

Universidade Federal do Rio Grande do Sul  
Escola de Engenharia  
Departamento de Engenharia Elétrica  
ENG04037 Sistemas de Controle Digitais

## **Especificações de Desempenho de Sistemas de Controle Discreto**

Prof. Walter Fetter Lages

15 de setembro de 2011

### **1 Introdução**

Pode-se especificar o desempenho de sistemas de controle segundo diversos aspectos:

1. Precisão de rastreamento em regime
2. Precisão no transitório (resposta dinâmica)
  - (a) Estabilidade
  - (b) Tempo de subida
  - (c) *Overshoot*
  - (d) Tempo de acomodação
  - (e) Tempo de pico
  - (f) Tempo de atraso
3. Rejeição a perturbação
  - (a) Em regime
  - (b) Transiente
4. Esforço de controle
  - (a) Máxima magnitude
  - (b) Máxima energia
5. Sensitividade a parâmetros

## 2 Coeficientes de Erro Estático

Considere o sistema mostrado na Fig. 1.

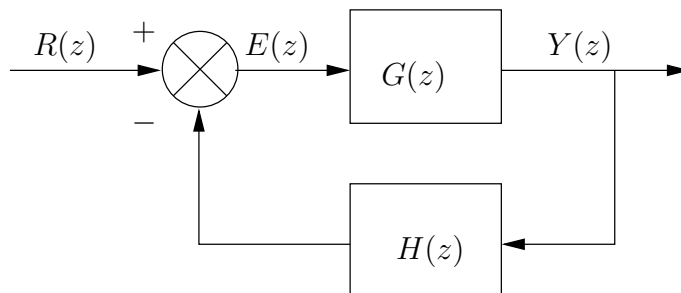


Figura 1: Sistema em malha fechada.

$$E(z) = \frac{R(z)}{1 + G(z)H(z)}$$

$$\begin{aligned} e_{ss} &\triangleq \lim_{k \rightarrow \infty} e(k) \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)E(z) \\ e_{ss} &= \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) \frac{R(z)}{1 + G(z)H(z)} \end{aligned}$$

### 2.1 Coeficiente de Erro Estático de Posição

O coeficiente de erro estático de posição é calculado considerando-se que referência é um degrau unitário, ou seja

$$R(z) = \frac{z}{z - 1}$$

Assim,

$$\begin{aligned} e_{ssp} &= \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) \frac{z}{z - 1} \frac{1}{1 + G(z)H(z)} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{1 + G(z)H(z)} \\ K_p &\triangleq \lim_{z \rightarrow 1} G(z)H(z) = G(1)H(1) \\ e_{ssp} &= \frac{1}{1 + K_p} \end{aligned}$$

Para sistema do tipo 0<sup>1</sup>:

$$K_p = \lim_{z \rightarrow 1} K_1 \frac{(z - z_1)(z - z_2) \cdots}{(z - p_1)(z - p_2) \cdots} = K$$

Para sistemas do tipo 1 ou maior:

$$K_p = \lim_{z \rightarrow 1} K_1 \frac{(z - z_1)(z - z_2) \cdots}{(z - 1)^n (z - p_1)(z - p_2) \cdots} = \infty$$

Logo:

$$e_{ssp} = \begin{cases} \frac{1}{1+K} & \text{para sistemas do tipo 0} \\ 0 & \text{para sistemas do tipo 1 ou maior} \end{cases}$$

## 2.2 Coeficiente de Erro Estático de Velocidade<sup>2</sup>

Neste caso, considera-se que a entrada do sistema é um rampa unitária, ou seja:

$$R(z) = \frac{zT}{(z - 1)^2}$$

Assim,

$$\begin{aligned} e_{ssv} &= \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) \frac{zT}{(z - 1)^2} \frac{1}{1 + G(z)H(z)} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{Tz}{(z - 1) ((1 + G(z)H(z)))} \\ K_v &\triangleq \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z - 1) (1 + G(z)H(z))}{zT} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z - 1) (G(z)H(z))}{zT} \\ e_{ssv} &= \frac{1}{K_v} \end{aligned}$$

Aparentemente  $K_v$  é inversamente proporcional a  $T$ . Isso não é verdade porque  $G(z)$  é essencialmente proporcional a  $T$  também. Consequentemente  $K_v$  para  $G(s)$  e  $K_v$  para  $G(z)$  tem, basicamente, o mesmo valor de se  $G(z)$  for obtido utilizando-se um segurador de ordem zero antes de  $G(s)$ .

