

Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Escola de Engenharia
Departamento de Engenharia Elétrica
ENG04037 Sistemas de Controle Digitais

Controladores PID

Prof. Walter Fetter Lages

20 de maio de 2010

1 Introdução

Por definição, a expressão do controlador PID contínuo é

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(\tau) d\tau + K_d \frac{d}{dt} e(t)$$

onde K_p , K_i e K_d são os ganhos proporcional, integral e derivativo, respectivamente.

Para que os parâmetros do controlador PID possam ser mais facilmente associados aos polos e zeros da função de transferência, é mais conveniente que os ganhos sejam parametrizados da seguinte forma:

$$u(t) = K_p \left(e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_d \frac{d}{dt} e(t) \right)$$

onde T_i e T_d são os tempos integral e derivativo, respectivamente, tais que $K_i = \frac{K_p}{T_i}$ e $K_d = K_p T_d$.

2 Controlador PID Digital

Na sua versão digital, o controlador PID tem uma estrutura como mostrado na Fig. 1.

Ou seja, tem-se

$$C(z) = K_p + C_i(z) + C_d(z)$$

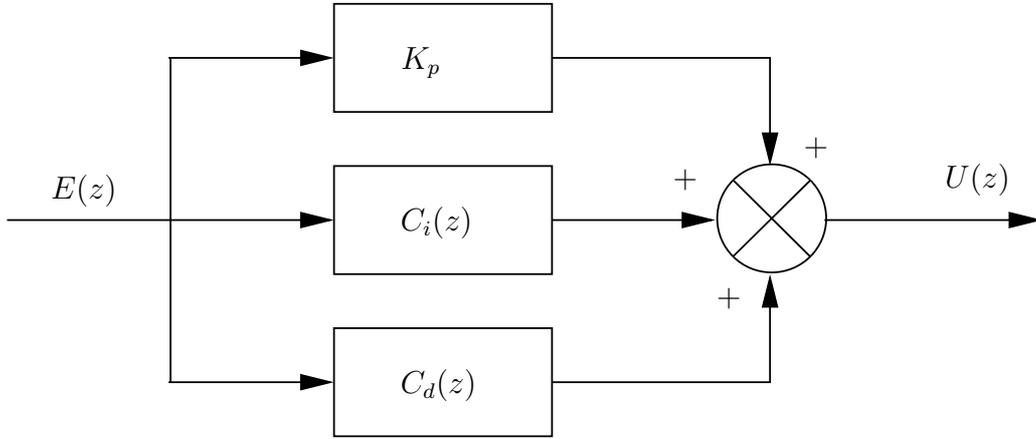


Figura 1: Estrutura do controlador PID digital.

Dependendo da aproximação utilizada para a integral e a derivada, $C_i(z)$ e $C_d(z)$ podem assumir várias formas diferentes.

Forward differences:

$$C_i(z) = K_i \frac{T}{z-1} = K_p \frac{T}{T_i(z-1)} = K_p \frac{1}{\tau_i(z-1)} \text{ com } \tau_i = \frac{T_i}{T}$$

$$C_d(z) = K_d \frac{z-1}{T} = K_p T_d \frac{z-1}{T} = K_p \tau_d (z-1) \text{ com } \tau_d = \frac{T_d}{T}$$

$$\begin{aligned} C(z) &= K_p + K_p \frac{1}{\tau_i(z-1)} + K_p \tau_d (z-1) \\ &= K_p \frac{\tau_i(z-1) + 1 + \tau_i \tau_d (z-1)^2}{\tau_i(z-1)} \\ &= K_p \frac{\tau_i(z-1) + 1 + \tau_i \tau_d (z^2 - 2z + 1)}{\tau_i(z-1)} \\ &= K_p \frac{\tau_i \tau_d z^2 + (\tau_i - 2\tau_i \tau_d)z + 1 + \tau_i \tau_d - \tau_i}{\tau_i(z-1)} \\ &= K_p \tau_d \frac{z^2 + \left(\frac{1}{\tau_d} - 2\right)z + \frac{1}{\tau_i \tau_d} + 1 - \frac{1}{\tau_d}}{z-1} \\ C(z) &= K_p \tau_d \frac{z^2 + \left(\frac{1}{\tau_d} - 2\right)z + \frac{\tau_i \tau_d - \tau_i + 1}{\tau_i \tau_d}}{z-1} \end{aligned} \quad (1)$$

A função de transferência possui dois zeros reais ou complexos e um polo em $z = 1$. Como a função de transferência possui mais zeros finitos do que polos finitos a sua implementação é problemática. Assim, é preferível utilizar as outras aproximações que não apresentam esse problema.

Backward differences:

$$C_i(z) = K_i \frac{Tz}{z-1} = K_p \frac{Tz}{T_i(z-1)} = K_p \frac{z}{\tau_i(z-1)}$$

$$C_d(z) = K_d \frac{z-1}{Tz} = K_p T_d \frac{z-1}{Tz} = K_p \tau_d \frac{z-1}{z}$$

$$\begin{aligned} C(z) &= K_p + K_p \frac{z}{\tau_i(z-1)} + K_p \tau_d \frac{z-1}{z} \\ &= K_p \frac{\tau_i z(z-1) + z^2 + \tau_i \tau_d (z-1)^2}{\tau_i z(z-1)} \\ &= K_p \frac{\tau_i(z^2 - z) + z^2 + \tau_i \tau_d(z^2 - 2z + 1)}{\tau_i z(z-1)} \\ &= K_p \frac{(\tau_i + 1 + \tau_i \tau_d)z^2 - (\tau_i + 2\tau_i \tau_d)z + \tau_i \tau_d}{\tau_i z(z-1)} \\ &= K_p \frac{\tau_i + 1 + \tau_i \tau_d}{\tau_i} \frac{z^2 - \frac{\tau_i + 2\tau_i \tau_d}{\tau_i + 1 + \tau_i \tau_d} z + \frac{\tau_i \tau_d}{\tau_i + 1 + \tau_i \tau_d}}{z(z-1)} \\ C(z) &= K_p \left(1 + \frac{1}{\tau_i} + \tau_d\right) \frac{z^2 - \frac{1 + 2\tau_d}{1 + \frac{1}{\tau_i} + \tau_d} z + \frac{\tau_d}{1 + \frac{1}{\tau_i} + \tau_d}}{z(z-1)} \end{aligned}$$

A função de transferência possui dois zeros reais ou complexos, um polo em $z = 0$ e um polo em $z = 1$.

Aproximação bilinear:

$$C_i(z) = K_i \frac{T}{2} \frac{z+1}{z-1} = K_p \frac{T}{2T_i} \frac{z+1}{z-1} = K_p \frac{1}{2\tau_i} \frac{z+1}{z-1}$$

$$C_d(z) = K_d \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1} = K_p T_d \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1} = K_p \tau_d 2 \frac{z-1}{z+1}$$

$$\begin{aligned}
C(z) &= K_p + K_p \frac{1}{2\tau_i} \frac{z+1}{z-1} + K_p \tau_d 2 \frac{z-1}{z+1} \\
&= K_p \frac{2\tau_i(z+1)(z-1) + (z+1)^2 + 4\tau_i\tau_d(z-1)^2}{2\tau_i(z+1)(z-1)} \\
&= K_p \frac{2\tau_i(z^2-1) + (z^2+2z+1) + 4\tau_i\tau_d(z^2-2z+1)}{2\tau_i(z+1)(z-1)} \\
&= K_p \frac{(2\tau_i+1+4\tau_i\tau_d)z^2 + (2-8\tau_i\tau_d)z + 1 + 4\tau_i\tau_d - 2\tau_i}{2\tau_i(z+1)(z-1)} \\
&= K_p \frac{2\tau_i+1+4\tau_i\tau_d}{2\tau_i} \frac{z^2 + \frac{2-8\tau_i\tau_d}{2\tau_i+1+4\tau_i\tau_d}z + \frac{1+4\tau_i\tau_d-2\tau_i}{2\tau_i+1+4\tau_i\tau_d}}{(z+1)(z-1)} \\
C(z) &= K_p \left(1 + \frac{1}{2\tau_i} + 2\tau_d \right) \frac{z^2 + \frac{\frac{1}{\tau_i}-4\tau_d}{1+\frac{1}{2\tau_i}+2\tau_d}z + \frac{\frac{1}{2\tau_i}+2\tau_d-1}{1+\frac{1}{2\tau_i}+2\tau_d}}{(z+1)(z-1)}
\end{aligned}$$

A função de transferência possui dois zeros reais ou complexos, um polo em $z = 1$ e um polo em $z = -1$.

