(k-1)} \\ \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(k)z^{-k} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} e(k-1)z^{-(k-1)}z^{-1} \\ \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(k)z^{-k} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} e(k-1)z^{-k} \\ u(k) &= e(k-1) \end{aligned}$$

Assim, a função de transferência z^{-1} significa o sinal de entrada atrasado por um período de amostragem, como mostra a Fig. 9.

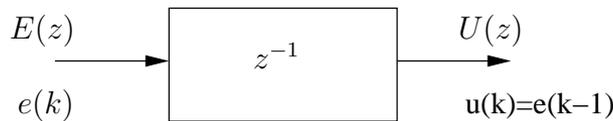


Figura 9: Função de Transferência z^{-1} .

7 Espaço de Estados

Seja,

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_m}{z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n} = \frac{b(z)}{a(z)}$$

$$Y(z) = \frac{b(z)}{a(z)} U(z) = b(z) \Xi(z)$$

$$\Xi(z) = \frac{U(z)}{a(z)}$$

$$a(z) \Xi(z) = U(z)$$

$$(z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n) \Xi(z) = U(z)$$

$$z^n \Xi(z) = U(z) - a_1 z^{n-1} \Xi(z) - a_2 z^{n-2} \Xi(z) - \dots - a_n \Xi(z)$$

Passando para o tempo,

$$\xi(k+n) = u(k) - a_1 \xi(k+n-1) - a_2 \xi(k+n-2) - \dots - a_n \xi(k)$$

Definindo

$$x_1(k+1) \triangleq \xi(k+n)$$

$$x_1(k+1) = u(k) - a_1 x_1(k) - a_2 x_1(k-1) - \dots - a_n x_1(k-n+1)$$

$$x_2(k) \triangleq x_1(k-1) \Rightarrow x_2(k+1) = x_1(k)$$

$$x_3(k) \triangleq x_2(k-1) \Rightarrow x_3(k+1) = x_2(k)$$

$$\Rightarrow x_3(k) = x_1(k-2)$$

\vdots

$$x_n(k) \triangleq x_{n-1}(k-1) \Rightarrow x_n(k+1) = x_{n-1}(k)$$

$$\Rightarrow x_n(k) = x_1(k-n+1)$$

$$\begin{cases} x_1(k+1) = -a_1x_1(k) - a_2x_2(k) - \dots - a_nx_n(k) + u(k) \\ x_2(k+1) = x_1(k) \\ \vdots \\ x_n(k+1) = x_{n-1}(k) \end{cases}$$

Definindo

$$x(k) \triangleq \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} = \text{estado do sistema}$$

pode-se escrever

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) = \text{equação de estado}$$

com

$$A = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \dots & -a_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Y(z) = (b_0z^m + b_1z^{m-1} + \dots + b_m) \Xi(z)$$

$$y(k) = b_0\xi(k+m) + b_1\xi(k+m-1) + \dots + b_m\xi(k)$$

Se $m < n \Rightarrow m = n - i ; i > 0$:

$$\xi(k+m) = \xi(k+n-i) = x_i(k)$$

e é possível escrever

$$y(k) = Cx(k) = \text{equação de saída}$$

com

$$C = [0 \quad \cdots \quad b_0 \quad b_1 \quad \cdots \quad b_m]$$

Se $m = n$:

$$\begin{aligned}\xi(k+m) &= \xi(k+n) = x_1(k+1) \\ \xi(k+m-1) &= \xi(k+n-1) = x_1(k) \\ &\vdots \\ \xi(k+m-i) &= \xi(k+n-i) = x_i(k) \\ &\vdots \\ \xi(k+m-n) &= \xi(k) = x_n(k)\end{aligned}$$

e é possível escrever

$$\begin{aligned}y(k) &= b_0x_1(k+1) + b_1x_1(k) + b_2x_2(k) + \cdots + b_nx_n(k) \\ y(k) &= b_0(-a_1x_1(k) - a_2x_2(k) - \cdots - a_nx_n(k) + u(k)) + b_1x_1(k) + b_2x_2(k) + \\ &\quad + \cdots + b_nx_n(k) \\ y(k) &= (b_1 - a_1b_0)x_1(k) + (b_2 - a_2b_0)x_2(k) + \cdots + (b_n - a_nb_0)x_n(k) + b_0u(k) \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k)\end{aligned}$$

com

$$C = [(b_1 - a_1b_0) \quad (b_2 - a_2b_0) \quad \cdots \quad (b_m - a_nb_0)]$$

e

$$D = b_0$$

Assim, para $n \geq m$, é possível escrever o modelo no espaço de estados na forma

$$\begin{aligned}x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k)\end{aligned}$$

7.1 Forma Canônica de Controle

A forma do modelo no espaço de estados obtida nas equações acima é denominada forma canônica de controle, porque permite verificar por inspeção a relação entre o sinal de controle e as variáveis de estado do sistema. Existem diversas outras formas de obter-se um modelo no espaço de estados a partir de uma função de transferência, resultado em modelos escritos em outras formas, portanto, com propriedades diferentes.

Uma mesma função de transferência pode ter diversas realizações no espaço de estados, dependendo de como são escolhidas as variáveis de estado.

7.2 Forma Canônica de Observação

Seja

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_n}{z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n}$$

Caso a ordem do numerador seja menor do que a ordem do denominador, tem-se os primeiros $b_i = 0$.

$$z^n Y(z) + a_1 z^{n-1} Y(z) + \dots + a_n Y(z) = b_0 z^n U(z) + b_1 z^{n-1} U(z) + \dots + b_n U(z)$$

$$\begin{aligned} b_n U(z) - a_n Y(z) &= z^n Y(z) + a_1 z^{n-1} Y(z) + \dots + a_{n-1} z Y(z) \\ &- b_0 z^n U(z) - b_1 z^{n-1} U(z) - \dots - b_{n-1} z U(z) \end{aligned}$$

Definindo

$$x_n(k+1) \triangleq b_n u(k) - a_n y(k) \quad (12)$$

tem-se

$$z X_n(z) = b_n U(z) - a_n Y(z)$$

e portanto

$$\begin{aligned} X_n(z) &= z^{n-1} Y(z) + a_1 z^{n-2} Y(z) + \dots + a_{n-1} Y(z) \\ &- b_0 z^{n-1} U(z) - b_1 z^{n-2} U(z) - \dots - b_{n-1} U(z) \end{aligned}$$

ou ainda

$$\begin{aligned} X_n(z) + b_{n-1}U(z) - a_{n-1}Y(z) &= z^{n-1}Y(z) + a_1z^{n-2}Y(z) + \dots + a_{n-2}zY(z) \\ &- b_0z^{n-1}U(z) - b_1z^{n-2}U(z) - \dots - b_{n-2}zU(z) \end{aligned}$$

