Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Escola de Engenharia
Departamento de Engenharia Elétrica
ENG04037 Sistemas de Controle Digitais

Estabilidade de Sistemas Discretos

Prof. Walter Fetter Lages

18 de março de 2009

1 Introdução.

Existem diversas definições de estabilidade.

Estabilidade interna: todas as variáveis internas do sistema são estáveis.

Estabilidade externa: a saída do sistema é estável, sem a necessidade de todas as variáveis internas do sistema serem estáveis.

Ponto de equilíbrio: é o ponto para o qual a variável converge quando o tempo tende a infinito. Pode ser:

Estável: quando a variável retorna sempre ao ponto de equilíbrio se for perturbada. Normalmente é associado a vales da função, como mostrado na Fig. 1.

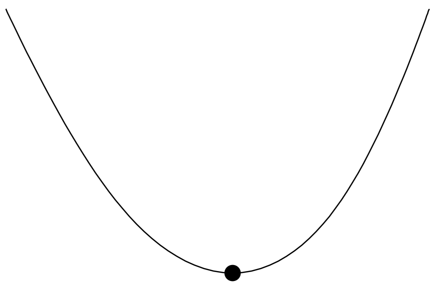

Figura 1: Ponto de equilíbrio estável.
.

Instável: quando a variável não retorna ao ponto de equilíbrio se perturbada. Normalmente é associado a picos ou pontos de sela da função, como mostrado na Fig. 1.

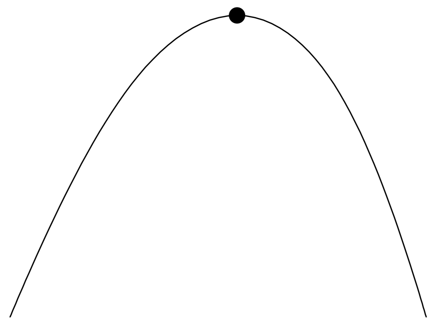

Figura 2: Ponto de equilíbrio instável.

.

Domínio de atração do ponto de equilíbrio: é a região a partir da qual a variável converge para o ponto de equilíbrio.

Estabilidade assintótica: a variável converge assintoticamente para o ponto de equilíbrio.

Estabilidade global: trajetórias partindo de qualquer ponto convergem para o ponto de equilíbrio.

Estabilidade uniforme: o ponto de equilíbrio não depende do instante de tempo inicial.

Estabilidade exponencial: a variável converge para o ponto de equilíbrio com uma taxa mais rápida do que alguma função exponencial, ou seja

$$x \to x_e | \exists K_1, K_2, t_0, |x(t, t_0) \leq K_1 e^{-K_2(t-t_0)} \forall t \geq t_0$$

Estabilidade no sentido de Lyapunov: a variável converge para uma região em torno do ponto de equilíbrio e não sai mais dela, ou seja $|x(t) - x_e| \leq \delta, \forall t \geq t_e$, como mostra a Fig. 3

Estabilidade BIBO (*Bounded-Input-Bounded-Output*): Entradas limitadas produzem saídas limitadas.

Em um sistema linear, se uma variável é estável, ela é globalmente, uniformemente, assintoticamente, exponencialmente estável. Se esta variável for a variável de saída, o sistema também é BIBO estável.

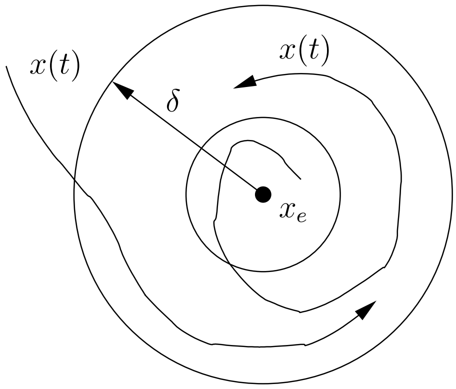

Figura 3: Estabilidade no sentido de Lyapunov.

