Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Escola de Engenharia
Departamento de Engenharia Elétrica
ENG04037 Sistemas de Controle Digitais

Projeto pelo Método Direto de Ragazzini

Prof. Walter Fetter Lages

11 de maio de 2009

1 Introdução

O método de Ragazzini é um método algébrico de projeto de controladores digitais. Basicamente, constrói-se uma função de transferência de malha fechada que tenha as características de desempenho desejadas e que obedeça as restrições necessárias para que seja implementável. O controlador é obtido de forma que cancele os polos e zeros da planta e adicionar os novos polos e zeros para implementar a função de transferência de malha fechada. Ou seja, considerando o sistema mostrado na Fig. 1, a função de transferência de malha fechada deve ser

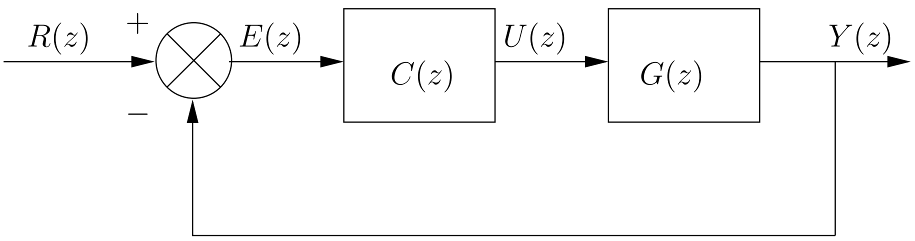

Figura 1: Diagrama de blocos de um controle digital.

$$H(z) = \frac{C(z)G(z)}{1 + C(z)(H(z)}$$

de onde

$$C(z) = \frac{1}{G(z)} \frac{H(z)}{1 - H(z)} \tag{1}$$

Obviamente, $C(z)$ também deve obedecer a determinadas condições para que seja implementável.

2 Restrições para que $C(z)$ e $H(z)$ sejam implementáveis

Para que o controlador projetado seja implementável e o desempenho desejado atingido, é necessário garantir as seguintes condições:

Causalidade: $\lim_{z=\to\infty} C(z) < \infty$

Portanto, de (1) tem-se que se $G(z)$ tem um zero no infinito então, $C(z)$ terá um polo no infinito, a menos que $H(z)$ cancele esse polo. Assim, para que $C(z)$ seja causal,

> $H(z)$ deve ter zeros no infinito da mesma ordem que os zeros de $G(z)$ no infinito.

$\lceil$

Tipicamente $G(z)$ tem pelo menos um zero no infinito porque a resposta tem um atraso de um período de amostragem. A Exigência de causalidade exige que $H(z)$ seja tal que a malha fechada tenha, pelo menos, o mesmo atraso.

$\lfloor$

Estabilidade: $1 + C(z)G(z) = 0$

Supondo $C(z) = \frac{c(z)}{d(z)}$ e $G(z) = \frac{b(z)}{a(z)}$:

$$1 + \frac{c(z)}{d(z)}\frac{b(z)}{a(z)} = 0$$

$$c(z)b(z) = -a(z)d(z)$$

$$c(z)b(z) + a(z)d(z) = 0$$

Suponha que exista um fator comum entre $C(z)$ e $G(z)$, como se $C(z)$ tivesse sido projetado cancelando um polo ou zero de $G(z)$. Seja este fator $(z - \alpha)$, um polo de $G(z)$ tal que

$$a(z) = (z-\alpha)\bar{a}(z)$$

de forma que, para cancelar

$$c(z) = (z-\alpha)\bar{c}(z)$$

Logo,

$$\begin{aligned}(z-\alpha)\bar{a}(z)d(z) + b(z)(z-\alpha)\bar{c}(z) &= 0\\ (z-\alpha)\left(\bar{a}(z)d(z) + b(z)\bar{c}(z)\right) &= 0\end{aligned}$$

ou seja, o fator comum continua sendo um fator do polinômio característico. Se estiver fora do círculo unitário, o sistema será instável.

Se $C(z)$ não deve cancelar polos de $G(z)$, então o fator de $a(z)$ deve ser um fator de $1-H(z)$. Da mesma forma, para não cancelar zeros de $G(z)$, eles devem ser fatores de $H(z)$. Assim, tem-se que

$1-H(z)$ deve conter como zeros todos os polos de $G(z)$ fora do círculo unitário.

$H(z)$ deve conter como zeros todos os zeros de $G(z)$ fora do círculo unitário.