Definindo

$$x_{n-1}(k+1) \triangleq x_n(k) + b_{n-1}u(k) - a_{n-1}y(k) \quad (13)$$

tem-se

$$zX_{n-1}(z) = X_n(z) + b_{n-1}U(z) - a_{n-1}Y(z)$$

Executando-se o procedimento acima repetidas vezes chega-se à

$$X_2(z) + b_1U(z) - a_1Y(z) = zY(z) - b_0zU(z) \quad (14)$$

Definindo-se

$$x_1(k+1) \triangleq x_2(k) + b_1u(k) - a_1y(k) \quad (15)$$

tem-se

$$zX_1(z) = X_2(z) + b_1U(z) - a_1Y(z)$$

que substituída em (14) resulta

$$zX_1(z) = zY(z) - b_0zU(z)$$

de onde

$$X_1(z) = Y(z) - b_0U(z)$$

Passando para o domínio do tempo e rearranjando

$$y(k) = x_1(k) - b_0u(k) \quad (16)$$

Substituindo (16) em (15), (13), e (12) resulta

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= x_2(k) - a_1x_1(k) + (b_1 - a_1b_0)u(k) \\ &\vdots \\ x_{n-1}(k+1) &= x_n(k) - a_{n-1}x_1(k) + (b_{n-1} - a_{n-1}b_0)u(k) \\ x_n(k+1) &= -a_nx_1(k) + (b_n - a_nb_0)u(k) \end{aligned}$$

que pode ser escrita na forma canônica de observação

$$\begin{aligned}x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k)\end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned}A &= \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -a_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ B &= \begin{bmatrix} b_1 - a_1 b_0 \\ b_2 - a_2 b_0 \\ \vdots \\ b_n - a_n b_0 \end{bmatrix} \\ C &= [1 \ 0 \ \cdots \ 0] \\ D &= [b_0]\end{aligned}$$

8 Sequência de Ponderação

Seja

$$Y(z) = H(z)U(z)$$

Obviamente, $Y(z)$ dado por

$$Y(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y(k)z^{-k}$$

será um polinômio infinito em z . Supondo que $u(k)$ é tal que $u(k) = 0$ para $k < 0$, os coeficientes do polinômio $Y(z)$ serão iguais a $y(k)$:

$$\begin{aligned}y(0) &= u(0)h(0) \\ y(1) &= u(0)h(1) + u(1)h(0) \\ y(2) &= u(0)h(2) + u(1)h(1) + u(2)h(0) \\ y(3) &= u(0)h(3) + u(1)h(2) + u(2)h(1) + u(3)h(0) \\ &\vdots\end{aligned}$$

Portanto

$$y(k) = \sum_{j=0}^{\infty} u(k)h(k-j)$$

Extendendo para o lado negativo:

$$y(k) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} u(k) \underbrace{h(k-j)}_{\substack{\text{sequência} \\ \text{de} \\ \text{ponderação}}}$$

9 Exemplo de um Servomecanismo

A figura 10 mostra um esboço de um servomecanismo.

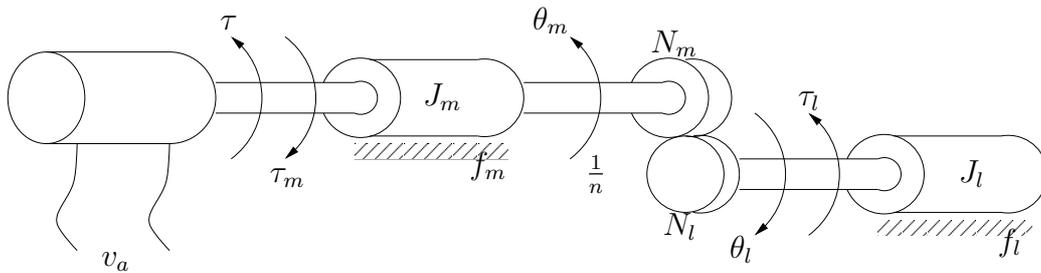


Figura 10: Esboço de um servomecanismo.

Supondo que não haja escorregamento no sistema de transmissão, pode-se escrever

$$d_m = d_l \quad (17)$$

onde d_m e d_l são os deslocamentos lineares das engrenagens do lado do motor e do lado da carga, respectivamente.

Substituindo o raio (r) e o deslocamento angular (θ) de cada engrenagem em (17) obtém-se

$$r_m \theta_m = r_l \theta_l$$

e como o número de dentes de cada engrenagem é proporcional ao seu raio, tem-se

$$N_m \theta_m = N_l \theta_l$$

ou

$$\frac{N_m}{N_l} = \frac{\theta_l}{\theta_m} = n < 1, \text{ tipicamente}$$

logo, pode-se escrever também

$$\theta_l = n\theta_m \quad (18)$$

$$\dot{\theta}_l = n\dot{\theta}_m \quad (19)$$

$$\ddot{\theta}_l = n\ddot{\theta}_m \quad (20)$$

O torque produzido pelo atuador (τ) deve vencer as perdas do lado do motor (por atrito com os mancais e inércia do rotor), representados por τ_m e o torque de reação da carga, τ_l . Ou seja,

$$\tau = \tau_m + \tau_l^* \quad (21)$$

onde τ_l^* é τ_l refletido para o eixo do motor.

As perdas do lado do motor são dadas por

$$\tau_m = J_m\ddot{\theta}_m + f_m\dot{\theta}_m \quad (22)$$

onde J_m é o momento de inércia do rotor e f_m é o atrito viscoso com os mancais.

O torque de reação da carga é dado por

$$\tau_l = J_l\ddot{\theta}_l + f_l\dot{\theta}_l \quad (23)$$

onde J_l é o momento de inércia da carga e f_l é o atrito viscoso da carga.

À (23) poderia ser acrescentado ainda mais um termo, representando a elasticidade do sistema de transmissão, resultando

$$\tau_l = J_l\ddot{\theta}_l + f_l\dot{\theta}_l + K_l(\theta_l - n\theta_m) \quad (24)$$

onde K_l é a constante de mola.

No entanto, tipicamente o sistema de transmissão é suficiente rígido para que este termo adicional possa ser desprezado.