Teorema 1 *Um sistema discreto, linear e invariante no tempo é BIBO estável se e somente se a sua sequência de ponderação satisfizer:*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| < \infty$$

Prova 1 **Suficiência:** *Como supõe-se entrada limitada, tem-se*

$$|u(k)| \leq M < \infty, \forall k$$

$$|y(k)| \leq \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(k)h(k-j) \right| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(k-j)h(k) \right| \leq M \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)|$$

logo, se $h(k)$ for absolutamente somável, qualquer entrada limitada resultará em saída limitada.

Necessidade: *Seja*

$$u(k-j) = \text{ sgn } (h(j)) = \begin{cases} 0 & \textit{se } h(j) = 0 \\ 1 & \textit{se } h(j) > 0 \\ -1 & \textit{se } h(j) < 0 \end{cases}$$

que obviamente é limitada. Então,

$$y(k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(k-j)h(k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)|$$

portanto

$$\lim_{k\to\infty} y(k) = \lim_{k\to\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)|$$

somente será finito se $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| < \infty$.

Corolário 1 *Um sistema com função de transferência racional* $H(z)$ *é estável se e somente se todos os pólos estão dentro do círculo unitário.*

2 Critério de Jury

O critério de Jury é a versão discreta do critério de Routh-Hurwitz. Permite que se determine se todas as raízes de um polinômio estão dentro do círculo unitário sem que se precise calcular explicitamente as raízes.

Com computadores não é difícil calcular as raízes explicitamente, mas as vezes deseja-se determinar a estabilidade de toda uma classe de sistemas ou os pólos podem estar variando e se deseja testar a estabilidade em função de coeficientes literais, como é comum em problemas de projeto.

Seja $H(z) = \frac{b(z)}{a(z)} = \frac{b(z)}{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n}$, com $a_0 > 0$. A tabela de Jury é formada por:

$$\begin{array}{cccc}
a_0 & a_1 & \cdots & a_n \\
a_n & a_{n-1} & \cdots & a_0 \\
b_0 & b_1 & \cdots & \\
b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & \\
c_0 & c_1 \cdots & & \\
\vdots & \vdots & &
\end{array}$$

com

$$
\begin{aligned}
b_0 &= a_0 - \frac{a_n}{a_0} a_n \\
b_1 &= a_1 - \frac{a_n}{a_0} a_{n-1} \\
&\vdots \\
b_k &= a_k - \frac{a_n}{a_0} a_{n-k} \\
&\vdots \\
c_k &= b_k - \frac{b_{n-1}}{b_0} b_{n-1-k} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Teorema 2 (Critério de Estabilidade de Jury) *Se $a_0 > 0$, então todas as raízes estarão dentro do círculo unitário se e somente se todos os termos da primeira coluna das linhas ímpares forem positivos. Se nenhum elemento da primeira coluna das linhas ímpares for nulo, o número de raízes fora do círculo unitário é igual ao número de elementos negativos.*

Exemplo 1 *Seja o polinômio*

$$a(z) = z^2 + a_1 z + a_2$$

$$
\begin{array}{ccc}
1 & a_1 & a_2 \\
a_2 & a_1 & 1 \\
1 - \frac{a_2}{1} a_2 & a_1 - \frac{a_2}{1} a_1 & \\
a_1 - a_2 a_1 & 1 - a_2^2 &
\end{array}
$$

ou

$$
\begin{array}{ccc}
1 & a_1 & a_2 \\
a_2 & a_1 & 1 \\
1 - a_2^2 & a_1(1 - a_2) & \\
a_1(1 - a_2) & 1 - a_2^2 & \\
1 - a_2^2 - \frac{a_1(1-a_2)}{1-a_2^2} a_1(1 - a_2) & &
\end{array}
$$

ou ainda

$$\begin{array}{ccc} 1 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_1 & 1 \\ 1-a_2^2 & a_1(1-a_2) & \\ a_1(1-a_2) & 1-a_2^2 & \\ 1-a_2^2-\frac{a_1^2(1-a_2)^2}{1-a_2^2} & & \end{array}$$