Assim, o controlador PID apresenta dois polos e dois zeros. As posições dos polos são determinadas pela aproximação utilizada, para *backward differences* tem-se polos em $z = 0$ e $z = 1$ e para aproximação bilinear tem-se polos em $z = -1$ e $z = 1$. As posições dos dois zeros são determinadas pelos parâmetros do controlador.

3 Controlador PD Digital

Para um controlador PD tem-se

$$C(z) = K_p + C_d(z)$$

Dependendo da aproximação utilizada para a derivada, $C_d(z)$ pode assumir várias formas diferentes.

Forward differences:

$$\begin{aligned}
C(z) &= K_p + K_p \tau_d (z - 1) \\
&= K_p (1 + \tau_d (z - 1)) \\
&= K_p (\tau_d z + 1 - \tau_d) \\
C(z) &= K_p \tau_d \left(z + \frac{1 - \tau_d}{\tau_d} \right)
\end{aligned}$$

A função de transferência possui apenas um zero real dentro do círculo unitário em $z = -\frac{\tau_d-1}{\tau_d}$. Como a função de transferência possui mais zeros finitos do que polos finitos a sua implementação é problemática. Assim, é preferível utilizar as outras aproximações que não apresentam esse problema.

Backward differences:

$$\begin{aligned}
 C(z) &= K_p + K_p \tau_d \frac{z-1}{z} \\
 &= K_p \frac{z + \tau_d(z-1)}{z} \\
 &= K_p \frac{(1 + \tau_d)z - \tau_d}{z} \\
 C(z) &= K_p(1 + \tau_d) \frac{z - \frac{\tau_d}{1+\tau_d}}{z} \quad (2)
 \end{aligned}$$

A função de transferência possui um zero real dentro do círculo unitário em $z = \frac{\tau_d}{1+\tau_d}$ e um polo em $z = 0$.

Aproximação bilinear:

$$\begin{aligned}
 C(z) &= K_p + K_p \tau_d 2 \frac{z-1}{z+1} \\
 &= K_p \frac{(z+1) + 2\tau_d(z-1)}{z+1} \\
 &= K_p \frac{(1 + 2\tau_d)z + 1 - 2\tau_d}{z+1} \\
 C(z) &= K_p(1 + 2\tau_d) \frac{z + \frac{1-2\tau_d}{1+2\tau_d}}{z+1}
 \end{aligned}$$

A função de transferência possui um zero real dentro do círculo unitário em $z = \frac{2\tau_d-1}{1+2\tau_d}$ e um polo em $z = -1$.

Assim, o controlador PD apresenta um polo e um zero. A posição do polo é determinada pela aproximação utilizada, para *backward differences* tem-se polo em $z = 0$ e para aproximação bilinear tem-se polo em $z = -1$. A posição do zero é determinada pelos parâmetros do controlador.

4 Controlador PI Digital

Para um controlador PI tem-se

$$C(z) = K_p + C_i(z)$$

Dependendo da aproximação utilizada para a integral $C_i(z)$ pode assumir várias formas diferentes.

Forward differences:

$$\begin{aligned} C(z) &= K_p + K_p \frac{1}{\tau_i(z-1)} \\ &= K_p \frac{\tau_i(z-1) + 1}{\tau_i(z-1)} \\ &= K_p \frac{\tau_i z - \tau_i + 1}{\tau_i(z-1)} \\ C(z) &= K_p \frac{z - \frac{\tau_i-1}{\tau_i}}{z-1} \end{aligned}$$

A função de transferência possui um zero real dentro do círculo unitário em $z = \frac{\tau_i-1}{\tau_i}$ e um polo em $z = 1$. Ao contrário dos controladores PID e PD, essa função de transferência não apresenta problemas de implementação.

Backward differences:

$$\begin{aligned} C(z) &= K_p + K_p \frac{z}{\tau_i(z-1)} \\ &= K_p \frac{\tau_i(z-1) + z}{\tau_i(z-1)} \\ &= K_p \frac{(\tau_i + 1)z - \tau_i}{\tau_i(z-1)} \\ C(z) &= K_p \frac{\tau_i + 1}{\tau_i} \frac{z - \frac{\tau_i}{\tau_i+1}}{z-1} \end{aligned}$$

A função de transferência possui um zeros real dentro do círculo unitário em $z = \frac{\tau_i}{\tau_i+1}$ e um polo em $z = 1$.

Aproximação bilinear:

$$C_i(z) = K_i \frac{T}{2} \frac{z+1}{z-1} = K_p \frac{T}{2T_i} \frac{z+1}{z-1} = K_p \frac{1}{2\tau_i} \frac{z+1}{z-1}$$

$$\begin{aligned}
C(z) &= K_p + K_p \frac{1}{2\tau_i} \frac{z+1}{z-1} \\
&= K_p \frac{2\tau_i(z-1) + (z+1)}{2\tau_i(z-1)} \\
&= K_p \frac{(2\tau_i+1)z + 1 - 2\tau_i}{2\tau_i(z-1)} \\
C(z) &= K_p \frac{2\tau_i+1}{2\tau_i} \frac{z + \frac{1-2\tau_i}{2\tau_i+1}}{z-1}
\end{aligned}$$

A função de transferência possui um zero real dentro do círculo unitário em $z = \frac{2\tau_i-1}{2\tau_i+1}$ e um polo em $z = 1$.

Assim, o controlador PI apresenta um polo e um zero. A posição do polo é a mesma para todas as aproximações, $z = 1$. A posição do zero é determinada pelos parâmetros do controlador. Ou seja, para um controlador PI, a flexibilidade de projeto é a mesma seja qual for a aproximação utilizado. No entanto, os valores dos parâmetros variam dependendo da aproximação escolhida.

5 Projeto de Controlador PID

O projeto de um controlador PID digital é um caso particular de projeto de controladores no domínio z , onde a posição dos polos é determinada pela aproximação utilizada e apenas os zeros e o ganho DC do controlador podem ser livremente determinados para atingir-se as especificações do projeto. Para controladores PI ou PD, a situação é análoga, tendo-se porém apenas um zero para ser determinado em função das especificações.

Exemplo 1 *Seja o sistema descrito por*

$$G(z) = \frac{z}{(z - 0,8)^2} \quad (3)$$

Projetar um controlador para obter o menor tempo de acomodação possível.

A Figura 2 mostra o lugar das raízes para o sistema sem compensador.

