

Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Escola de Engenharia
Departamento de Engenharia Elétrica
ENG04479 Robótica A

Formulação de Newton-Euler

Prof. Walter Fetter Lages

27 de agosto de 2007

1 Introdução

O formalismo de Newton-Euler é baseado nas equações de Newton (1) e de Euler (2):

$$F = m\dot{v}_c \quad (1)$$

$$N = {}^c I \dot{\omega} + \omega \times {}^c I \omega \quad (2)$$

1.1 Dedução da Equação de Euler

$$\frac{d}{dt} ({}^{c_0} I \omega_i) = {}^0 N_i$$

onde

${}^{c_0} I$: tensor de inércia em relação ao sistema $\{0\}$

ω_i : velocidade angular do sistema $\{i\}$ descrita no sistema $\{0\}$

${}^0 N_i$: torque total no centro de massa do elo $\{i\}$ expresso no sistema $\{0\}$

Mas

$${}^{c_0} I = {}^0 R_i {}^{c_i} I {}^0 R_i^T$$

$$\omega_i = {}^0 \omega_i = {}^0 R_i {}^i \omega_i$$

$${}^0N_i = {}^0R_i{}^iN_i$$

Portanto

$$\frac{d}{dt} \left({}^0R_i{}^{C_i}I{}^0R_i{}^{T0}R_i{}^i\omega_i \right) = {}^0R_i{}^iN_i$$

e como ${}^{C_i}I$ é constante:

$${}^0R_i \left({}^{C_i}I{}^i\dot{\omega}_i \right) + {}^0\omega_i \times {}^0R_i \left({}^{C_i}I{}^i\omega_i \right) = {}^0R_i{}^iN_i$$

$${}^{C_i}I{}^i\dot{\omega}_i + {}^0\omega_i \times {}^{C_i}I{}^i\omega_i = {}^iN_i$$

2 Aceleração Linear

Tem-se que

$${}^AV_Q = {}^AR_B{}^BV_Q + {}^A\Omega_B \times {}^AR_B{}^BQ$$

Portanto a aceleração será,

$${}^A\dot{V}_Q = \frac{d}{dt} \left({}^AR_B{}^BV_Q \right) + {}^A\dot{\Omega}_B \times {}^AR_B{}^BQ + {}^A\Omega_B \times \frac{d}{dt} \left({}^AR_B{}^BQ \right) \quad (3)$$

Por outro lado,

$${}^AV_Q = \frac{d{}^AQ}{dt} = {}^AR_B{}^BV_Q + {}^A\Omega_B \times {}^AR_B{}^BQ$$

ou

$$\frac{d}{dt} \left({}^AR_B{}^BQ \right) = {}^AR_B{}^BV_Q + {}^A\Omega_B \times {}^AR_B{}^BQ \quad (4)$$

similarmente, pode-se obter

$$\frac{d}{dt} \left({}^AR_B{}^BV_Q \right) = {}^AR_B{}^B\dot{V}_Q + {}^A\Omega_B \times {}^AR_B{}^BV_Q \quad (5)$$

Substituindo-se (5) e (4) em (3),

$${}^A\dot{V}_Q = {}^AR_B{}^B\dot{V}_Q + {}^A\Omega_B \times {}^AR_B{}^BV_Q + {}^A\dot{\Omega}_B \times {}^AR_B{}^BQ + {}^A\Omega_B \times \left({}^AR_B{}^BV_Q + {}^A\Omega_B \times {}^AR_B{}^BQ \right)$$

ou

$${}^A\dot{V}_Q = {}^A R_B {}^B\dot{V}_Q + 2{}^A\Omega_B \times {}^A R_B {}^B V_Q + {}^A\dot{\Omega}_B \times {}^A R_B {}^B Q + {}^A\Omega_B \times ({}^A\Omega_B \times {}^A R_B {}^B Q) \quad (6)$$

A expressão (6) é válida quando a origem do sistema {A} coincide com a origem do sistema {B}. Para o caso genérico, quando o sistema {B} está se movendo em relação ao sistema {A}, é necessário adicionar um termo que considere a aceleração da origem de {B}, ou seja:

$${}^A\dot{V}_Q = {}^A\dot{V}_{Borg} + {}^A R_B {}^B\dot{V}_Q + 2{}^A\Omega_B \times {}^A R_B {}^B V_Q + {}^A\dot{\Omega}_B \times {}^A R_B {}^B Q + {}^A\Omega_B \times ({}^A\Omega_B \times {}^A R_B {}^B Q) \quad (7)$$