Precisão em regime permanente: $E(z) = R(z)\left(1-H(z)\right)$

Logo, se o sistema deve ser do tipo 1, com K_v constante, deve-se ter erro estacionário zero ao degrau e $\frac{1}{K_v}$ à rampa unitária. Ou seja

$$e_p(\infty) = \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{1}{z-1}\left(1-H(z)\right) = 0 \Rightarrow H(1) = 1$$

$$e_v(\infty) = \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{Tz}{(z-1)^2}\left(1-H(z)\right) = \frac{1}{K_v}$$

, que é uma indeterminação, pois $1-H(z)|_{z=1} = 0$. Logo é necessário usar a regra de L'Hôpital:

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to 1}\frac{Tz}{z-1}\left(1-H(z)\right) &= T\lim_{z\to 1}\frac{(1-H(z))}{z-1}\\
&= -T\lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}H(z)\\
-T\frac{d}{dz}H(z)\bigg|_{z=1} &= \frac{1}{K_v}
\end{aligned}$$

Exemplo 1 *Suponha o projeto do sistema de controle de uma antena, para o qual deseja-se obter um overshoot* $\leq 16\%$, *erro à rampa de* $0,01rd/s < 0,01rd$ *e tempo de acomodação a* $1\% \leq 10s$, *com período de amostragem de 1s.*

O modelo discretizado, considerando o segurador de ordem zero é

$$G(z) = 0,0484\frac{z+0,9672}{(z-1)(z-0,9048)}$$

Das especificações de desempenho tem-se:

$$\begin{aligned}
\textit{Overshoot} &< 16\% \Rightarrow \xi > -\frac{\frac{\ln M_p}{\pi}}{\sqrt{1+\left(\frac{\ln M_p}{\pi}\right)^2}}\\
\xi &> -\frac{\frac{\ln 0,16}{\pi}}{\sqrt{1+\left(\frac{\ln 0.16}{\pi}\right)^2}}\\
\xi &> 0,5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t_s &\leq 10s \Rightarrow t_s = \frac{4,6}{\xi\omega_n}\\
\omega_n &\approx 1rd/s\\
\omega_d &= \omega_n\sqrt{1-\xi^2} = 0,867rd/s\\
\sigma &= \xi\omega_n = 0,5rd/s
\end{aligned}$$

Portanto, os polos desejados para o sistema são:

$$s = -0,5 \pm j0,867$$

que mapeados para o plano z, *com* $T = 1s$ *tornam-se*

$$z = e^{sT} = 0,392 \pm j0,462$$

que equivale à equação característica

$$
\begin{aligned}
z^2 - 0.7859z + 0,36788 &= 0 \\
1 - 0,7859z^{-1} + 0,36788z^{-2} &= 0
\end{aligned} \tag{2}
$$

Portanto $H(z)$ *deve ter polos iguais as raízes de (2) e, se necessário polos adicionais em* $z = 0$ *que tem o menor transiente possível.*

Logo,

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots}{1 - 0,7859z^{-1} + 0,36788z^{-2}}$$

A restrição de causalidade exige que

$$H(z)|_{z=\infty} = 0 \Rightarrow b_0 = 0$$

A restrição de erro ao degrau em regime permanente fornece

$$H(1) = \frac{b_1 + b_2 + \cdots}{1 - 0,7859 + 0,36788} = 1$$

Portanto

$$b_1 + b_2 + \cdots = 0,5820$$

Da restrição de erro à rampa em regime permanente tem-se

$$-T\,\frac{d}{dz}H(z)\bigg|_{z=1} = \frac{1}{K_v}$$

ou

$$
\begin{aligned}
-T \quad & \Big\{\Big[\left(-b_1 z^{-2} - 2b_2 z^{-3} + \cdots\right)\left(1 - 0,7859z^{-1} + 0,36788z^{-2}\right) \\
& - \left(b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots\right)\left(0,7859z^{-2} - (2)0,36788z^{-3}\right)\Big] \\
& \left.\frac{1}{(1 - 0,7859z^{-1} + 0,36788z^{-2})^2}\Big\}\right|_{z=1} = \frac{1}{K_v}
\end{aligned}
$$

$$\frac{(b_1 + 2b_2 + \cdots)(1 - 0,7859 + 0,36788) - (b_1 + b_2 + \cdots)\left(0,7859 - (2)0,36788\right)}{(1 - 0,7859 + 0,36788)^2} = 1$$

$$
\begin{aligned}
\frac{0,5820(b_1 + 2b_2 + \cdots) + 0,5820(0,05014)}{0,5820^2} &= 1 \\
\frac{b_1 + 2b_2 + \cdots + 0,05014}{0,5820} &= 1 \\
b_1 + 2b_2 + \cdots &= 0,5318
\end{aligned}
$$

Como só se tem duas equações a satisfazer, pode-se trunca-las em b_2:

$$
\begin{aligned}
b_1 + b_2 &= 0,5820 \\
b_1 + 2b_2 &= 0,5310
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b_1 &= 0,6321 \\
b_2 &= -0,05014
\end{aligned}
$$

Assim, tem-se

$$
\begin{aligned}
H(z) &= \frac{0,6321z^{-1} - 0,05014z^{-2}}{1 - 0,7859z^{-1} + 0,36788z^{-2}} \\
H(z) &= \frac{0,6321z - 0,05014}{z^2 - 0,7859z + 0,3679z} \\
1 - H(z) &= \frac{(z-1)(z-0,4180)}{z^2 - 0,7859z + 0,3679z}
\end{aligned}
$$

$\left[1 - H(z) \right.$ *deve sempre ter um zero em* $z = 1$*, pois* $H(1) = 1$.