Como o objetivo é ter o menor tempo de acomodação possível, deve-se ter os polos de malha fechada com o menor raio possível. Como o lugar das raízes é uma circunferência de raio 0,8, qualquer ganho menor do que 3,2 posiciona os polos sobre a circunferência e portanto tem o mesmo tempo de acomodação. Para reduzir-se o tempo de acomodação é necessário introduzir um compensador

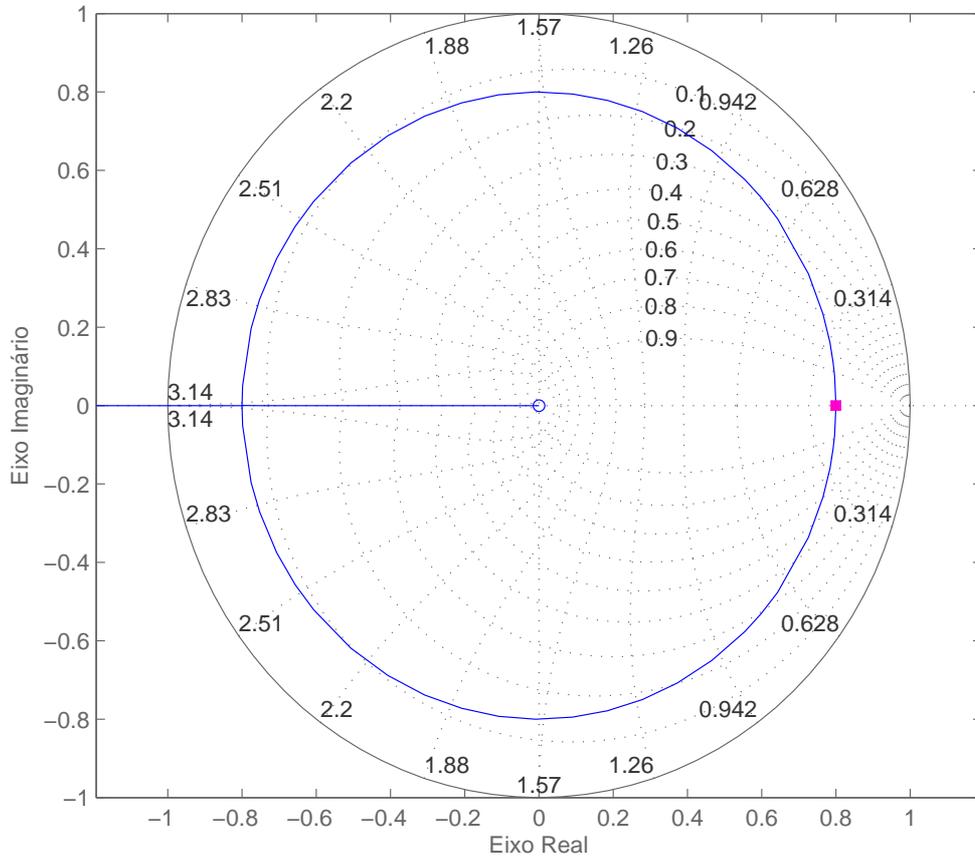


Figura 2: Lugar da raízes para o sistema (3) sem compensador.

que faça com que o lugar das raízes seja tal que possibilite localizar todos os polos mais próximo da origem do plano, de preferência localiza-los na origem do plano.

Utilizando-se um controlador PI não há como reduzir a circunferência, pois esse controlador possui um polo em $z = 1$ e independentemente da posição do zero, não há como reduzir o raio da circunferência, como mostra a Fig. 3.

Um compensador PD obtido com a aproximação bilinear também não permite obter-se o desempenho desejado, pois não é possível sequer garantir que todos os polos em malha fechada fiquem dentro do círculo unitário, como mostra a Fig. 4.

Utilizando-se um compensador PD obtido com a aproximação backward differences resulta no lugar das raízes mostrado na Fig. 5. Note que ocorre um cancelamento do zero da planta com o polo do controlador e através do ade-

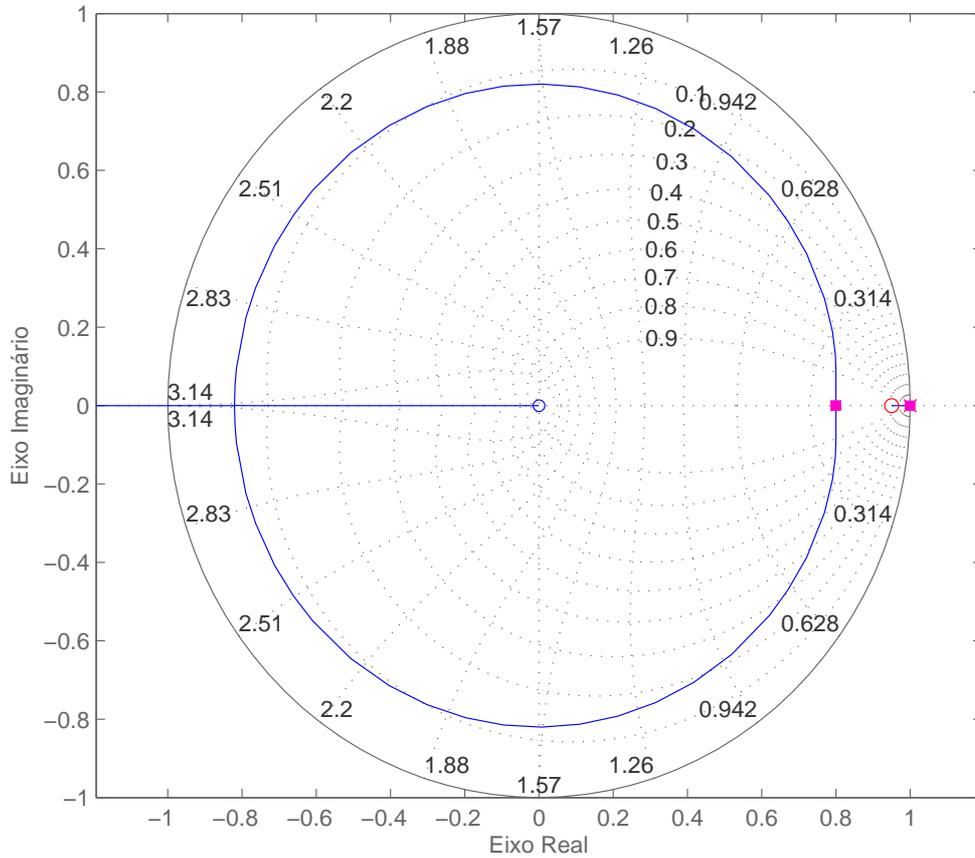


Figura 3: Lugar da raízes para o sistema (3) com compensador PI.

quando posicionamento do zero do controlador é possível fazer com que o lugar das raízes passe pela origem do plano. Isso ocorre quando o zero do controlador é posicionado em $z = 0,4$.