O princípio da conservação da energia permite escrever

$$\tau_l^*\theta_m = \tau_l\theta_l$$

ou

$$\tau_l^* = \frac{\tau_l\theta_l}{\theta_m} = n\tau_l$$

e portanto, de (19), (20) e (23):

$$\tau_l^* = n^2 (J_l \ddot{\theta}_m + f_l \dot{\theta}_m) \quad (25)$$

Assim, de (21) e (22), o torque será

$$\begin{aligned} \tau &= (J_m + n^2 J_l) \ddot{\theta}_m + (f_m + n^2 f_l) \dot{\theta}_m \\ &= J_e \ddot{\theta}_m + f_e \dot{\theta}_m \end{aligned} \quad (26)$$

onde

$J_e = J_m + n^2 J_l$ é a inércia equivalente e

$f_e = f_m + n^2 f_l$ é o atrito viscoso equivalente.

O torque (26) é produzido pelo atuador cujo diagrama elétrico é mostrado na figura 11.

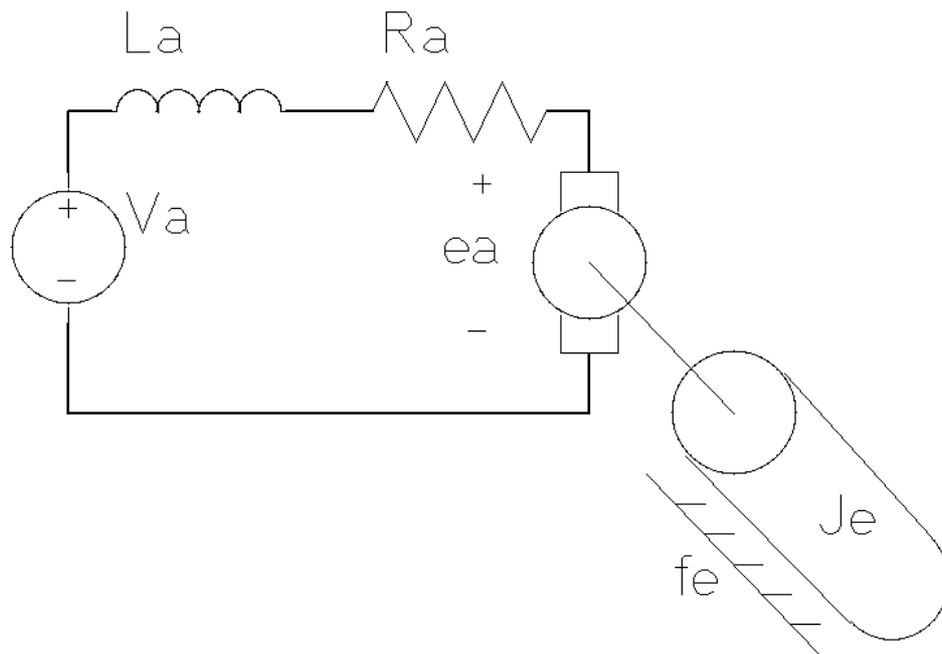


Figura 11: Diagrama elétrico do atuador.

Para motores com imã permanente o é

$$\tau = K_T i_a \quad (27)$$

onde

K_T é a constante de torque e

i_a é a corrente de armadura.

A corrente de armadura está relacionada com a tensão aplicada por

$$v_a = R_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt} + e_a \quad (28)$$

sendo

R_a a resistência de armadura;

L_a a indutância de armadura e

e_a a força contra-eleto-motriz dada por

$$e_a = K_a \dot{\theta}_m \quad (29)$$

onde K_a é a constante de armadura do motor³.

Substituindo (29) em (28)

$$v_a = R_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt} + K_a \dot{\theta}_m \quad (30)$$

9.1 Modelo Contínuo no Espaço de Estados

De (26), (30), (27) e (18) tem-se

$$\begin{aligned} \tau &= J_e \ddot{\theta}_m + f_e \dot{\theta}_m \\ v_a &= R_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt} + K_a \dot{\theta}_m \\ \tau &= K_T i_a \\ \theta_l &= n \theta_m \end{aligned}$$

que podem ser rearranjadas na forma

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_m &= \frac{K_T}{J_e} i_a - \frac{f_e}{J_e} \dot{\theta}_m \\ \frac{di_a}{dt} &= \frac{1}{L_a} v_a - \frac{R_a}{L_a} i_a - \frac{K_a}{L_a} \dot{\theta}_m \end{aligned}$$

Definindo $x_1 \triangleq i_a$, $x_2 \triangleq \dot{\theta}_m$ e $u \triangleq v_a$ tem-se

³Note que para motores com imã permanente e com as grandezas no S.I. tem-se $K_a = K_T$.

$$\begin{aligned}\ddot{x}_2 &= \frac{K_T}{J_e} x_1 - \frac{f_e}{J_e} \dot{x}_2 \\ \dot{x}_1 &= \frac{1}{L_a} u - \frac{R_a}{L_a} x_1 - \frac{K_a}{L_a} \dot{x}_2\end{aligned}$$

Definindo, adicionalmente, $x_3 \triangleq \dot{x}_2$, chega-se a:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -\frac{R_a}{L_a} x_1 - \frac{K_a}{L_a} x_3 + \frac{1}{L_a} u \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= \frac{K_T}{J_e} x_1 - \frac{f_e}{J_e} x_3\end{aligned}$$

Definindo

$$x \triangleq \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

pode-se escrever na forma matricial

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & 0 & -\frac{K_a}{L_a} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{K_T}{J_e} & 0 & -\frac{f_e}{J_e} \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u = Ax + Bu$$

A saída do sistema é

$$y = \theta_l = n\theta_m = nx_2$$

que na forma matricial é

$$y = [0 \quad n \quad 0] x = Cx$$

9.2 Modelo Contínuo no Domínio da Frequência

Seja o sistema descrito no espaço de estados

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}$$

Tomando-se a transformada de Laplace, com condições iniciais nulas, resulta

$$\begin{aligned} sX(s) &= AX(s) + BU(s) \\ Y(s) &= CX(s) + DU(s) \end{aligned}$$

de onde obtém-se

$$X(s) = (sI - A)^{-1} BU(s)$$

e

$$Y(s) = C (sI - A)^{-1} BU(s) + DU(s)$$

E portanto, a função de transferência é

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C (sI - A)^{-1} B + D \quad (31)$$

Embora seja possível obter a função de transferência a partir de (31), nem sempre esta é a forma mais fácil pois requer uma inversão de matriz que, tipicamente precisa ser feita na forma literal.

Uma forma alternativa de obter a função de transferência é tomar as transformadas de Laplace de (26), (30), (27) e (18), de onde pode-se então calcular $H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$.

