Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Escola de Engenharia
Departamento de Engenharia Elétrica
ENG04037 Sistemas de Controle Digitais

Estimação de Ordem

Prof. Walter Fetter Lages

22 de novembro de 2011

1 Estimação de Ordem

Considere o sistema representado pelo modelo ARX:

$$y(t+1) = a_1 y(t) + \cdots + a_{p_0} y(t-p_0+1) + b_1 u(t) + \cdots + b_{q_0} u(t-q_0+1) + \omega(t+1) \tag{1}$$

onde tanto a ordem (p_0, q_0) quanto $\theta(p_0, q_0)$ são desconhecidos. Para estimar (p_0, q_0), pressupõe-se apenas que $(p_0, q_0) \in M \{(p,q), 1 \leq p \leq p^*, 0 \leq q \leq q^*\}$, com $p^* < \infty$ e $q^* < \infty$.

1.1 Critérios Baseados nos Resíduos

Possuem a forma geral

$$W(p,q,n) = \ln \left(\frac{1}{n} \sum_{t=0}^{n-1} e^2 \left(t+1, \hat{\theta}(p,q,n) \right) \right) + \frac{\gamma(p,q,n)}{n}$$

sendo a estimativa de (p_0, q_0) no instante n dada por:

$$(\hat{p}(n), \hat{q}(n)) = \arg \min_{(p,q)\in M} W(p,q,n)$$

Obs 1 : *Uma vez que* $e(t+1, \hat{\theta}(p,q,n)) \triangleq \bar{e}(t+1)$ *depende de* $\hat{\theta}(p,q,n)$*, ou seja, de informações no instante* $n \geq t$ *(vide figura 1,* $\bar{e}(t+1)$ *é denominado resíduo e não de erro de predição.*

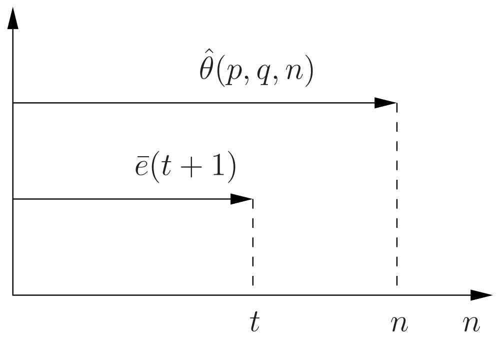

Figura 1: Resíduo.

1.1.1 Critério AIC (Akaike Information Criterion)

Neste caso tem-se

$$\gamma(p, q, n) = 2(p+q)$$

de onde [1]:

$$\mathrm{AIC}(p, q, n) = \ln \hat{\sigma}^2(p, q, n) + \frac{2(p+q)}{n}$$

É possível mostrar que $(\hat{p}(n), \hat{q}(n)) \to (p_0, q_0)$ em probabilidade, quando $n \to \infty$, ou seja, as estimativas de ordem são consistente.

1.1.2 Critério BIC

Tem-se

$$\gamma(p, q, n) = (p+q) \ln n$$

de onde

$$\mathrm{BIC}(p, q, n) = \ln \hat{\sigma}^2(p, q, n) + \frac{(p+q) \ln n}{n}$$

É possível mostrar que $(\hat{p}(n), \hat{q}(n)) \to (p_0, q_0)$ a. s. quando $n \to \infty$, ou seja, as estimativas de ordem são fortemente consistentes, consequentemente

$$\exists N < \infty | \hat{p}(n) = p_0, \forall n \geq N$$

1.1.3 Critério Φ

Utiliza

$$\gamma(p, q, n) = 2(p + q)c \ln \ln n \text{ com } c > 1 \text{ constante}$$

de onde

$$\Phi(p, q, n) = \ln \hat{\sigma}^2(p, q, n) + \frac{2(p + q)c \ln \ln n}{n}$$

Mostra-se que $(\hat{p}(n), \hat{q}(n)) \rightarrow (p_0, q_0)$ a. s. quando $n \rightarrow \infty$. Ou seja, as estimativas de ordem são fortemente consistentes.

1.2 Critério Baseado no Erro de Predição

Ao invés de utilizar o resíduo $\bar{e}(t + 1)$, utiliza o erro de predição:

$$e\left(t + 1, \hat{\theta}(p, q, t)\right) = y(t + 1) - \phi^T(p, q, t)\hat{\theta}(p, q, t)$$

Mais precisamente, define-se

$$\text{PLS}(p, q, n) = \frac{1}{n} \sum_{t=0}^{n-1} e^2 \left(t + 1, \hat{\theta}(p, q, t)\right)$$

e toma-se

$$(\hat{p}(n), \hat{q}(n)) = \arg \min_{(p,q) \in M} \text{PLS}(p, q, n)$$

Pode ser mostrado [2] que $(\hat{p}(n), \hat{q}(n)) \rightarrow (p_0, q_0)$ a. s. quanto $n \rightarrow \infty$, ou seja, as estimativas de ordem são fortemente consistentes.

2 Exercícios

1. Considere o sistema $y(t+1) = 1.5y(t) - 0.7y(t-1) + 1.0u(t) + 0.5u(t-1) + \omega(t+1)$ onde $u(t)$ é uma PRBS com amplitude ± 1 e $\omega(t+1) \sim N(0, 0.04)$.

   (a) Compare o desempenho dos critérios AIC, BIC, Φ e PLS para a estimativa de ordem, supondo $M \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ e 10 realizações com 100 pontos. Apresentar os gráficos de $\hat{p}(n)$ e $\hat{q}(n)$ para uma das realizações.

   (b) Para a ordem correta $(p, q) = (2, 2)$, determinar o intervalo de 95% de confiança para a_1, a_2, b_1 e b_2, considerando uma realização.

Referências

[1] H. Akaike. A new look at the statistical model identification. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-19(6):716–723, Dec 1974.

[2] E. M. Hemerly and M. H. A. Davis. Strong consistency of the pls criterion for order determination of autoregressive processes. *The Annals of Statistics*, 17(2):941–946, 1989.