Com essa disposição de polos e zeros e malha aberta, o ganho em malha fechada para posicionar os polos de malha fechada na origem do plano é

$$K = \frac{\prod \text{distância dos polos}}{\prod \text{distância dos zeros}} = \frac{0,8 \times 0,8}{0,4} = 1,6$$

Assim, o controlador é dado por

$$C(z) = 1,6 \frac{z - 0,4}{z} \quad (4)$$

Assim, de (2) tem-se

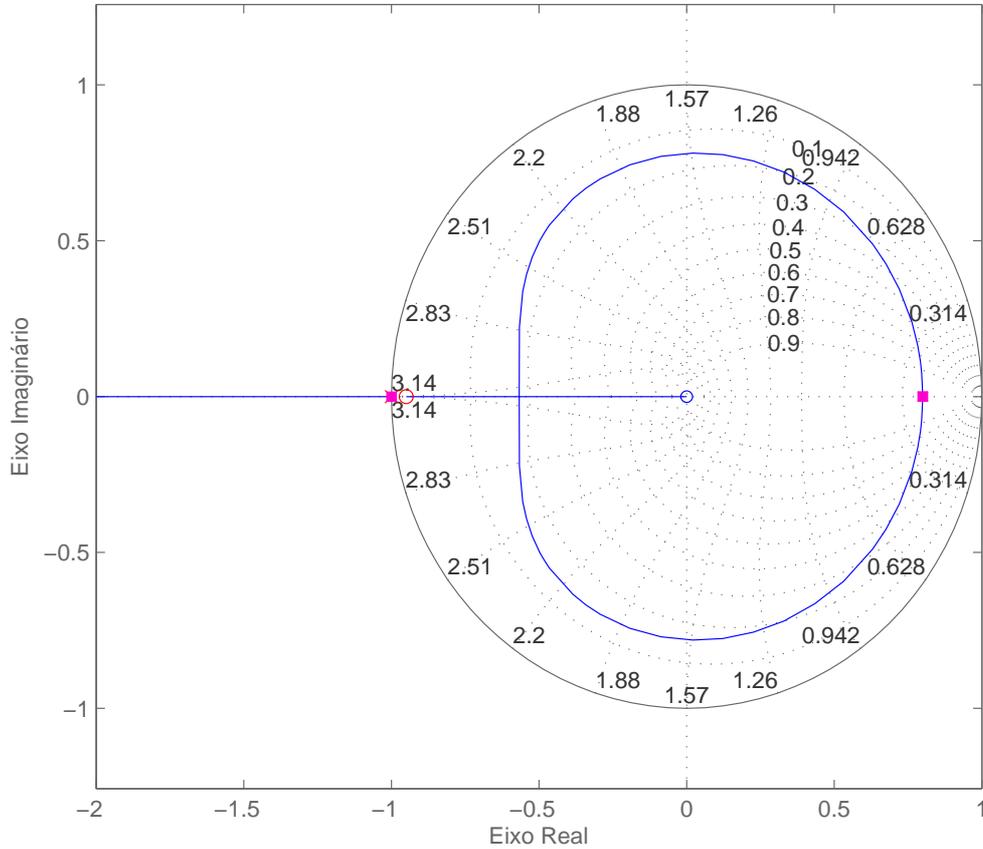


Figura 4: Lugar da raízes para o sistema (3) com compensador PD obtido com aproximação bilinear.

$$C(z) = K_p(1 + \tau_d) \frac{z - \frac{\tau_d}{1+\tau_d}}{z} = 1,6 \frac{z - 0,4}{z}$$

de onde

$$\begin{aligned} K_p(1 + \tau_d) &= 1,6 \\ \frac{\tau_d}{1 + \tau_d} &= 0,4 \end{aligned}$$

Portanto $\tau_d = 0,6667$ e $K_p = 0,96$, que leva a $K_d = K_p \tau_d T = 0,64T$.
A Fig. 6 mostra a resposta do sistema ao degrau unitário.

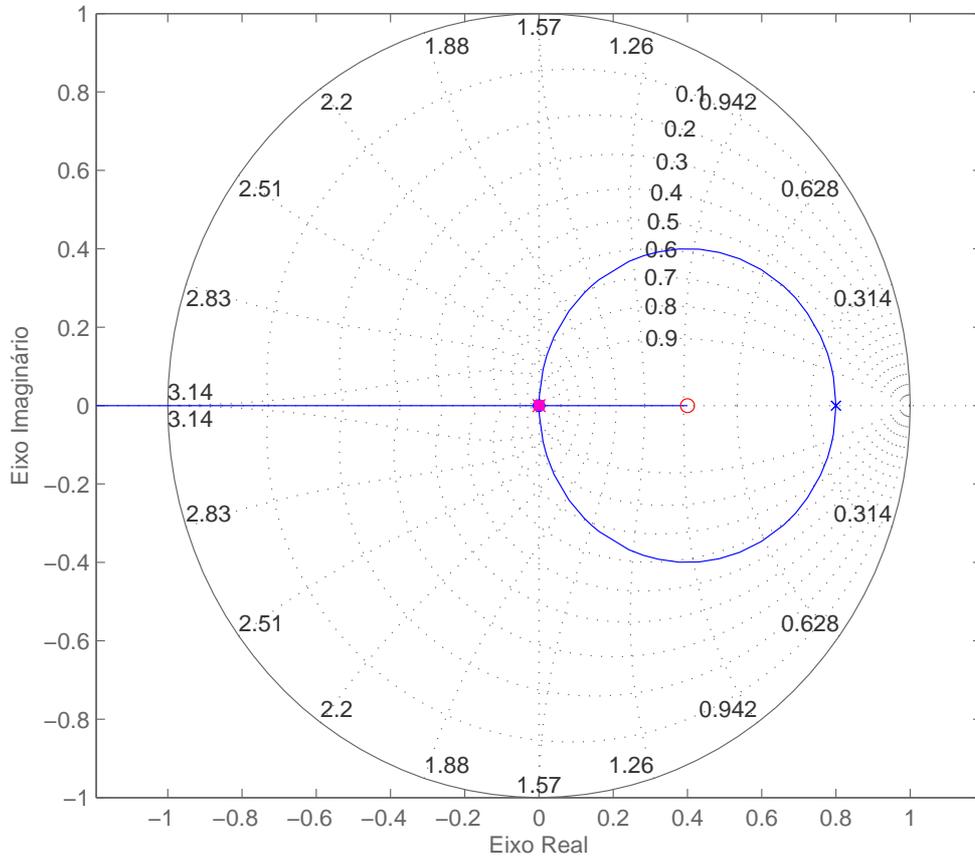


Figura 5: Lugar da raízes para o sistema (3) com compensador PD obtido com aproximação *backward differences*.

Outra possibilidade seria utilizar um controlador PID. No entanto, se for utilizada a aproximação bilinear, obtém-se uma situação semelhante à resultante com o controlador PID, como mostra o diagrama do lugar das raízes mostrado na Fig. 7. Obviamente os zeros em $z = 0,4$ e $z = -0,4$ podem ser livremente localizados, mas qualquer localização não fará com que o lugar das raízes seja tal que permita que todos os polos de malha fechada sejam localizados na origem.

*Porém, utilizando-se um compensador PID obtido com a aproximação *backward differences* resulta no lugar das raízes mostrado na Fig. 8. Note que ocorre um cancelamento do zero da planta com o polo na origem do controlador. Os dois zeros do controlador podem ser livremente localizados. Uma escolha conveniente é utilizar um dos zeros para cancelar um dos polos da planta em $z = 0,8$ e loca-*