Para sistema do tipo 0:

$$K_v = \lim_{z \rightarrow 1} K_1 \frac{(z - 1)(z - z_1)(z - z_2) \cdots}{Tz(z - p_1)(z - p_2) \cdots} = 0$$

Para sistemas do tipo 1:

<sup>1</sup>Em sistemas discretos, o tipo é o número de pólos em 1.

<sup>2</sup>Velocidade, nesse contexto significa variação linear com o tempo.

$$K_v = \lim_{z \rightarrow 1} K_1 \frac{(z-1)(z-z_1)(z-z_2) \cdots}{Tz(z-1)(z-p_1)(z-p_2) \cdots} = K$$

Para sistemas do tipo 2 ou maior:

$$K_v = \lim_{z \rightarrow 1} K_1 \frac{(z-1)(z-z_1)(z-z_2) \cdots}{Tz(z-1)^n(z-p_1)(z-p_2) \cdots} = \infty$$

Logo:

$$e_{ssv} = \begin{cases} \infty & \text{para sistemas do tipo 0} \\ \frac{1}{k_v} & \text{para sistemas do tipo 1} \\ 0 & \text{para sistemas do tipo 2 ou maior} \end{cases}$$

Em sistemas do tipo 1 existe uma relação fixa entre os pólos e zeros de malha fechada e  $K_v$ .

Suponha  $\frac{Y(z)}{R(z)} = H(z)$ , com  $p_i$  pólos e  $z_i$  zeros:

$$H(z) = K \frac{(z-z_1)(z-z_2) \cdots (z-z_n)}{(z-p_1)(z-p_2) \cdots (z-p_n)}$$

Se  $H(z)$  for do tipo 1, o erro de posição é zero, portanto

$$y(\infty) = 1 = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)H(z) \underbrace{\frac{z}{z-1}}_{\text{degrau}} = H(1)$$

Adicionalmente, o erro estático de velocidade é dado por

$$\begin{aligned} E(z) &= R(z)(1-H(z)) \Leftrightarrow e(k) = k - y(k) \\ E(z) &= \frac{Tz}{(z-1)^2} (1-H(z)) \\ e_{ssv} &= e(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{Tz}{(z-1)^2} (1-H(z)) = \frac{1}{K_v} \end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{1}{TK_v} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1-H(z)}{z-1}$$

que, como  $H(z) = 1$ , é indeterminado. Portanto, pode-se aplicar a regra de L'hôpital:

$$\frac{1}{TK_v} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{\frac{d}{dz}(1-H(z))}{\frac{d}{dz}(z-1)} = \lim_{z \rightarrow 1} -\frac{d}{dz}H(z)$$

$$\int \frac{du}{u} = \ln u$$

Logo

$$\frac{1}{H(z)} \frac{d}{dz} H(z) = \frac{d}{dz} \ln H(z)$$

Para  $z = 1 \Rightarrow H(z) = 1$ :

$$\frac{d}{dz} H(z) = \frac{d}{dz} \ln H(z)$$

Assim

$$\begin{aligned} \frac{1}{TK_v} &= \lim_{z \rightarrow 1} -\frac{d}{dz} \ln H(z) \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} -\frac{d}{dz} \left\{ \ln K \frac{\Pi(z - z_i)}{\Pi(z - p_i)} \right\} \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} -\frac{d}{dz} \left\{ \sum \ln(z - z_i) - \sum \ln(z - p_i) + \ln K \right\} \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} -\left\{ \sum \frac{d}{dz} \ln(z - z_i) - \sum \frac{d}{dz} \ln(z - p_i) \right\} \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \left\{ \sum \frac{1}{z - z_i} - \sum \frac{1}{z - p_i} \right\} \\ &= \sum \frac{1}{1 - z_i} - \sum \frac{1}{1 - p_i} \end{aligned}$$

Quanto mais longe os pólos de malha fechada de  $z = 1$ , maior  $K_v$  e menores os erros. Da mesma forma,  $K_v$  é maior e os erros menores, quanto mais próximos os zeros estão de  $z = 1$ . No entanto, zeros em  $z = 1$  implicam grande *overshoot* e resposta dinâmica ruim.