Tomando-se a transformada de Laplace de (30) com condições iniciais nulas e resolvendo-se para $I_a(s)$ resulta

$$I_a(s) = \frac{v_a(s) - sK_a\Theta_m(s)}{R_a + sL_a} \quad (32)$$

e portanto, de (27)

$$T(s) = K_T I_a(s) = K_T \left(\frac{V_a(s) - sK_a\Theta_m(s)}{R_a + sL_a} \right) \quad (33)$$

Por outro lado, a transformada de Laplace de (26) é

$$T(s) = s^2 J_e \Theta_m(s) + s f_e \Theta_m(s) \quad (34)$$

Igualando-se (33) e (34) e resolvendo para $\frac{\Theta_m(s)}{V_a(s)}$ tem-se

$$\frac{\Theta_m(s)}{V_a(s)} = \frac{K_T}{s [s^2 J_e L_a + s (J_e R_a + L_a f_e) + R_a f_e + K_T K_a]}$$

Normalmente, a constante de tempo elétrica é muito menor do que a constante de tempo mecânica. Assim, pode-se desprezar L_a , obtendo-se

$$\frac{\Theta_m(s)}{V_a(s)} = \frac{K_T}{s(sJ_e R_a + R_a f_e + K_T K_a)} = \frac{K}{s(T_m s + 1)} \quad (35)$$

com

$$K = \frac{K_T}{R_a f_e + K_T K_a} = \text{constante de ganho}$$

$$T_m = \frac{R_a J_e}{R_a f_e + K_T K_a} = \text{constante de tempo}$$

De (35) e (18) tem-se

$$\frac{\Theta_l(s)}{V_a(s)} = \frac{n K_T}{s(sJ_e R_a + R_a f_e + K_T K_a)} \quad (36)$$

A figura 12 mostra um diagrama de blocos do servomecanismo.

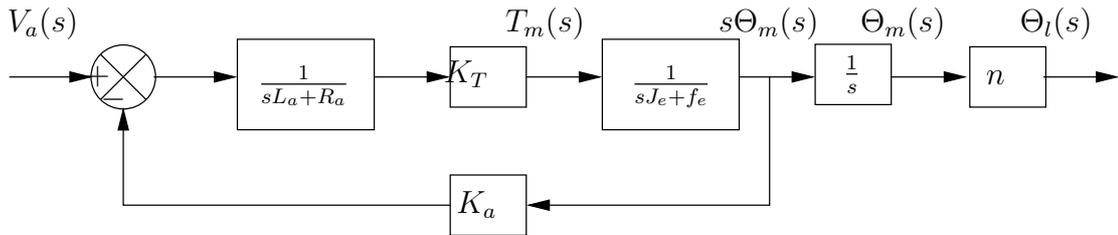


Figura 12: Diagrama de blocos do servomecanismo.

9.3 Modelo Discreto no Espaço de Estados

Utilizando, por exemplo, *forward differences*, tem-se

$$\dot{x}(t) \approx \frac{x(k+1) - x(k)}{T}$$

e portanto

$$\frac{x(k+1) - x(k)}{T} = Ax(k) + Bu(k)$$

ou

$$x(k+1) = (A + I)Tx(k) + BTu(k)$$

que com os parâmetros do sistema torna-se

$$\begin{aligned}
x(k+1) &= \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{R_a}{L_a}\right)T & 0 & -\frac{K_a}{L_a}T \\ 0 & T & T \\ \frac{K_T}{J_e}T & 0 & \left(1 - \frac{f_e}{J_e}\right)T \end{bmatrix} x(k) = \begin{bmatrix} \frac{T}{L_a} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(k) \\
y(k) &= [0 \quad n \quad 0] x(k)
\end{aligned}$$

9.4 Modelo Discreto no Domínio da Frequência

Seja o sistema descrito no espaço de estados

$$\begin{aligned}
x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\
y(k) &= Cx(k) + Du(k)
\end{aligned}$$

Tomando-se a transformada z , com condições iniciais nulas, resulta

$$\begin{aligned}
zX(z) &= AX(z) + BU(z) \\
Y(z) &= CX(z) + DU(z)
\end{aligned}$$

de onde obtém-se

$$X(z) = (zI - A)^{-1} BU(z)$$

e

$$Y(z) = C(zI - A)^{-1} BU(z) + DU(z)$$

E portanto, a função de transferência é

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = C(zI - A)^{-1} B + D \quad (37)$$

Tal como no caso contínuo, uma forma alternativa de obter a função de transferência é tomar as transformadas z das aproximações discretas de (26), (30), (27) e (18), de onde pode-se então calcular $H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}$.

Utilizando *forward differences* tem-se

$$\frac{di_a}{dt}(k) \approx \frac{i_a(k+1) - i_a(k)}{T} \quad (38)$$

$$\dot{\theta}_m(k) \approx \frac{\theta_m(k+1) - \theta_m(k)}{T} \quad (39)$$

$$\ddot{\theta}_m(k) \approx \frac{\dot{\theta}_m(k+1) - \dot{\theta}_m(k)}{T} \quad (40)$$

Substituindo (39) em (40)

$$\begin{aligned}
\ddot{\theta}_m(k) &\approx \frac{\frac{\theta_m(k+2)-\theta_m(k+1)}{T} - \frac{\theta_m(k+1)-\theta_m(k)}{T}}{T} \\
\ddot{\theta}_m(k) &\approx \frac{\theta_m(k+2) - \theta_m(k+1) - \theta_m(k+1) + \theta_m(k)}{T^2} \\
\ddot{\theta}_m(k) &\approx \frac{\theta_m(k+2) - 2\theta_m(k+1) + \theta_m(k)}{T^2} \tag{41}
\end{aligned}$$

Utilizando (39) e (41), a versão discreta de (26) é

$$\begin{aligned}
\tau(k) &= \frac{J_e}{T^2} (\theta_m(k+2) - 2\theta_m(k+1) + \theta_m(k)) + \frac{f_e}{T} (\theta_m(k+1) - \theta_m(k)) \\
\tau(k) &= \frac{J_e}{T^2} \theta_m(k+2) + \left(\frac{f_e}{T} - 2\frac{J_e}{T^2} \right) \theta_m(k+1) + \left(\frac{J_e}{T^2} - \frac{f_e}{T} \right) \theta_m(k) \tag{42}
\end{aligned}$$

De forma semelhante, utilizando (39) e (38), a versão discreta de (30) é

$$\begin{aligned}
v_a(k) &= R_a i_a(k) + \frac{L_a}{T} (i_a(k+1) - i_a(k)) + \frac{K_a}{T} (\theta_m(k+1) - \theta_m(k)) \\
v_a(k) &= \frac{L_a}{T} i_a(k+1) + \left(R_a - \frac{L_a}{T} \right) i_a(k) + \frac{K_a}{T} \theta_m(k+1) - \frac{K_a}{T} \theta_m(k) \tag{43}
\end{aligned}$$