Um caso particular de interesse ocorre quando ${}^B Q$ é uma constante em relação a {B}, ou seja:

$${}^B V_Q = {}^B\dot{V}_Q = 0$$

Neste caso, tem-se

$${}^A\dot{V}_Q = {}^A\dot{V}_{Borg} + {}^A\dot{\Omega}_B \times {}^A R_B {}^B Q + {}^A\Omega_B \times ({}^A\Omega_B \times {}^A R_B {}^B Q) \quad (8)$$

A expressão (8) é usada para calcular a aceleração linear de elos de robôs com juntas rotacionais.

3 Aceleração Angular

Seja o sistema {B} rodando em relação ao sistema {A} com ${}^A\Omega_B$ e o sistema {C} rodando em relação ao sistema {B} com ${}^B\Omega_C$. Logo,

$${}^A\Omega_C = {}^A\Omega_B + {}^A R_B {}^B\Omega_C \quad (9)$$

Diferenciando:

$${}^A\dot{\Omega}_C = {}^A\dot{\Omega}_B + \frac{d}{dt} ({}^A R_B {}^B\Omega_C)$$

Como

$$\frac{d}{dt} ({}^A R_B {}^B\Omega_C) = {}^A R_B {}^B\dot{\Omega}_C + {}^A\Omega_B \times {}^A R_B {}^B\Omega_C$$

tem-se

$${}^A\dot{\Omega}_C = {}^A\dot{\Omega}_B + {}^A R_B {}^B\dot{\Omega}_C + {}^A\Omega_B \times {}^A R_B {}^B\Omega_C \quad (10)$$

A expressão (10) é usada para calcular a aceleração angular de elos de robôs.

4 Formalismo de Newton-Euler

O formalismo de Newton-Euler é um procedimento iterativo para calcular os torques nas juntas do robô. O procedimento é baseado em iterações diretas e iterações reversas. As iterações diretas calculam as acelerações e velocidades dos elos do robô a partir da base em direção à garra. As iterações reversas calculam os torques da garra para a base do robô.

4.1 Iterações Diretas

4.1.1 Velocidades e Acelerações Angulares dos Elos com Juntas Rotacionais

Fazendo-se $A = i - 1$, $B = i - 1$ e $C = i$ em (9) e (10) e considerando-se que a velocidade angular do elo i em relação ao elo $i - 1$ é dada por $\dot{\theta}_i^{i-i} \hat{Z}_{i-i}$, tem-se

$${}^{i-1}\omega_i = {}^{i-1}\omega_{i-1} + {}^{i-1}R_{i-1}\dot{\theta}_i^{i-i}\hat{Z}_{i-i}$$

e

$${}^{i-1}\dot{\omega}_i = {}^{i-1}\dot{\omega}_{i-1} + {}^{i-1}R_{i-1}\ddot{\theta}_i^{i-i}\hat{Z}_{i-i} + {}^{i-1}\omega_{i-1} \times {}^{i-1}R_{i-1}\dot{\theta}_i^{i-i}\hat{Z}_{i-i}$$

ou

$${}^{i-1}\omega_i = {}^{i-1}\omega_{i-1} + \dot{\theta}_i^{i-i}\hat{Z}_{i-i}$$

e

$${}^{i-1}\dot{\omega}_i = {}^{i-1}\dot{\omega}_{i-1} + \ddot{\theta}_i^{i-i}\hat{Z}_{i-i} + {}^{i-1}\omega_{i-1} \times \dot{\theta}_i^{i-i}\hat{Z}_{i-i}$$

Para obter-se uma expressão que possa ser utilizada iterativamente, é interessante ter-se ω_i e $\dot{\omega}_i$ representadas no sistema associado ao elo i . Assim,

$${}^i\omega_i = {}^iR_{i-1} \left({}^{i-1}\omega_{i-1} + \dot{\theta}_i^{i-i}\hat{Z}_{i-i} \right) \quad (11)$$

e

$${}^i\dot{\omega}_i = {}^iR_{i-1} \left({}^{i-1}\dot{\omega}_{i-1} + \ddot{\theta}_i^{i-i}\hat{Z}_{i-i} + {}^{i-1}\omega_{i-1} \times \dot{\theta}_i^{i-i}\hat{Z}_{i-i} \right) \quad (12)$$