### 3 Resposta Dinâmica

Normalmente, as características desejadas da resposta dinâmica são especificadas no domínio do tempo e associada a localização dos polos em  $s$ , que são mapeados para o plano  $z$  através de  $z = e^{sT}$ . Os principais parâmetros utilizados para especificar a resposta dinâmica são mostrados na Fig. 2.

onde:

$t_s$ : *settling time* (tempo de acomodação)

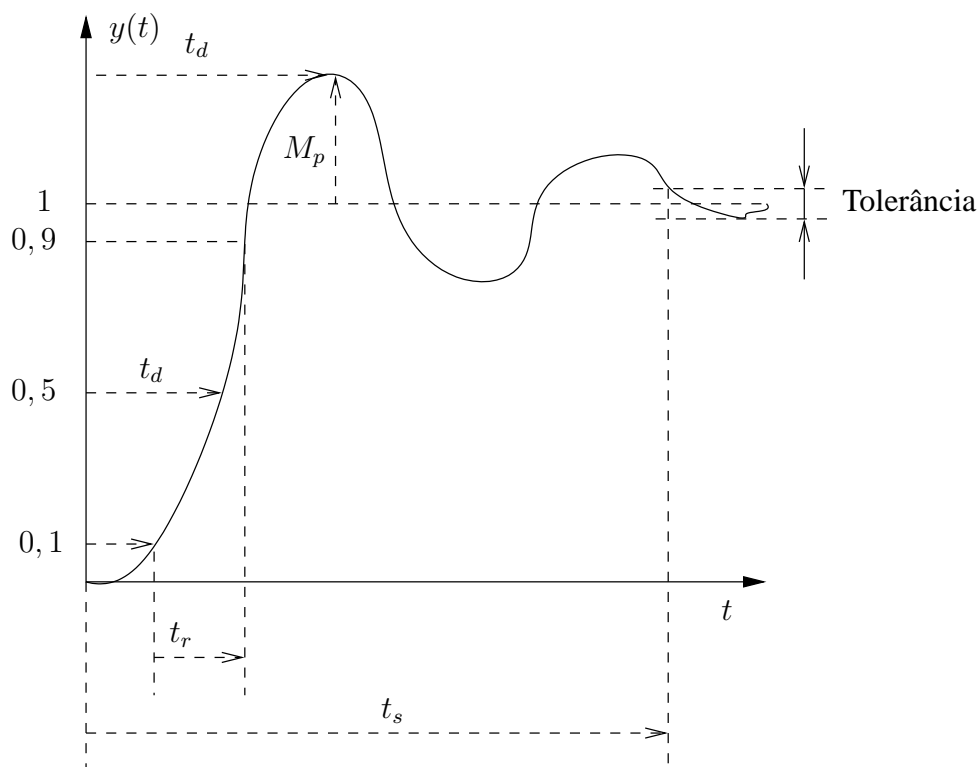


Figura 2: Especificações da resposta temporal.

