

## Alocação de Polos

Prof. Walter Fetter Lages

8 de novembro de 2011

### 1 Introdução

Seja o sistema dado por

$$\begin{aligned}x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k)\end{aligned}$$

Realimentando-se  $x(k)$ , ou seja, fazendo

$$u(k) = Kx(k) + r(k)$$

onde  $(k)$  é o sinal de referência, tem-se o sistema mostrado na Fig. 1.

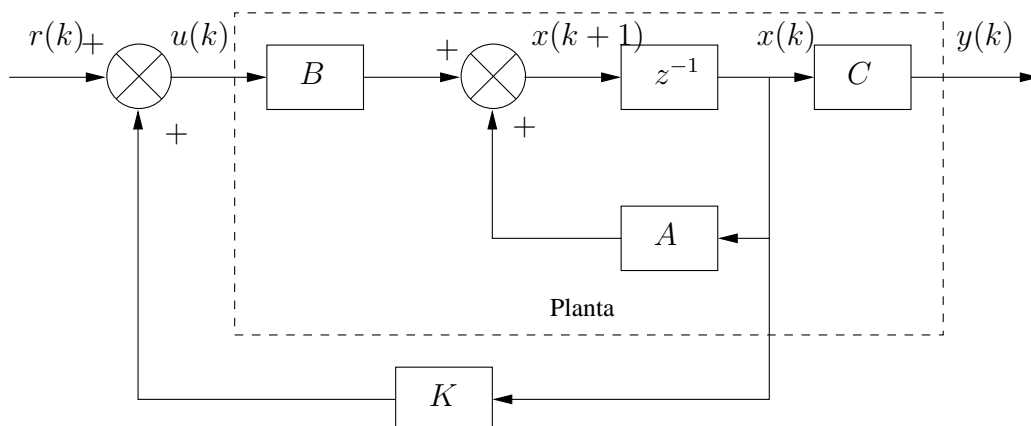


Figura 1: Sistema com realimentação de  $x(k)$ .

Em malha fechada tem-se

$$x(k+1) = Ax(k) + BKx(k) + Br(k)$$

ou

$$x(k+1) = \underbrace{(A + BK)}_{\substack{\text{autovalores} \\ \text{podem ser} \\ \text{alocados} \\ \text{livremente} \\ \text{escolhendo-se } K}} x(k) + Br(k)$$

Portanto, se o sistema for completamente controlável<sup>1</sup>, é possível alocar-se todos os polos do sistema. Ou seja, pode-se dar ao sistema qualquer desempenho desejado.

## 2 Alocação de Polos

Seja o sistema

$$\begin{aligned}x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k)\end{aligned}$$

e a seguinte transformação de variáveis:

$$\bar{x}(k) = Px(k)$$

Portanto

$$\begin{aligned}\bar{x}(k+1) &= P(x(k+1)) = PAx(k) + PBu(k) \\ \bar{x}(k+1) &= PAP^{-1}\bar{x}(k) + PBu(k) \\ \bar{x}(k+1) &= \bar{A}\bar{x}(k) + \bar{B}u(k)\end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned}\bar{A} &\triangleq PAP^{-1} \\ \bar{B} &\triangleq PB\end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>Um sistema de ordem  $n$  é completamente controlável se e somente se  $\text{rank}(\mathcal{C}(A, B)) = \text{rank} \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = n$ .

e

$$\begin{aligned} y(k) &= Cx(k) + Du(k) = CP^{-1}x(k) + Du(k) \\ y(k) &= \bar{C}\bar{x}(k) + Du(k) \end{aligned}$$

com

$$\bar{C} \triangleq CP^{-1}$$

Se o sistema for completamente controlável, é possível escolher-se  $P$  de forma que seja possível escrever o sistema na forma canônica controlável [1]:

$$\begin{aligned} \bar{x}(k+1) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -\alpha_n & -\alpha_{n-1} & -\alpha_{n-2} & \cdots & -\alpha_2 & -\alpha_1 \end{bmatrix} \bar{x}(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \\ y &= [\beta_n \ \beta_{n-1} \ \cdots \ \beta_1] \bar{x}(k) + Du(k) \end{aligned}$$