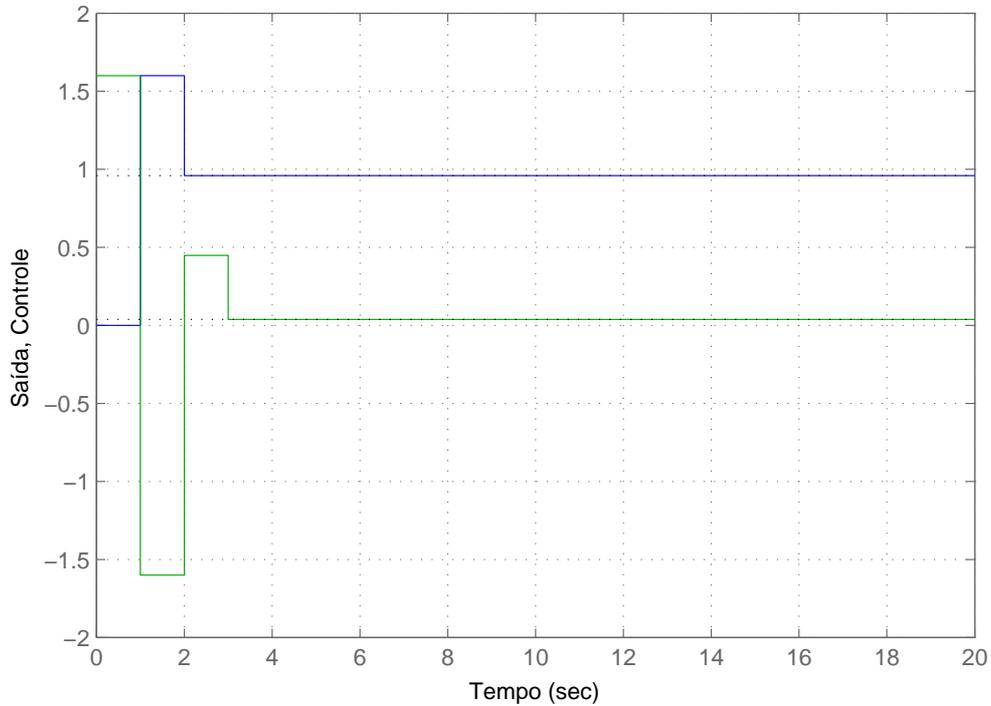


Figura 6: Resposta ao degrau do sistema (3) com o compensador (4).

lizar o outro zero de forma que o diagrama do lugar das raízes passe pela origem do plano. Isso ocorre quando o zero é posicionado em $z = 0,4444$.

Com essa disposição de polos e zeros e malha aberta, o ganho em malha fechada para posicionar os polos de malha fechada na origem do plano é

$$K = \frac{\prod \text{distância dos polos}}{\prod \text{distância dos zeros}} = \frac{1 \times 0,8}{0,4444} = 1,8002$$

Assim, o controlador é dado por

$$C(z) = 1,8002 \frac{(z - 0,8)(z - 0,4444)}{z(z - 1)} \quad (5)$$

Assim, de (2) tem-se

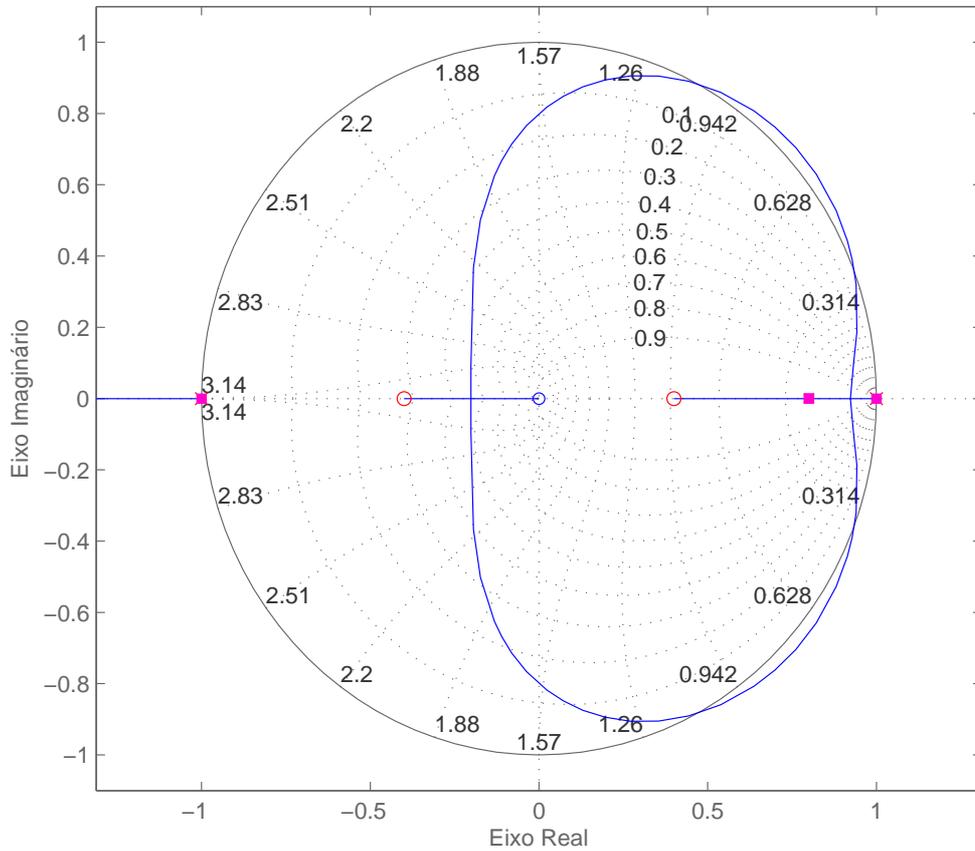


Figura 7: Lugar da raízes para o sistema (3) com compensador PID obtido com aproximação bilinear.

$$\begin{aligned}
 C(z) &= K_p \left(1 + \frac{1}{\tau_i} + \tau_d \right) \frac{z^2 - \frac{1+2\tau_d}{1+\frac{1}{\tau_i}+\tau_d}z + \frac{\tau_d}{1+\frac{1}{\tau_i}+\tau_d}}{z(z-1)} \\
 &= 1,8002 \frac{(z - 0,8)(z - 0,4444)}{z(z-1)} = 1,8002 \frac{z^2 - 1,2444z + 0,3555}{z(z-1)}
 \end{aligned}$$

de onde

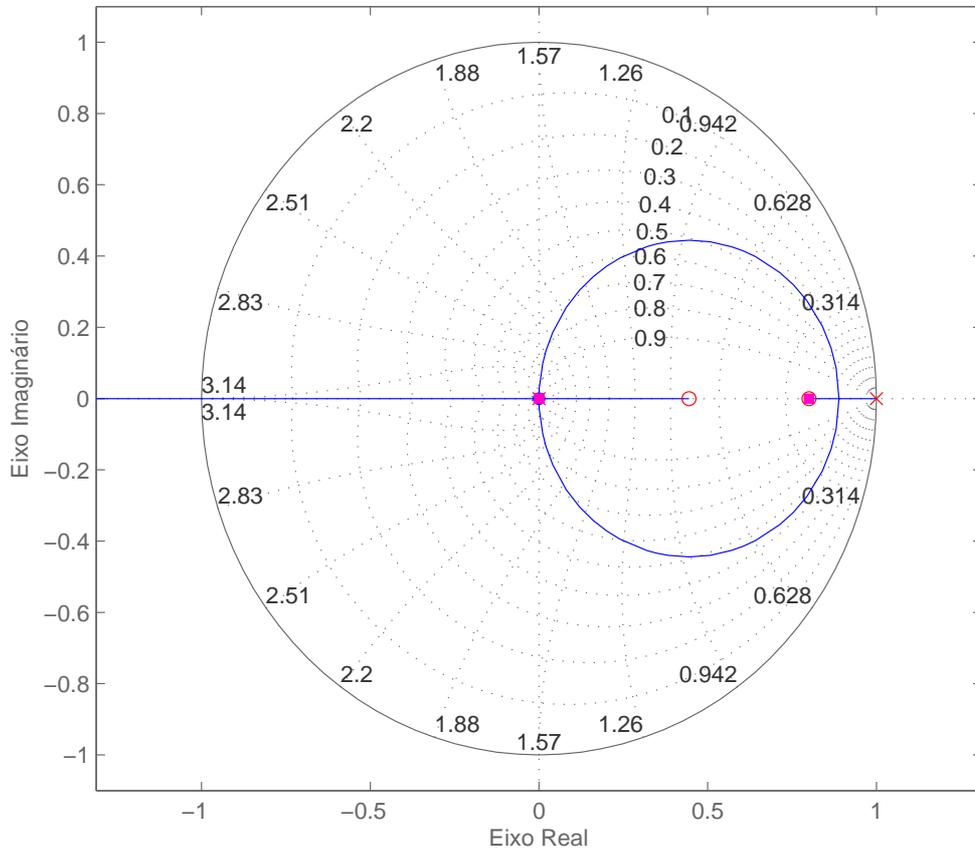


Figura 8: Lugar da raízes para o sistema (3) com compensador PID obtido com aproximação *backward differences*.