$t_p$ : *peak time* (tempo de pico)

$M_p$ : *overshoot* (sobresinal máximo)

$t_r$ : *rise time* (tempo de subida)

$t_d$ : *delay time* (tempo de atraso)

Note que o *overshoot* é normalmente dado em percentual:

$$M_p = \frac{y(t_p) - y(\infty)}{y(\infty)}$$

Usualmente, considera-se que o sistema possui uma resposta de 2ª ordem (Fig. 3) através da consideração dos polos dominantes do sistema, como mostra a Fig. 4.

sendo

$\omega_n$ : frequência natural não amortecida

$\xi$ : coeficiente de amortecimento

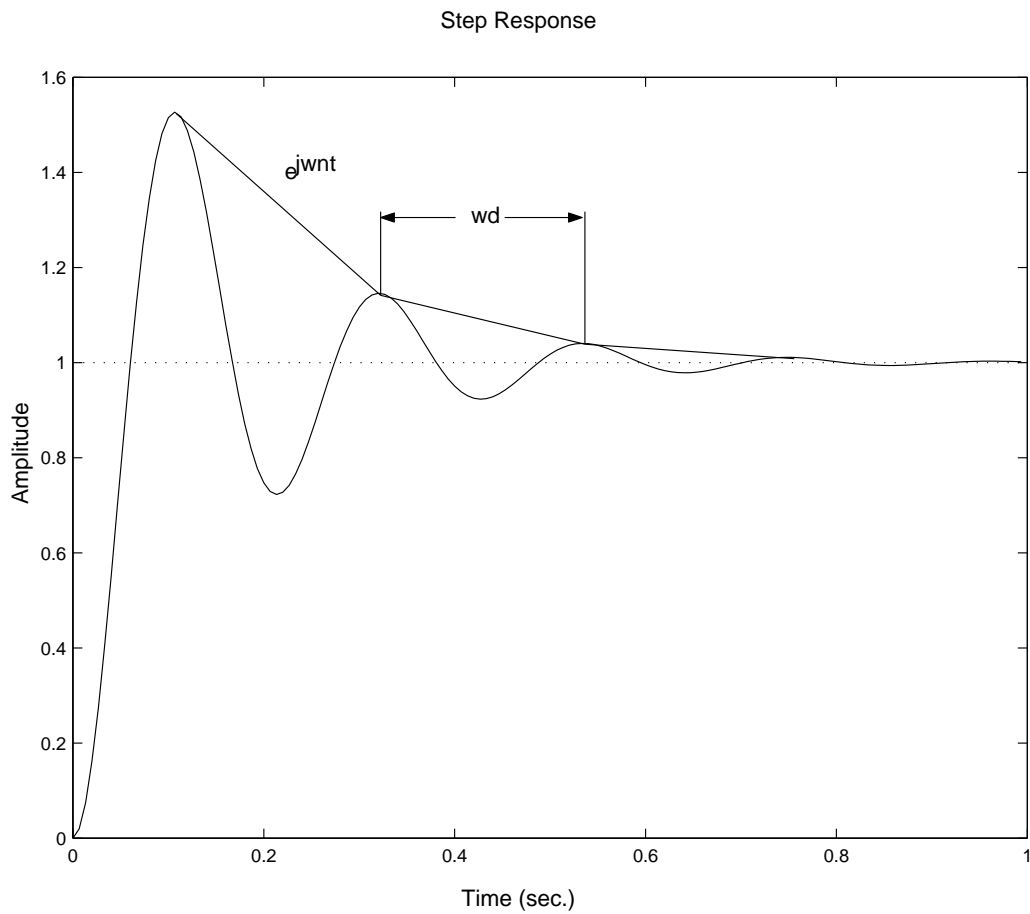


Figura 3: Resposta típica de um sistema de segunda ordem.

$\omega_d$ : frequência natural amortecida

$$\begin{aligned}\sigma &= \xi\omega_n \\ \omega_d &= \omega_n\sqrt{1 - \xi^2}\end{aligned}$$

### 3.1 Tempo de Subida

A resposta mostrada na Fig. 3 pode ser associada ao seguinte sistema:

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

cuja resposta ao degrau é:

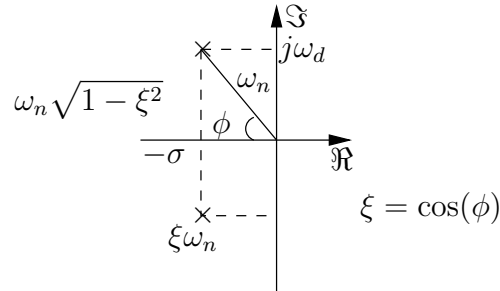


Figura 4: Posição dos pólos no plano complexo.

