Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Escola de Engenharia
Departamento de Engenharia Elétrica
ENG04037 Sistemas de Controle Digitais

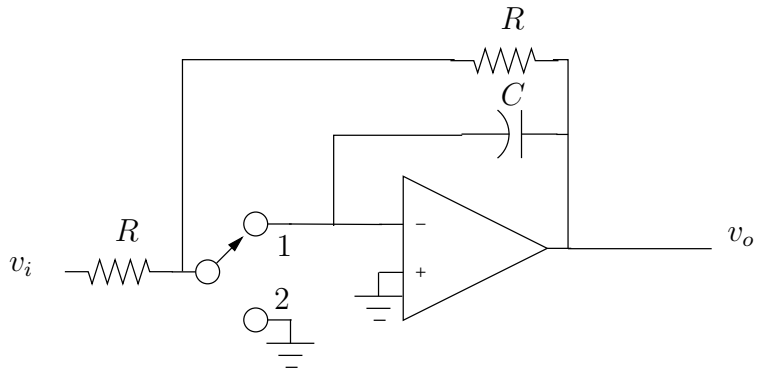
# Amostragem

Prof. Walter Fetter Lages

22 de março de 2009

## 1 Análise do Amostrador e Segurador

Conversores A/D são, tipicamente, precedidos de um amostrador e de um segurador de ordem zero, como mostrado na Fig. 1.




Chave na posição 1 $\Rightarrow$ rastreamento de $v_i$, $\frac{v_0}{v_i} = \frac{1}{RCs+1}$ , com $\frac{1}{RC} >>$ largura de banda do sinal
Chave na posição 2 $\Rightarrow$ segurador

Figura 1: Amostrador e segurador de ordem zero.

Para análise matemática o S&H é separado em um modulador de impulsos seguida por um segurador.

### 1.1 Amostrador

O amostrador, pode ser representado por uma chave, como mostrado na Fig. 2.

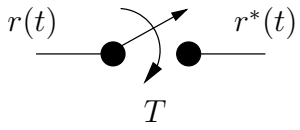



Figura 2: Amostrador.

$$r^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r(t)\delta(t - kT)$$

$$\begin{aligned} R^*(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} r^*(t)e^{-st}dt = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} r(t)\delta(t - kT)e^{-st}dt \\ R^*(s) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} r(kT)e^{-skT} \end{aligned}$$

## 1.2 Segurador

O sinal amostrado é convertido em um sinal constante durante o período de amostragem $T$ por um segurador, como mostrado na Fig. 3.

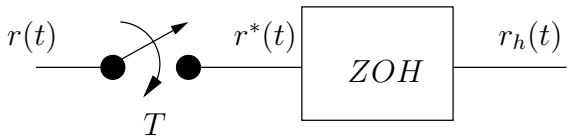



Figura 3: Segurador.

No caso de um segurador de ordem zero, tem-se

$$r_h(t) = r(kT)\ ,\ kT < t < kT_T = (k+1)T$$

Portanto

$$R_h(s) = ZOH(s) = \text{ resposta ao impulso de } r_h(t)$$

$$r^*(t) = \delta(t) \Rightarrow r_h(t) = u(t) - u(t - T)$$

sendo $\delta(t)$ o impulso unitário e $u(t)$ o degrau unitário.

$$
\begin{aligned}
ZOH(s) &= \int_0^{\infty} \left(u(t) - u(t-T)\right) e^{-st} dt \\
ZOH(s) &= \frac{1 - e^{-sT}}{s}
\end{aligned}
$$

# 2 *Aliasing*

O sinal amostrado é o produto do sinal contínuo por um tem de impulsos, ou seja

$$
r^*(t) = r(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)
$$

A expansão em série de Fourier do trem de impulsos resulta

$$
\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{j\left(\frac{2\pi n}{T}\right)t}
$$

com o coeficiente calculado por

$$
\begin{aligned}
C_n &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) e^{-jn\left(\frac{2\pi t}{T}\right)} dt \\
C_n &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t) e^{-jn\left(\frac{2\pi t}{T}\right)} dt \\
C_n &= \frac{1}{T}
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\left(\frac{2\pi n}{T}\right)t}
$$