As versões discretas de (27) e (18) são

$$\tau(k) = K_T i_a(k) \tag{44}$$

e

$$\theta_l(k) = n\theta_m(k) \tag{45}$$

Tomando a transformada z de (43) com condições iniciais nulas e resolvendo-se para $I_a(z)$ resulta

$$I_a(z) = \frac{V_a(z) - \frac{(z-1)}{T} K_a \Theta_m(z)}{R_a + \frac{(z-1)}{T} L_a} \tag{46}$$

e portanto, de (44)

$$T(z) = K_T I_a(z) = K_T \left(\frac{V_a(z) - \frac{(z-1)}{T} K_a \Theta_m(z)}{R_a + \frac{(z-1)}{T} L_a} \right) \tag{47}$$

Por outro lado, a transformada z de (42) é

$$\begin{aligned} T(z) &= \frac{J_e}{T^2} z^2 \Theta_m(z) + \left(\frac{f_e}{T} - 2 \frac{J_e}{T^2} \right) z \Theta_m(z) + \left(\frac{J_e}{T^2} - \frac{f_e}{T} \right) \Theta_m(z) \\ T(z) &= \frac{(z-1)^2}{T^2} J_e \Theta_m(z) + \frac{(z-1)}{T} f_e \Theta_m(z) \end{aligned} \quad (48)$$

Igualando-se (47) e (48) e resolvendo para $\frac{\Theta_m(z)}{V_a(z)}$ tem-se

$$\frac{\Theta_m(z)}{V_a(z)} = \frac{K_T}{\frac{(z-1)}{T} \left[\frac{(z-1)^2}{T^2} J_e L_a + \frac{(z-1)}{T} (J_e R_a + L_a f_e) + R_a f_e + K_T K_a \right]}$$

Normalmente, a constante de tempo elétrica é muito menor do que a constante de tempo mecânica. Assim, pode-se desprezar L_a , obtendo-se

$$\begin{aligned} \frac{\Theta_m(z)}{V_a(z)} &= \frac{K_T}{\frac{(z-1)}{T} \left(\frac{(z-1)}{T} J_e R_a + R_a f_e + K_T K_a \right)} = \frac{K}{\frac{(z-1)}{T} (T_m \frac{(z-1)}{T} + 1)} \\ \frac{\Theta_m(z)}{V_a(z)} &= \frac{K}{(z-1)(T_m(z-1) + 1)} \end{aligned} \quad (49)$$

com

$$\begin{aligned} K &= \frac{TK_T}{R_a f_e + K_T K_a} = \text{constante de ganho} \\ T_m &= \frac{R_a J_e / T}{R_a f_e + K_T K_a} = \text{constante de tempo} \end{aligned}$$

De (49) e (45) tem-se

$$\frac{\Theta_l(z)}{V_a(z)} = \frac{nK_T}{\frac{(z-1)}{T} \left(\frac{(z-1)}{T} J_e R_a + R_a f_e + K_T K_a \right)} \quad (50)$$

10 Modelo Discreto de Sistemas Amostrados

Considere uma planta com entrada e saída amostradas, como mostrado na Fig. 13⁴.

Se está interessado em determinar a função de transferência $G(z)$, que inclui os efeitos dos conversores D/A e A/D, além da planta. Assume-se que o D/A

⁴Note que há um abuso de notação, pois $G(z) \neq G(s)|_{s=z}$.

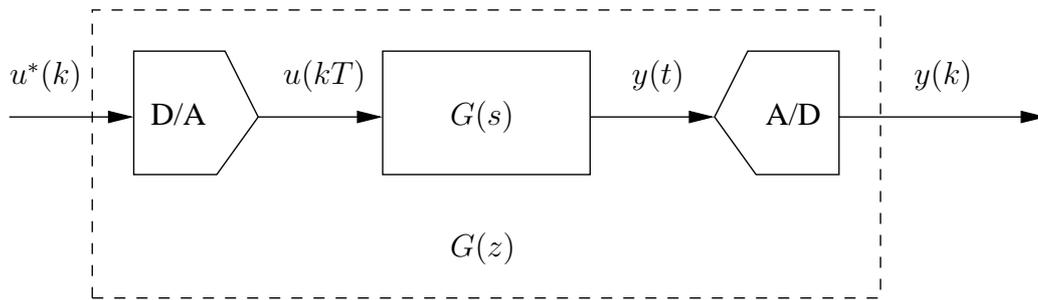


Figura 13: Diagrama de blocos de uma planta com entrada e saída amostradas.

possui um segurador de ordem zero, cuja implementação típica é um *latch* de dados que existe na entrada do D/A.

A função de transferência discreta é a transformada z da saída quando a entrada é um pulso unitário em $k = 0$, ou seja, quando

$$u^*(k) = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

Considerando o segurador de ordem zero existente no D/A, o sinal efetivamente aplicado à planta será o mostrado na Fig. 14

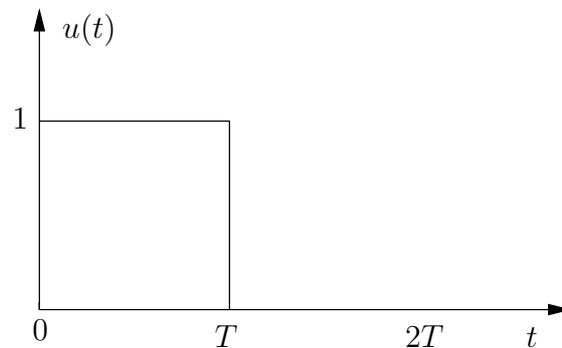


Figura 14: Sinal $u(t)$ efetivamente aplicado à planta.

que pode ser modelado por um degrau unitário em $t = 0$ subtraído de outro degrau unitário em $t = T$, ou seja

$$u(t) = u_0(t) - u_0(t - T)$$

Logo, tem-se

$$Y(s) = \left(\frac{1}{s} - \frac{e^{-sT}}{s} \right) G(s) = (1 - e^{-sT}) \frac{G(s)}{s}$$

e portanto

$$Y(z) = G(z) = \mathcal{Z} \left\{ \mathcal{L}^{-1} \left\{ (1 - e^{-sT}) \frac{G(s)}{s} \right\} \right\}$$

Definindo⁵:

$$\mathcal{Z} \{G(s)\} \triangleq \mathcal{Z} \{ \mathcal{L}^{-1} \{G(s)\} \}$$

tem-se

$$G(z) = \mathcal{Z} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\} - \mathcal{Z} \left\{ e^{-sT} \frac{G(s)}{s} \right\}$$

$$G(z) = \mathcal{Z} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\} - z^{-1} \mathcal{Z} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\}$$

$$G(z) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\}$$

Exemplo 2 Calcule a função de transferência discreta do sistema $G(s) = \frac{a}{s+a}$.