$$\begin{aligned}
 y(t) &= 1 - e^{-\xi\omega_n t} \left( \cos(\omega_d t) + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \text{sen}(\omega_d t) \right) \\
 &= 1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \text{sen} \left( \omega_d t + \text{atan} \left( \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} \right) \right)
 \end{aligned}$$

A resposta ao degrau e regime é

$$y(tr) = 1 - e^{-\xi\omega_n tr} \left( \cos(\omega_d tr) + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \text{sen}(\omega_d tr) \right)$$

Considerando  $y(tr) = 1$ , ou seja, definindo  $tr$  como tempo para a saída subir de 0 até 1 e notando] que  $e^{-\xi\omega_n tr} \neq 0$ , tem-se

$$\cos(\omega_d tr) + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \text{sen}(\omega_d tr) = 0$$

de onde

$$\tan(\omega_d tr) = \frac{-\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} = -\frac{\omega_d}{\xi\omega_n} = -\frac{\omega_d}{\sigma}$$

$$tr = \frac{1}{\omega_d} \text{atan} \left( \frac{\omega_d}{-\sigma} \right) = \frac{\pi - \phi}{\omega_d}$$

$$\xi = \cos \left( \frac{tr\omega_d}{\pi} \right)$$

Para  $\xi = 0.5$ , ou seja uma curva média, tem-se  $tr = \frac{1.8}{\omega_n}$ .

### 3.2 Tempo de Pico

O pico da resposta ao degrau é dado por

$$\left. \frac{d}{dt}y(t) \right|_{t=t_p} = 0 = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t_p} \text{sen}(\omega_d t_p)$$

e portanto  $\text{sen}(\omega_d t_p) = 0 \Rightarrow \omega_d t_p = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$ , de forma que o primeiro pico ocorre quando  $\omega_d t_p = \pi$ . Portanto

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$$

### 3.3 Overshoot

$$\begin{aligned} M_p &= y(t_p) - 1 = -e^{-\xi\omega_n \frac{\pi}{\omega_d}} \left( \cos \pi + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \text{sen} \pi \right) \\ &= e^{-\frac{\xi}{\omega_d} \pi} \\ M_p &= e^{-\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \pi} \end{aligned}$$

Resolvendo para  $\xi$ :

$$\xi = -\frac{\frac{\ln M_p}{\pi}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\ln M_p}{\pi}\right)^2}}$$

que pode ser aproximado pela reta dada por

$$\xi \approx 0,6(1 - M_p) \Rightarrow M_p \approx 1 - \frac{\xi}{0,6}$$

### 3.4 Tempo de Acomodação

$$e^{-\xi\omega_n t_s} = \text{amortecimento} = \text{tolerância}$$

Para tolerância de 1%:

$$e^{-\xi\omega_n t_s} = 0,01 \Rightarrow \xi\omega_n t_s = -\ln 0,01 = 4,6$$

ou seja

$$t_s = \frac{4,6}{\xi\omega_n} = \frac{4,6}{\sigma}$$

ou

$$\sigma > \frac{4,6}{t_s}$$

### 3.5 Mapeamento para o plano $z$

Essas especificações são convertidas para o plano  $z$  através da transformação  $z = e^{sT}$ , ou seja, para

$$s = -\sigma + j\omega_d = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

tem-se

$$z = e^{sT}$$

$$z = e^{-\xi\omega_n T} e^{\pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}T}$$

A Fig. 5 mostra curvas típicas para os lugares geométricos de  $\xi$  constante,  $\omega_n$  constante e  $t_s$  constante no plano  $z$ .