De (1) tem-se

$$
\begin{aligned}
C(z) &= \frac{1}{G(z)} \frac{H(z)}{1 - H(z)} \\
&= \frac{(z-1)(z-0,9048)}{0,0484(z+0,9672)} \frac{0,6321z - 0,05014}{(z-1)(z-0,4180)} \\
C(z) &= 13,07 \frac{(z-0,9048)(z-0,0793)}{(z+0,9672)(z-0,4180)} \qquad (3)
\end{aligned}
$$

A resposta do sistema em malha fechada é mostrada na Fig. 1.

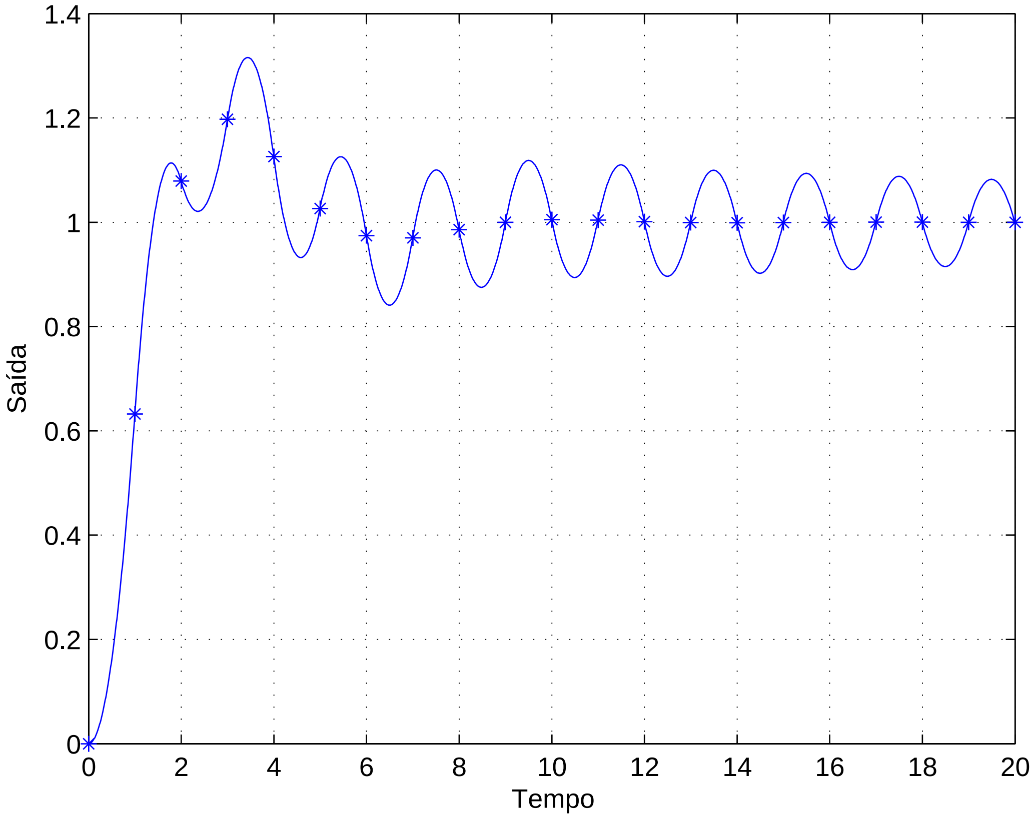

Figura 2: Resposta do sistema com o controlador (3).

$$
\begin{aligned}
\frac{U(z)}{R(z)} &= \frac{C(z)}{1+C(z)G(z)} = \frac{H(z)}{G(z)} \\
&= \frac{0,6321z-0,05014}{z^2-0,7859z+0,3679z} 0,0484 \frac{(z-1)(z-0,9048)}{z+0,9672} \\
\frac{U(z)}{R(z)} &= 13,07 \frac{z-0,0793}{z^2-0,7859z+0,3679z} \frac{(z-1)(z-0,9048)}{\underbrace{z+0,9672}_{\text{Cancelado em malha fechada, mas causa ripple entre amostras se a planta for contínua e amostrada}}}
\end{aligned}
$$

Pode-se evitar o ripple entre amostras usando a transformada z modificada ou incluir o termo b_3z^{-3} em $H(z)$ e forçar $H(z) = 0$ em $z = -0,9672$, de forma que o zero de $G(z)$ não seja cancelado por $C(z)$.