$$\frac{G(s)}{s} = \frac{a}{s(s+a)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+a}$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\} = u_0(t) - e^{-at} u_0(t)$$

$$\int_0^{kT} g(t) dt = u_0(k) - e^{-akT} u_0(k)$$

$$\mathcal{Z} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\} = \mathcal{Z} \left\{ \int_0^t g(k) dt \right\} = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-aT}} = \frac{z(1-e^{-aT})}{(z-1)(z-e^{-aT})}$$

$$G(z) = \frac{z-1}{z} \frac{z(1-e^{-aT})}{(z-1)(z-e^{-aT})}$$

$$G(z) = \frac{1-e^{-aT}}{z-e^{-aT}}$$

⁵A rigor, esta definição é um abuso de notação.

┌ Caso tivesse sido utilizado *forward differences* para obter uma aproximação discreta para o sistema do exemplo 2, resultaria:

$$G(z) = G(s)|_{s=\frac{z-1}{T}} = \frac{aT}{(z-1) + aT}$$

$$G(z) = \frac{aT}{z - (1 - aT)}$$

Essa função de transferência difere da obtida no exemplo 2 devido à aproximação por *forward differences* e à não consideração do efeito do segurador de ordem zero, enquanto aquela é exata e considera esse efeito. No entanto, quanto T é suficientemente pequeno, a aproximação por *forward differences* se torna mais próxima do modelo exato.

└

11 Resposta Dinâmica

Tendo-se o modelo do sistema, a sua resposta à uma determinada entrada pode ser calculada pelo procedimento:

1. Computar a função de transferência, $H(z)$
2. Computar a transformada z da entrada, $U(z)$
3. Calcular a transformada z da saída, $Y(z) = H(z)U(z)$
4. Obter a transformada z inversa de $Y(z)$

No entanto, a obtenção da transformada inversa requer um esforço razoável. Como se está interessado no problema de projeto do sistema para obter-se uma resposta desejada, é interessante poder ter uma ideia da resposta sem precisar calcular a transformada inversa. Desta forma, apenas se a resposta esperada parecer interessante se investe tempo para calcular a resposta detalhada. Para tanto, é conveniente conhecer a transformada z de sinais elementares.

1. Impulso unitário

$$\delta(k) = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

$$\Delta(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(k)z^{-k} = z^0$$

$$\Delta(z) = 1$$

2. Degrau unitário

$$u_0(k) = \begin{cases} 1 & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$$

$$U_0(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_0(k)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = \frac{1}{1 - z^{-1}}, \quad |z^{-1}| < 1$$

$$U_0(z) = \frac{z}{z - 1}, \quad |z| > 1$$

A Fig. 15 mostra o sinal $u_0(k)$ e o diagrama de pólos e zeros de $U_0(z)$. Note que o pólo em $z = 1$, com convergência fora do círculo unitário corresponde a uma constante para $k \geq 0$ e zero para $k < 0$.

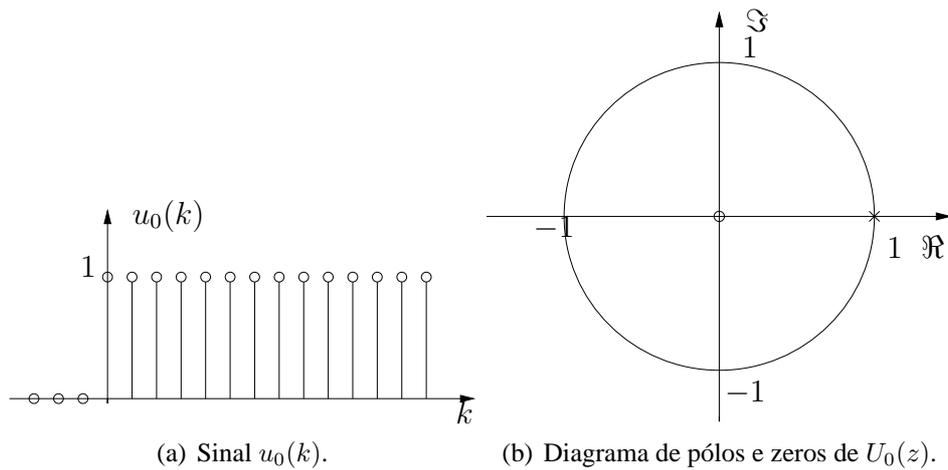


Figura 15: Degrau unitário e respectivo diagrama de pólos e zeros.

3. Exponencial

$$u(k) = \begin{cases} r^k & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$$

$$U(z) = \sum_{k=0}^{\infty} r^k z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (rz^{-1})^k = \frac{1}{1 - rz^{-1}}, \quad |rz^{-1}| < 1$$

$$U(z) = \frac{z}{z - r}, \quad |z| > |r|$$

A Fig. 16 mostra o sinal exponencial e o diagrama de pólos e zeros de $U(z)$ para o caso de exponencial decrescente e para o caso de exponencial crescente.