Definindo $\omega_s \triangleq \frac{2\pi}{T}$:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\{r^*(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} r(t)\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_s t}e^{-st}dt \\
&= \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} r(t)e^{jn\omega_s t}e^{-st}dt \\
&= \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} r(t)e^{-(s-jn\omega_s)t}dt \\
R^*(s) &= \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} R(s-jn\omega_s) \qquad (1)
\end{aligned}
$$

Pode-se perceber, por (1), que o espectro do sinal amostrado é o mesmo espectro do sinal contínuo, porém repetindo-se a cada múltiplo de $\omega_s$, como mostrado na Fig. 4.

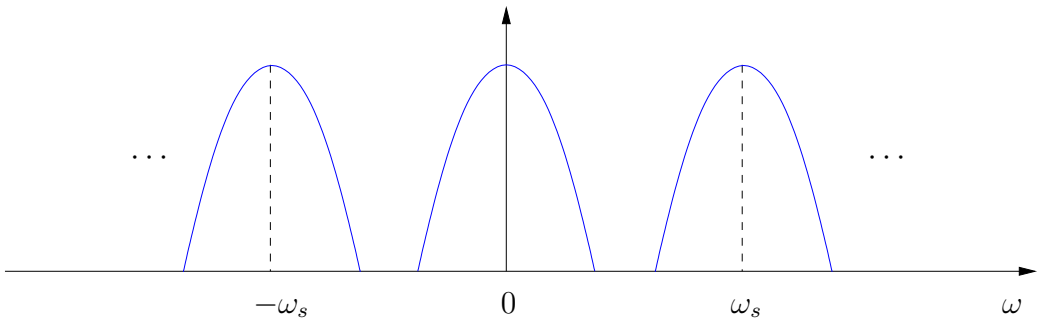



Figura 4: Efeito de *aliasing* devido à amostragem do sinal.

Obviamente, a superposição do espectro original do sinal, com a suas cópias causaria distorção no sinal. Para evitar isso, é necessário que a frequência de amostragem, $\omega_s$ seja pelo menos o dobro da maior frequência presente no sinal. No entanto, na prática, raramente o sinal possui uma frequência máxima conhecida e mesmo que esta frequência seja conhecida, o sinal pode estar corrompido por ruído com componentes em frequências superiores. Assim, para garantir a limitação de banda do sinal, normalmente utiliza-se um filtro passabaixas antes do amostrador, denominado de filtro antialias.

# 3 Diagrama de Blocos

A figura Fig. 5 mostra o diagrama de blocos de um sistema amostrado. O conjunto A/D, *software* e D/A é modelado por um modulador de impulsos que gera

amostras de $e(t)$, um *software* que processa essas amostras e um segurador de ordem zero que reconstroi a saída constante por partes do D/A a partir dos impulsos $m^*(t)$. Assume-se que $e^*(t)$ é manipulado no computador por uma equação diferenças descrita por $C^*(s)$ para gerar $m^*(t)$.

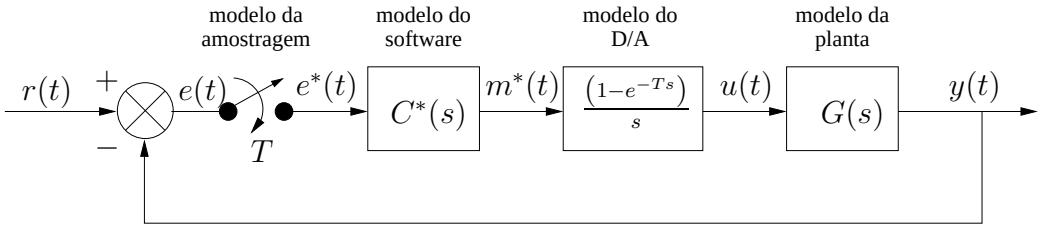



Figura 5: Diagrama de blocos de um sistema amostrado.