$$K_p \left(1 + \frac{1}{\tau_i} + \tau_d \right) = 1,8002$$

$$\frac{1 + 2\tau_d}{1 + \frac{1}{\tau_i} + \tau_d} = 1,2444$$

$$\frac{\tau_d}{1 + \frac{1}{\tau_i} + \tau_d} = 0,3555$$

ou

$$\begin{aligned}
K_p \left(1 + \frac{1}{\tau_i} + \tau_d \right) &= 1,8002 \\
\frac{\tau_i + 2\tau_i\tau_d}{\tau_i + 1 + \tau_i\tau_d} &= 1,2444 \\
\frac{\tau_i\tau_d}{\tau_i + 1 + \tau_i\tau_d} &= 0,3555
\end{aligned}$$

que é equivalente a

$$\begin{aligned}
K_p \left(1 + \frac{1}{\tau_i} + \tau_d \right) &= 1,8002 \\
\tau_i\tau_d - 0,3235\tau_i &= 1,6469 \\
\tau_i\tau_d - 0,5516\tau_i &= 0,5516
\end{aligned}$$

Portanto $\tau_i = 4.8018$, $\tau_d = 0,6665$ e $K_p = 0,9602$, que leva a $K_i = \frac{K_p}{\tau_i T} = 0,2T$ e $K_d = K_p\tau_d T = 0,64T$.

A Fig. 9 mostra a resposta do sistema ao degrau unitário.

6 Controlador PID Ótimo

Utilizando a aproximação *backward differences*, a sua expressão do controlador PID na forma discreta é:

$$u(k) = K_p e(k) + K_i T \sum_{i=0}^k e(i) + K_d \frac{1}{T} (e(k) - e(k-1)) \quad (6)$$

E considerando (6) atrasado de um período de amostragem tem-se:

$$u(k-1) = K_p e(k-1) + K_i T \sum_{i=0}^{k-1} e(i) + K_d \frac{1}{T} (e(k-1) - e(k-2))$$

e

$$u(k) - u(k-1) = K_p (e(k) - e(k-1)) + K_i T e(k) + K_d \frac{1}{T} (e(k) - 2e(k-1) + e(k-2))$$

ou

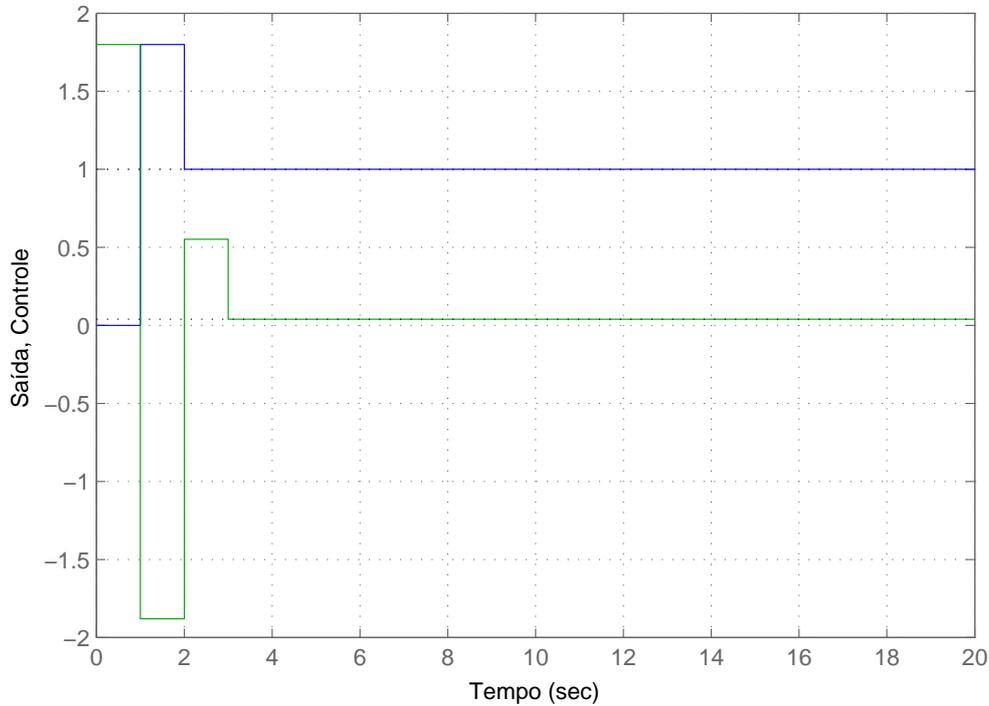


Figura 9: Resposta ao degrau do sistema (3) com o compensador (5).

$$u(k) = u(k-1) + K_p (e(k) - e(k-1)) + K_i T e(k) + K_d \frac{1}{T} (e(k) - 2e(k-1) + e(k-2))$$

que é uma forma mais conveniente de ser utilizada por evitar problemas de *overflow* devido ao somatório. Adicionalmente, na presença de saturação, basta corrigir o valor de $u(k-1)$ para o valor saturado para evitar o problema de *windup*¹.

O problema de controle PID ótimo consiste em obter-se os valores de K_p , K_i e K_d de forma que o desempenho do sistema seja o melhor possível. Ou seja, um controlador ótimo é um controlador que faz com que o desempenho do sistema seja, no mínimo, tão bom quanto o possível de ser obtido com qualquer outro controlador².

Outro aspecto do problema é o que significa melhor desempenho. Obviamente, o que é desempenho melhor depende de como se mede o desempenho. Em

¹Obviamente, existem técnicas mais sofisticadas de *anti-windup*, mas estão fora do escopo do problema tratado aqui.

²Em sistemas de controle, otimizar significa obter comprovadamente o melhor possível e não apenas melhorar o desempenho.

controle ótimo é usual definir um índice de desempenho, usualmente denominado de custo, cujo valor é um escalar. Os custos mais utilizados são:

Integral of Squared Error (ISE): o desempenho do sistema é avaliado pela expressão (7). A característica deste índice de desempenho é que ele dá grande peso para erros grandes e pequeno peso para erros pequenos. Um sistema que minimiza este critério tende a apresentar uma rápida diminuição em um erro inicial grande. Portanto, a resposta é rápida e oscilatória. Assim, o sistema tem baixa estabilidade relativa.

$$J(K_p, K_i, K_d) = \sum_{k=0}^n e^2(k) \quad (7)$$

Integral of Absolute Error (IAE): o desempenho do sistema é avaliado pela expressão (8). Um sistema ótimo baseado neste critério é um sistema que tem um amortecimento razoável e uma característica de resposta transitória satisfatória.

$$J(K_p, K_i, K_d) = \sum_{k=0}^n |e(k)| \quad (8)$$

Integral of Time \times Squared Error (ITSE): o desempenho do sistema é avaliada pela expressão (9). Uma característica é que, na resposta ao degrau unitário, um erro inicial grande é ponderado com peso baixo, enquanto que erros que ocorrem mais tarde na resposta transitória são bastante penalizados.