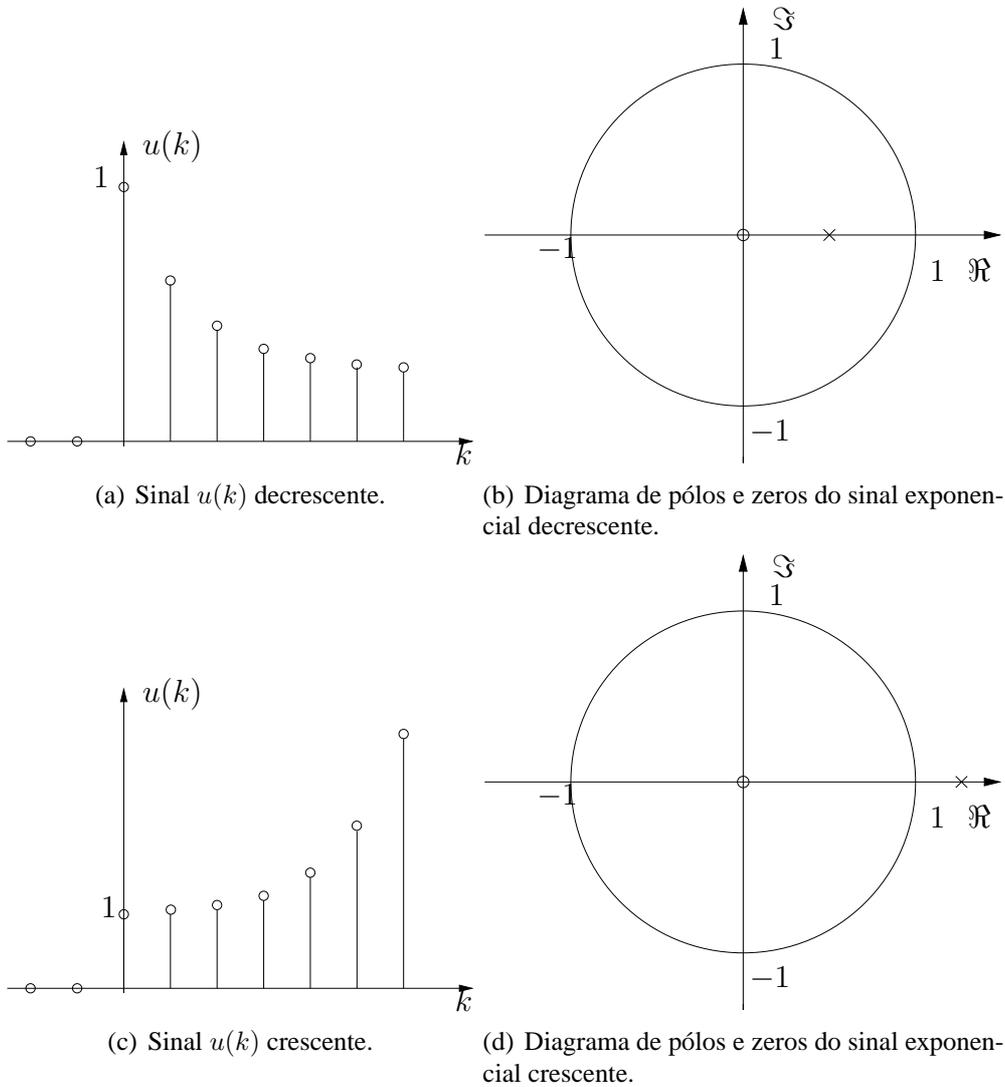


Figura 16: Exponencial e respectivos diagramas de pólos e zeros.

4. Senoide amortecida

$$u(k) = r^k \cos(k\theta) u_0(k), \text{ com } r > 0$$

$$u(k) = r^k \left(\frac{e^{jk\theta} + e^{-jk\theta}}{2} \right) u_0(k)$$

Definindo $u'(k) \triangleq r^k e^{jk\theta} u_0(k)$, tem-se

$$U'(z) = \sum_{k=0}^{\infty} r^k e^{jk\theta} z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (r e^{j\theta} z^{-1})^k = \frac{1}{1 - r e^{j\theta} z^{-1}}$$

$$U'(z) = \frac{z}{z - r e^{j\theta}}, |z| > r$$

e portanto

$$U(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{z}{z - r e^{j\theta}} + \frac{z}{z - r e^{-j\theta}} \right)$$

$$U(z) = \frac{z(z - r \cos \theta)}{z^2 - 2r \cos \theta z + r^2}, |z| > r$$

A Fig. 17 mostra a senoide amortecida e o diagrama de pólos e zeros de $U(z)$.

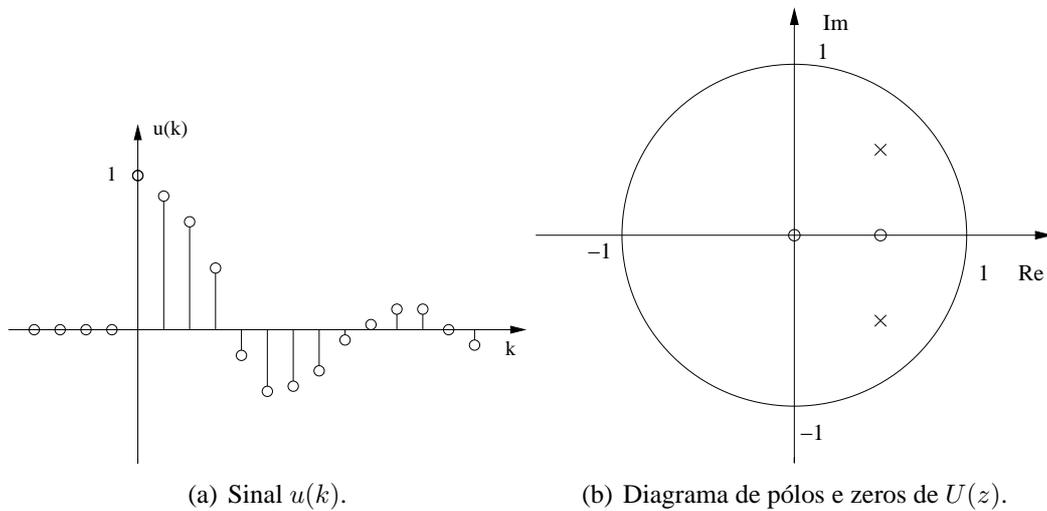


Figura 17: Senoide amortecida e respectivos diagramas de pólos e zeros.

Note que esse sinal pode ser particularizado para alguns dos sinais anteriores:

- (a) se $\theta = 0 \Rightarrow u(k) = r^k \cos(k\theta) u_0(k) = r^k u_0(k)$
- (b) se $\theta = 0$ e $r = 1 \Rightarrow u(k) = u_0(k)$

11.1 Relação entre Posições dos Pólos e Resposta no Tempo

1. O tempo de acomodação é determinado principalmente pelo raio dos pólos:
 - (a) $r > 1$ corresponde a um sinal crescente
 - (b) $r = 1$ corresponde a um sinal com amplitude constante
 - (c) $r < 1$ quanto mais próximo r estiver de 0 menor o tempo de acomodação (o sistema é BIBO estável)
 - (d) $r = 0$ corresponde a um transitente finito
2. O número de amostras por período da senoide é determinado por θ . Fazendo-se $\cos \theta k = \cos (\theta(k + N))$, tem-se que um período de 2π rad tem N amostras, ou seja

$$N = \frac{1\pi}{\theta} \text{ amostras/ciclo}$$

12 Propriedades da Transformada z

1. Linearidade⁶

$$\begin{aligned}\mathcal{Z} \{ \alpha_1 f_1(k) + \alpha_2 f_2(k) \} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\alpha_1 f_1(k) + \alpha_2 f_2(k)) z^{-k} \\ &= \alpha_1 \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_1(k) z^{-k} + \alpha_2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_2(k) z^{-k} \\ \mathcal{Z} \{ \alpha_1 f_1(k) + \alpha_2 f_2(k) \} &= \alpha_1 F_1(z) + \alpha_2 F_2(z)\end{aligned}$$

⁶Uma função é linear se somente se $f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$.