Ou, no domínio da frequência,

$$G(z) = \frac{\beta_1 z^{n-1} + \beta_2 z^{n-2} + \cdots + \beta_n}{z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \cdots + \alpha_n} + D$$

Fazendo  $u(k) = Kx(k) + r(k)$  tem-se

$$u(k) = KP^{-1}\bar{x}(k) + r(k)$$

$$u(k) = \bar{K}\bar{x}(k) + r(k)$$

com  $\bar{K} \triangleq KP^{-1}$

Em malha fechada

$$\bar{x} = (\bar{A} + \bar{B}\bar{K})x(k) + \bar{B}r(k)$$

Fazendo-se

$$\bar{K} = [(\alpha_n - \alpha_n^*) \ (\alpha_{n-1} - \alpha_{n-1}^*) \ \cdots \ (\alpha_1 - \alpha_1^*)]$$

onde  $\alpha_i^*$  são os autovalores desejados, obtém-se

$$\bar{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -\alpha_n^* & -\alpha_{n-1}^* & -\alpha_{n-2}^* & \cdots & -\alpha_2^* & -\alpha_1^* \end{bmatrix} \bar{x}(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

que tem os autovalores desejados.

Conforme [1], a matriz  $P$ , que coloca o sistema na forma canônica controlável é dada por

$$\begin{aligned} P &\triangleq Q^{-1} \\ Q &= [q_1 \ q_1 \ \cdots \ q_n] \\ q_n &= B \\ q_{n-1} &= Aq_n + \alpha_1 q_n = AB + \alpha_1 B \\ q_{n-2} &= Aq_{n-1} + \alpha_2 q_n = A^2 B + \alpha_1 AB + \alpha_2 B \\ &\vdots \\ q_1 &= Aq_2 + \alpha_{n-1} q_n = A^{n-1} B + \alpha_1 A^{n-2} B + \cdots + \alpha_{n-1} B \end{aligned}$$

### 3 Algoritmos de Alocação de Polos

Dados  $A$ ,  $B$  e os autovalores desejados  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , determinar o ganho  $K$  tal que a matriz  $(A + BK)$  tenha esses autovalores.

1. Calcular o polinômio característico de  $A$ :

$$\det(zI - A) = z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \cdots + \alpha_n$$

2. Computar o polinômio característico desejado:

$$(z - \lambda_1)(z - \lambda_2) \cdots (z - \lambda_n) = z^n + \alpha_1^* z^{n-1} + \cdots + \alpha_n^*$$

3. Determinar

$$\bar{K} = [(\alpha_n - \alpha_n^*) \quad (\alpha_{n-1} - \alpha_{n-1}^*) \quad \cdots \quad (\alpha_1 - \alpha_1^*) \quad ]$$

4. Calcular  $q_{n-i} = Aq_{n-i+1} + \alpha_i q_n$ , para  $i = 1, 2, \dots, (n - 1)$ , com  $q_n = B$ .
5. Formar  $Q = [q_1 \quad q_2 \quad \dots \quad q_n]$
6. Achar  $P = Q^{-1}$
7.  $K = \bar{K}P$

## 4 Exercícios

Dado o sistema descrito por

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) &= [0 \quad 0 \quad 1] x(k) \end{aligned}$$

1. Esse sistema é estável em malha aberta?
2. Determine a faixa de valores admissíveis para o ganho do sistema quando utilizando uma realimentação de saída com ganho proporcional.
3. Determine uma lei de controle tal que os polos do sistema em malha fechada localizem-se em  $z = 0,3$ ,  $z = 0,5$  e  $z = 0,7$ .

## Referências

- [1] C. T. Chen. *Linear System Theory and Design*. Holt, Rinehart & Winston, New York, 1984.