$$J(K_p, K_i, K_d) = \sum_{k=0}^n k e^2(k) \quad (9)$$

Critério ITAE: o desempenho do sistema é avaliado pela expressão (10). Assim como no critério apresentado anteriormente, um erro inicial grande em uma resposta a degrau unitário é ponderado com peso pequeno e erros que ocorrem mais tarde na resposta transitória são bastante penalizados. A característica de um sistema que minimiza este critério é que o *overshoot* é pequeno e oscilações são bem amortecidas

$$J(K_p, K_i, K_d) = \sum_{k=0}^n k |e(k)| \quad (10)$$

Assim, na abordagem de controle ótimo, os ganhos do controlador PID podem ser obtidos através de

$$K_p^*, K_i^*, K_d^* = \arg \min_{K_p, K_i, K_d} J(K_p, K_i, K_d)$$

Embora em alguns casos seja possível realizar a minimização de forma algébrica, em geral a obtenção da solução requer o uso do modelo do sistema no espaço de estados. Por outro lado, tendo-se apenas o modelo entrada-saída do sistema é possível computar o custo $J(K_p, K_i, K_d)$ conhecendo-se os valores dos ganhos. Dessa forma é possível utilizar procedimentos numéricos para realizar a minimização. Uma vantagem da otimização numérica é que o método de sintonia do controlador aplica-se também a plantas não lineares.

6.1 Método de Hooke-Jeeves

O método de Hooke-Jeeves é um método simples para realizar uma minimização numérica multidimensional. O método consiste basicamente em determinar uma direção de decremento do custo e fazer uma minimização unidimensional nessa direção.

Dados o vetor de ganhos K , de dimensão n , o passo do algoritmo de otimização h , a precisão de parada ϵ e um valor inicial para os ganhos $K(0)$, o algoritmo é

1. Achar a direção de busca

Para $i = 1$ até n faça

$$\text{Se } J \begin{pmatrix} K_1(k) \\ \vdots \\ K_i(k) + h \\ \vdots \\ K_n(k) \end{pmatrix} \leq J \begin{pmatrix} K_1(k) \\ \vdots \\ K_i(k) \\ \vdots \\ K_n(k) \end{pmatrix} \text{ faça } H_i = h$$

Senão

$$\text{Se } J \begin{pmatrix} K_1(k) \\ \vdots \\ K_i(k) - h \\ \vdots \\ K_n(k) \end{pmatrix} \leq J \begin{pmatrix} K_1(k) \\ \vdots \\ K_i(k) \\ \vdots \\ K_n(k) \end{pmatrix} \text{ faça } H_i = -h$$

Senão faça $H_i = 0$

2. Busca unidimensional (Algoritmo de Davies-Swan-Campey)

$$K(k+1) = K(k) + \lambda^* H$$

Onde

$$\lambda^* = \arg \min_{\lambda} J(K(k) + \lambda H)$$

3. Critério de parada

Se $\|J(K(k+1)) - J(K(k))\| \leq \epsilon$ ou $k >$ número máximo de iterações

$K^* = K(k+1)$ e fim

Senão $k = k + 1$ e vá para 1

O método de Davies-Swan-Campey, dada um valor inicial $\lambda_0(0)$, passo inicial $\delta(k)$, a tolerância ϵ , e $K \in [0, 1]^3$ é:

1.

$$\lambda_{-1}(k) = \lambda_0(k) - \delta(k)$$

$$\lambda_1(k) = \lambda_0(k) + \delta(k)$$

$$J_0(k) = J(\lambda_0(k))$$

$$J_1(k) = J(\lambda_1(k))$$

2. Se $J_0(k) > J_1(k)$ faça $p = 1$ e vá para 3 senão calcule $J_{-1}(k) = J(\lambda_{-1}(k))$

Se $J_{-1}(k) < J_0(k)$ faça $p = -1$ e vá para 3 senão vá para 6

3. Para $n = 1, 2, \dots$ calcule $J_n(k) = f(\lambda_{n-1}(k) + 2^{n-1}p\delta(k))$ até $J_n(k) > J_{n-1}(k)$

4. Calcule $J_m(k) = J(\lambda_{n-1}(k) + 2^{n-2}p\delta(k))$

5. Se $J_m(k) \geq J_{n-1}(k)$, calcule

$$\lambda_0(k+1) = \lambda_{n-1}(k) + \frac{2^n - 2p\delta(k)(J_{n-2}(k) - J_m(k))}{2(J_{n-2}(k) - 2J_{n-1}(k) + J_m(k))}$$

Senão calcule

$$\lambda_0(k+1) = \lambda_m(k) + \frac{2^n - 2p\delta(k)(J_{n-1}(k) - J_n(k))}{2(J_{n-1}(k) - 2J_m(k) + J_n(k))}$$

Se $2^{n-2}\delta(k) \leq \epsilon$ vá para 7 senão faça $\delta(k+1) = K\delta(k)$ e vá para 1

³Um valor típico é $K = 0.1$.

6. Calcule

$$\lambda_0(k+1) = \lambda_0(k) + \frac{\delta(k)(J_{-1}(k) - J_1(k))}{2(J_{-1}(k) - 2J_0(k) + J_1(k))}$$

Se $\delta(k) \leq \epsilon$ vá para 7 senão faça $\delta(k+1) = K\delta(k)$ e vá para 1

7. $\lambda^* = \lambda_0(k+1)$

Utilizando os algoritmos acima para o sistema descrito por

$$G(s) = \frac{4.25}{s^3 + 2.14s^2 + 9.28s + 4.23}$$

e utilizando o critério ISE, resulta nos ganhos $K_p = 1,754$, $K_i = 0,315$, $K_d = 14,10$, com um $J(20) = 5,389$, e a figura 10 mostra o sinal de saída, o sinal de controle, o sinal erro e a evolução do custo.

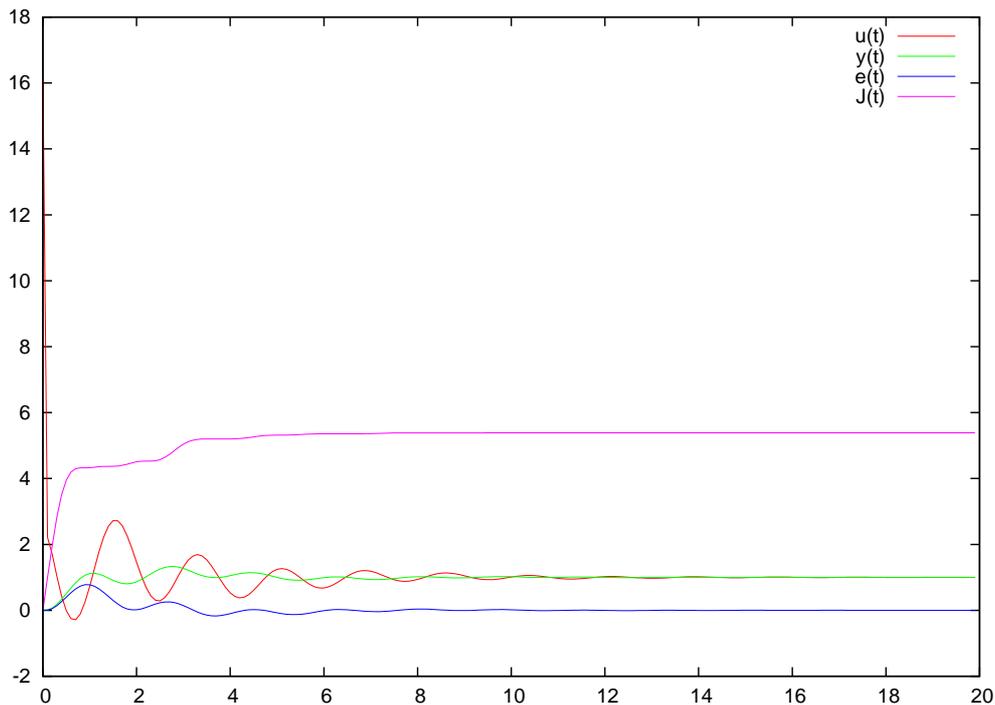


Figura 10: Resposta do PID ótimo segundo o critério ISE.