2. Convolução

$$\begin{aligned}\mathcal{Z} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_1(n)f_2(k-n) \right\} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_1(n)f_2(k-n) \right) z^{-k} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_1(n)f_2(k-n) z^{-k} z^n z^{-n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_1(n) z^{-n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_2(k-n) z^{-(k-n)} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_1(n) z^{-n} \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_2(m) z^{-m} \\ \mathcal{Z} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_1(n)f_2(k-n) \right\} &= F_1(z)F_2(z)\end{aligned}$$

3. Deslocamento no tempo

$$\begin{aligned}\mathcal{Z} \{f(k+n)\} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k+n) z^{-k} \\ &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} f(j) z^{-(j-n)} \\ &= z^n \sum_{j=-\infty}^{\infty} f(j) z^{-j} \\ \mathcal{Z} \{f(k+n)\} &= z^n F(z)\end{aligned}$$

4. Escalonamento em z

$$\begin{aligned}\mathcal{Z} \{r^{-k} f(k)\} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{-k} f(k) z^{-k} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) (rz)^{-k} \\ \mathcal{Z} \{r^{-k} f(k)\} &= F(rz)\end{aligned}$$

5. **Teorema 1 (Teorema do Valor Final)** Se $F(z)$ converge para $|z| > 1$ e todos os pólos de $(z - 1)F(z)$ estão dentro do círculo unitário, então

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(k) = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)F(z)$$

Prova 1

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{f(k)\} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)z^{-k} = F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k} \\ \mathcal{Z}\{f(k-1)\} &= z^{-1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)z^{-k} = z^{-1}F(z) = z^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k} \\ \mathcal{Z}\{f(k) - f(k-1)\} &= \sum_{k=0}^{\infty} (f(k) - f(k-1))z^{-k} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n (f(k) - f(k-1))z^{-k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 1} \mathcal{Z}\{f(k) - f(k-1)\} &= \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})F(z) \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n (f(k) - f(k-1))z^{-k} \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \lim_{n \rightarrow \infty} (f(0) - f(-1))z^0 + (f(1) - f(0))z^{-1} + \\ &\quad + (f(2) - f(1))z^{-2} + \dots + (f(n) - f(n-1))z^{-n} \\ \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})F(z) &= \lim_{n \rightarrow \infty} f(n) \end{aligned}$$

6. **Teorema 2 (Teorema do Valor Inicial)** Se a função $f(k)$ possuir transformada $F(z)$ e o limite $\lim_{z \rightarrow \infty} F(z)$ existir, então

$$f(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z)$$

Prova 2

$$F(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)z^{-k} = \dots f(-2)z^2 + f(-1)z^1 + f(0)z^0 + f(1)z^{-1} + f(2)z^{-2} + \dots$$

Para que o limite $\lim_{z \rightarrow \infty} F(z)$ exista, é necessário que:

$$\begin{aligned}
F(k) &= 0, k < 0 \\
F(z) &= f(0)z^0 + f(1)z^{-1} + \dots \\
\text{portanto } \lim_{z \rightarrow \infty} F(z) &= f(0)
\end{aligned}$$

7. Multiplicação por k (diferenciação)

$$\frac{d}{dz} \mathcal{Z} \{f(k)\} = \frac{d}{dz} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)z^{-k} = -k \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)z^{-k-1}$$

portanto

$$\begin{aligned}
z \frac{d}{dz} \mathcal{Z} \{f(k)\} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} k f(k) z^{-k} \\
z \frac{d}{dz} \mathcal{Z} \{f(k)\} &= -\mathcal{Z} \{k f(k)\} \text{ ou} \\
\mathcal{Z} \{k f(k)\} &= -z \frac{d}{dz} \mathcal{Z} \{f(k)\} \text{ ou} \\
\frac{d}{dz} \mathcal{Z} \{f(k)\} &= -z^{-1} \mathcal{Z} \{k f(k)\}
\end{aligned}$$

8. Divisão por k (integração)

$$\mathcal{Z} \left\{ \frac{f(k)}{k} \right\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{f(k)}{k} z^{-k}$$

$$\frac{d}{dz} \mathcal{Z} \left\{ \frac{f(k)}{k} \right\} = - \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) z^{-k-1} = -z^{-1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) z^{-k} = -z^{-1} F(z)$$

logo

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z} \left\{ \frac{f(k)}{k} \right\} &= \int_z^{\infty} \frac{F(z)}{z} dz + C \\
C &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(k)}{k} \text{ já que } \lim_{z \rightarrow \infty} \mathcal{Z} \left\{ \frac{f(k)}{k} \right\} = C
\end{aligned}$$

9. Inversão

$$F(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)z^{-k}, \quad r_0 < |z| < R_0$$

Se algum valor de $f(k)$ para $k < 0$ for diferente de zero, existirá um termo com potência positiva de z . Esse termo será ilimitado se z for ilimitado. Logo, se $F(z)$ converge quando $|z| \rightarrow \infty$, $f(k) = 0 \forall k < 0$. Assim, pode-se considerar a transformada unilateral.

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k}, \quad r_0 < |z|$$

O lado direito é a expansão de $F(z)$ em série em torno de $z = \infty$ ou em torno de $z^{-1} = 0$. Essa expansão pode ser feita dividindo-se o numerador de $F(z)$ pelo denominador de forma apropriada.

Suponha o sistema de integração pela regra trapezoidal, como mostrado na Fig. 18.

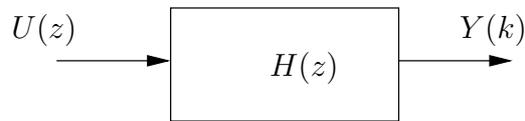


Figura 18: Sistema de integração pela regra trapezoidal.

$$H(z) = \frac{T}{2} \frac{z+1}{z-1}, \quad |z| > 1$$

Supondo que a entrada seja

$$u(k) = \begin{cases} 0.5^k & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$$

cuja transformada z é

$$U(z) = \frac{z}{z-0.5}, \quad |z| > 0.5$$

$$Y(z) = H(z)U(z) = \frac{T}{2} \frac{z+1}{z-1} \frac{z}{z-0.5}, \quad |z| > 1$$

$$y(k) = \begin{cases} A + B0.5^k & k > 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$$
$$y(k) = \begin{cases} 2T - \frac{3T}{2}0.5^k & k > 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$$
$$y(k) = \begin{cases} \frac{T}{2} (4 - 3(0.5)^k) & k > 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$$