As raízes do polinômio estarão todas dentro do círculo unitário se e somente se:

$$\begin{aligned} 1 &> 0 \\ 1-a_2^2 &> 0 \Rightarrow -1 < a_2 < 1 \\ 1-a_2^2-\frac{a_1^2(1-a_2)^2}{1-a_2^2} &> 0 \Rightarrow \frac{\left(1-a_2^2\right)^2-a_1^2(1-a_2)^2}{1-a_2^2} > 0 \end{aligned}$$

Fatorando $(1-a_2)^2$

$$\begin{aligned} \frac{(1+a_2)^2(1-a_2)^2-a_1^2(1-a_2)^2}{1-a_2^2} &> 0 \\ (1+a_2)^2-a_1^2 &> 0 \\ (1+a_2)^2 &> a_1^2 \end{aligned}$$

Consequentemente $a_2+1 > a_1$ *ou* $a_2+1 > -a_1$. *A região de estabilidade para os parâmetros* a_1 *e* a_2 *é mostrada na Fig. 1*

3 Extensão do Critério de Routh-Hurwitz

Seja a transformação $z = \frac{s+1}{s-1}$. Tem-se

$$z = \frac{\sigma + j\omega + 1}{\sigma + j\omega - 1}$$

$$|z|^2 = \frac{(\sigma+1)^2+\omega^2}{(\sigma-1)^2+\omega^2}$$

$$\begin{aligned} \sigma &< 0 \Rightarrow |z|^2 < 1 \\ \sigma &= 0 \Rightarrow |z|^2 = 1 \\ \sigma &> 0 \Rightarrow |z|^2 > 1 \end{aligned}$$

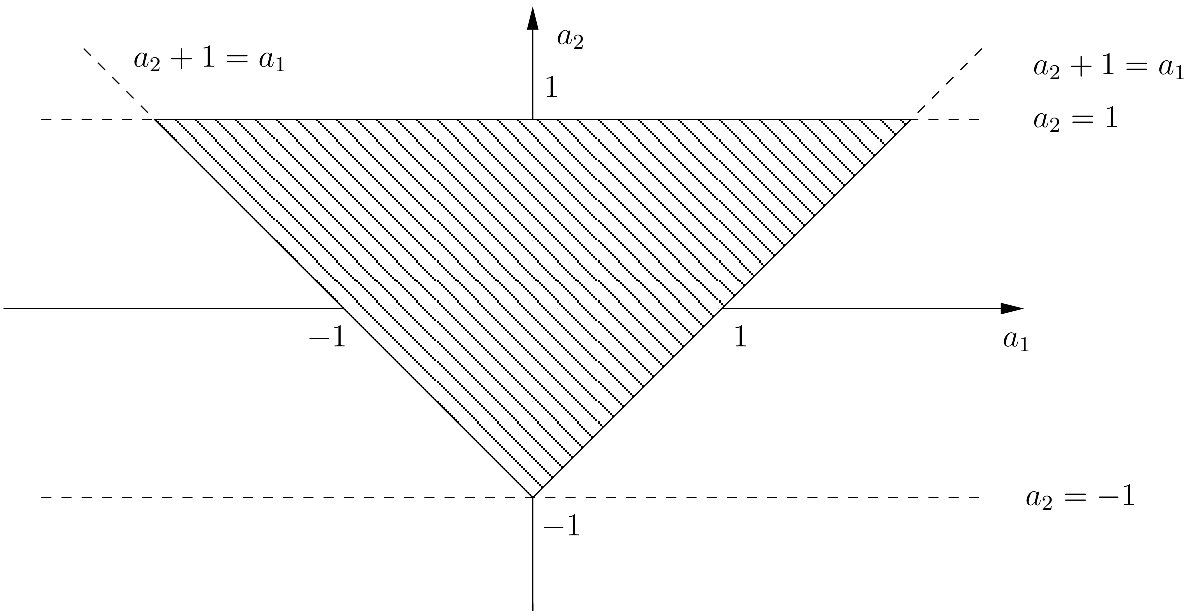

Figura 4: Região de estabilidade em função dos parâmetros a_1 e a_2.

Portanto a transformação mapeia o eixo $j\omega$ no círculo unitário e o semi-plano esquerdo no interior do círculo unitário. Pode-se então aplicar o critério de Routh-Hurwitz para determinar a estabilidade do sistema transformado.