Pode-se perceber que a amplitude do sinal de controle pode tornar-se bastante elevada, eventualmente tornando a implementação do controlador impossível na prática. Uma alternativa para contornar esse problema é incluir no custo uma ponderação para a energia de controle, substituindo os critérios por

ISE':

$$J(K_p, K_i, K_d) = \sum_{k=0}^n (e^2(k) + \rho u^2(k)) \quad (11)$$

IAE':

$$J(K_p, K_i, K_d) = \sum_{k=0}^n (|e(k)| + \rho u^2(k)) \quad (12)$$

Repetindo a otimização para a mesma planta, porém utilizando critério ISE' com $\rho = 0.1$, resulta nos ganhos $K_p = 1,759$, $K_i = 0,091$, $K_d = 2,346$, com um $J(20) = 38,604$, e a figura 11 mostra o sinal de saída, o sinal de controle, o sinal erro e a evolução do custo/10.

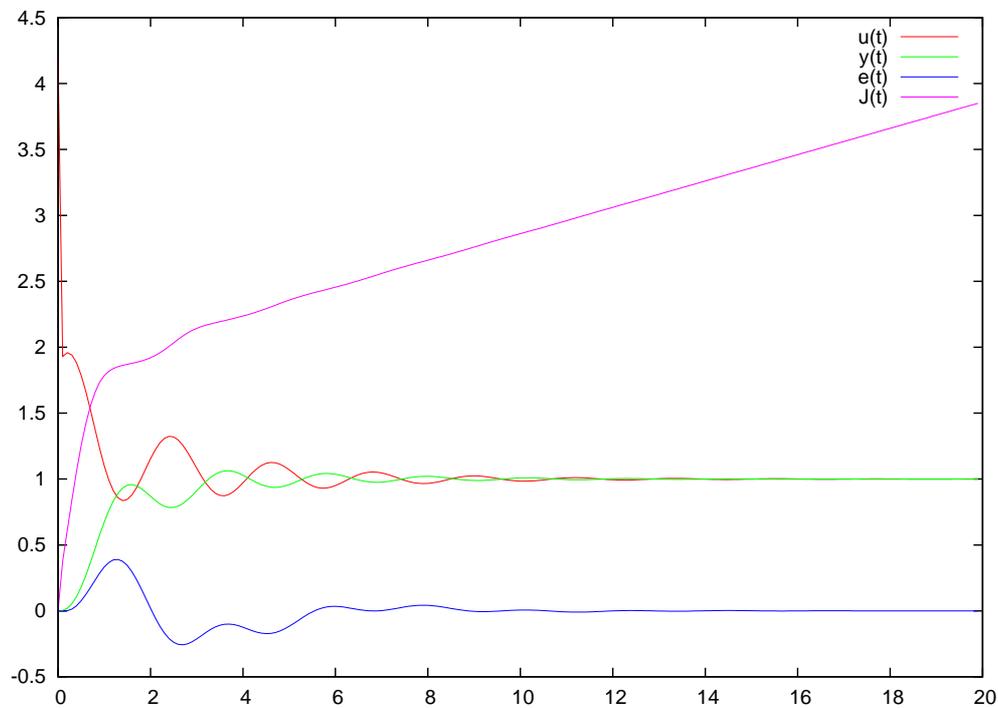


Figura 11: Resposta do PID ótimo segundo o critério ISE' com $\rho = 0.1$.

Note-se que não é intuitivo o ajuste do parâmetro ρ e que não existe uma correspondência direta do valor desse parâmetro com especificações típicas da resposta desejada para o sistema, como tempo de acomodação e *overshoot*.

Uma abordagem alternativa, para se recuperar intuição na especificação dos parâmetros é utilizar um critério semelhante ao ISE, mas utilizando (para efeitos de cálculo do critério) o erro em relação a um modelo de referência e não em relação a referência em sí. Ou seja, calculado o custo por

$$J(K_p, K_i, K_d) = \sum_{k=0}^n e_m^2(k)$$

onde $e_m(k) = y(k) - y_m(k)$, sendo $y_m(k)$ a saída de um modelo de referência escolhido para ter o desempenho desejado para o sistema. Nesse caso, utilizou-se o modelo

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2 + s + 1}$$

A otimização para a mesma planta, porém utilizando o modelo de referência resulta nos ganhos $K_p = 0,7055$, $K_i = 0,1102$, $K_d = 0,2194$, com um $J(20) = 0,1437$, e a figura 12 mostra o sinal de saída, o sinal de controle, o sinal erro e a evolução do custo.

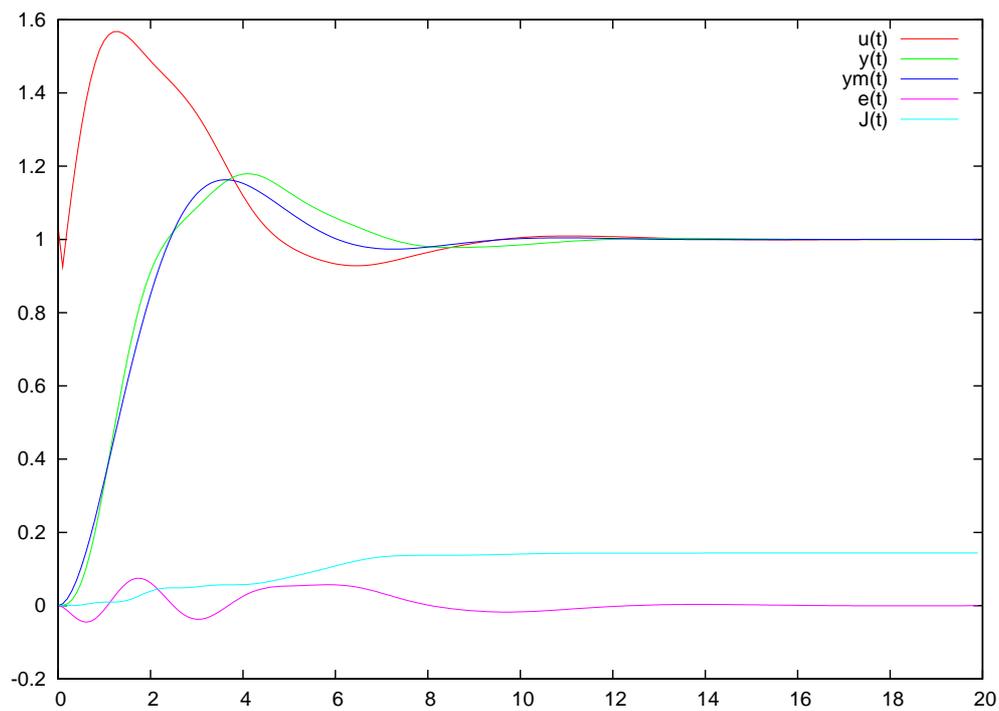


Figura 12: Resposta do PID ótimo em relação ao modelo de referência.