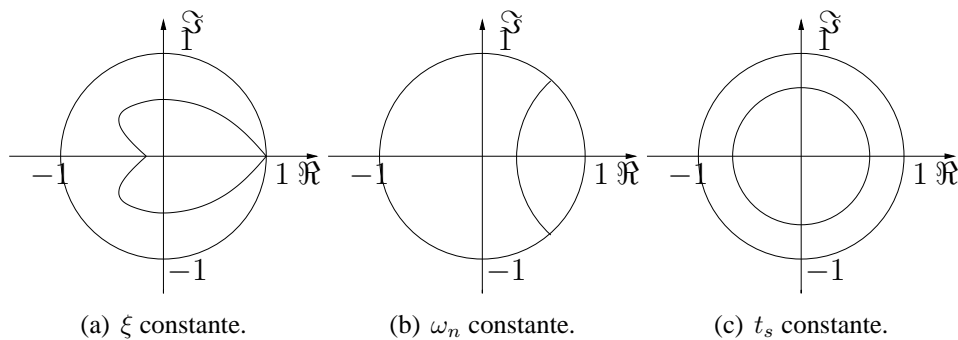


Figura 5: Curvas típicas para lugares geométricos no plano  $z$ .

## 4 Outras Características Desejáveis

### 4.1 Esforço de Controle

Um aspecto a considerar no projeto de um sistema de controle é o esforço de controle necessário, pois, em geral, sistemas físicos possuem limitações na amplitude ou energia disponível para o sinal de controle. Esta limitação implica que não se pode atingir especificações muito exigentes com relação à resposta dinâmica do sistema.

Caso o sinal de controle esteja sujeito a restrições severas, costuma-se utilizar estratégias de controle ótimo que considerem o controle explicitamente no índice de desempenho do sistema, ou seja estratégias de controle que minimizem um índice contendo termos do tipo  $\int u^2 dt$  ou  $\int |u| dt$ .

## 4.2 Rejeição a Perturbações

Considere o sistema mostrado na Fig. 6.

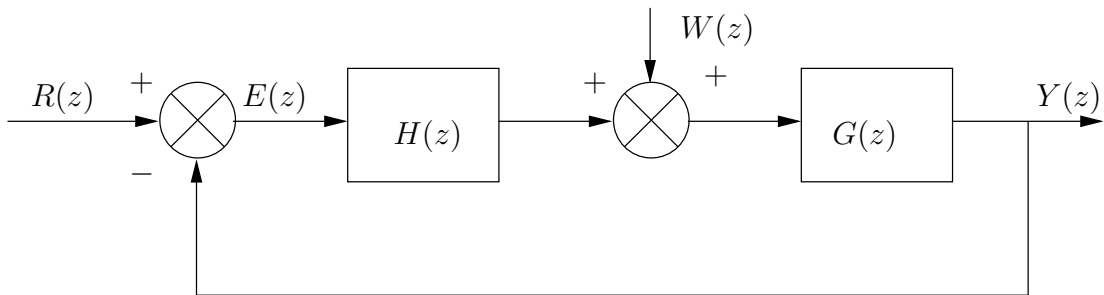


Figura 6: Sistema sujeito à perturbação.

$$Y(z) = \frac{W(z)G(z)}{1 + G(z)H(z)} + \frac{R(z)G(z)H(z)}{1 + G(z)H(z)}$$

Se  $G(z)H(z) \gg 1$

$$Y(z) \approx \frac{W(z)G(z)}{G(z)H(z)} + R(z) = \frac{W(z)}{H(z)} + R(z)$$

Portanto  $W(z)$  será rejeitado se  $H(z) \gg 1$ , de modo que

$$Y(z) \approx R(z)$$

Ou ainda se  $|G(z)| \ll 1$  e  $|G(z)H(z)| \leq 1$ :

$$Y(z) \approx \frac{W(z)G(z) + R(z)G(z)H(z)}{1 + G(z)H(z)}$$

$$Y(z) \approx \frac{R(z)G(z)H(z)}{1 + G(z)H(z)}$$

### **4.3 Robustez**

Deseja-se que comportamento do sistema seja relativamente invariante a variações nos parâmetros da planta e do controlador, pois na prática, os componentes utilizados para implementar o sistema nunca terão exatamente os mesmos valores utilizados no projeto.