4.1.2 Acelerações Lineares dos Elos com Juntas Rotacionais

Fazendo-se $A = i - 1$, $B = i - 1$ e $Q = P_{iorg}$ em (8), tem-se

$${}^{i-1}\dot{v}_i = {}^{i-1}\dot{v}_{i-1} + {}^{i-1}\dot{\omega}_i \times {}^iR_{i-1} {}^{i-1}P_{iorg} + {}^{i-1}\omega_i \times \left({}^{i-1}\omega_i \times {}^iR_{i-1} {}^{i-1}P_{iorg} \right)$$

portanto,

$${}^i\dot{v}_i = {}^iR_{i-1} {}^{i-1}\dot{v}_{i-1} + {}^i\dot{\omega}_i \times {}^iR_{i-1} {}^{i-1}P_{iorg} + {}^i\omega_i \times \left({}^i\omega_i \times {}^iR_{i-1} {}^{i-1}P_{iorg} \right) \quad (13)$$

4.1.3 Juntas Prismáticas

As expressões (11), (12) e (13) são válidas para juntas rotacionais. Para juntas prismáticas as expressões tornam-se:

$${}^i\omega_i = {}^iR_{i-1} {}^{i-1}\omega_{i-1} \quad (14)$$

$${}^i\dot{\omega}_i = {}^iR_{i-1} {}^{i-1}\dot{\omega}_{i-1} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} {}^i\dot{v}_i &= {}^iR_{i-1} {}^{i-1}\dot{v}_{i-1} + {}^i\dot{\omega}_i \times {}^iR_{i-1} {}^{i-1}P_{iorg} + {}^i\omega_i \times \left({}^i\omega_i \times {}^iR_{i-1} {}^{i-1}P_{iorg} \right) \\ &+ 2 {}^i\omega_i \times {}^iR_{i-1} \dot{d}_i {}^{i-1}\hat{Z}_{i-1} + {}^iR_{i-1} \ddot{d}_i {}^{i-1}\hat{Z}_{i-1} \end{aligned} \quad (16)$$

4.1.4 Aceleração do Centro de Massa

Para utilização da lei de Newton é necessário ter-se a aceleração no centro de massa do elo, e não na ponta do elo onde usualmente (segundo as convenções de Denavit-Hartenberg) está o sistema de coordenadas associado ao elo, conforme a figura 1. Assim, utilizando-se novamente a expressão (8), tem-se:

$${}^i\dot{v}_{ci} = {}^i\dot{v}_i + {}^i\dot{\omega}_i \times {}^iP_{ci} + {}^i\omega_i \times \left({}^i\omega_i \times {}^iP_{ci} \right) \quad (17)$$

4.2 Iterações Reversas

4.2.1 Torques e Forças nos Elos

Através das equações de Newton (1) e de Euler (2) pode-se calcular os torques e forças de reação gerados pelas acelerações agindo nos elos:

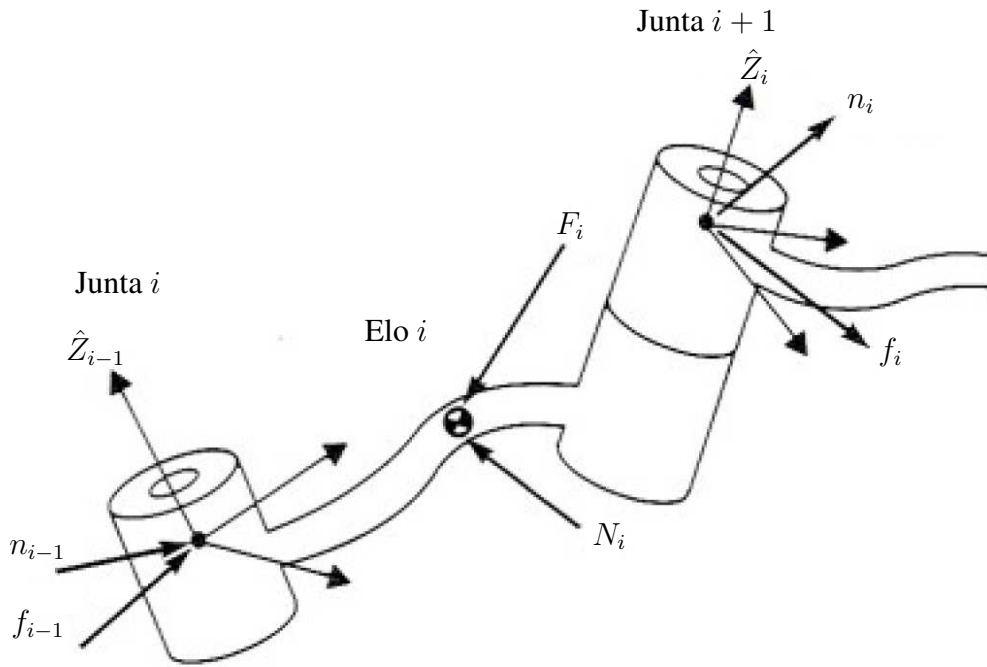


Figura 1: Forças nos elos.

$${}^i F_i = m_i {}^i \dot{v}_{ci} \quad (18)$$

$${}^i N_i = {}^{ci} I_i {}^i \dot{\omega}_i + {}^i \omega_i \times {}^{ci} I_i {}^i \omega_i \quad (19)$$

4.2.2 Balanço de Forças e Momentos

Seja f_i a força exercida pelo elo i no elo $i + 1$ e n_i o torque exercido pelo elo i no elo $i + 1$. Então, o balanço de forças agindo sobre o elo i é:

$${}^i F_i = {}^i R_{i-1} {}^{i-1} f_{i-1} - {}^i f_i$$

$${}^i N_i = {}^i R_{i-1} {}^{i-1} n_{i-1} - {}^i n_i + ({}^i P_{i-1} - {}^i P_{ci}) \times {}^i R_{i-1} {}^{i-1} f_{i-1} + {}^i P_{ci} \times {}^i f_i$$

e portanto as forças e torques na junta i , serão

$${}^{i-1} f_{i-1} = {}^{i-1} R_i ({}^i F_i + {}^i f_i) \quad (20)$$

$${}^{i-1}n_{i-1} = {}^{i-1}R_i \left[{}^iN_i + {}^in_i + \left({}^iP_{ci} - {}^iP_{i-1} \right) \times {}^iR_{i-1} {}^{i-1}f_{i-1} - {}^iP_{ci} \times {}^if_i \right] \quad (21)$$

É importante perceber que ${}^{i-1}f_{i-1}$ e ${}^{i-1}n_{i-1}$ são vetores com três componentes. No entanto, tipicamente a junta tem apenas um atuador que fornece torque ou força na direção do eixo ${}^{i-1}\hat{Z}_{i-1}$. Ou seja, o torque ou a força fornecida pelo atuador da junta i é:

$$\tau_i = {}^{i-1}n_{i-1}^T {}^{i-1}\hat{Z}_{i-1}, \text{ se a junta for rotacional, ou} \quad (22)$$

$$\mathcal{F}_i = {}^{i-1}f_{i-1}^T {}^{i-1}\hat{Z}_{i-1}, \text{ se a junta for prismática.} \quad (23)$$

Os componentes de ${}^{i-1}f_{i-1}$ e ${}^{i-1}n_{i-1}$ nas direções ${}^{i-1}\hat{X}_{i-1}$ e ${}^{i-1}\hat{Y}_{i-1}$ são suportadas pela própria estrutura mecânica do manipulador e não pelo atuador em sí.

4.3 Procedimento Iterativo de Newton-Euler

4.4 Inicialização

$${}^0\dot{v}_0 = {}^0\omega_0 = {}^0\dot{\omega}_0 = 0$$

$${}^{n+1}f_{n+1} = \text{forças externas agindo na garra}$$

$${}^{n+1}n_{n+1} = \text{torques externos agindo na garra}$$

4.4.1 Iterações Diretas

$$i = 1, 2, \dots, n$$

$${}^i\omega_i = \begin{cases} {}^iR_{i-1} \left({}^{i-1}\omega_{i-1} + \dot{\theta}_i {}^{i-i}\hat{Z}_{i-i} \right) & , \text{ se a junta } i \text{ for rotacional} \\ {}^iR_{i-1} {}^{i-1}\omega_{i-1} & , \text{ se a junta } i \text{ for prismática} \end{cases}$$

$${}^i\dot{\omega}_i = \begin{cases} {}^iR_{i-1} \left({}^{i-1}\dot{\omega}_{i-1} + \ddot{\theta}_i {}^{i-i}\hat{Z}_{i-i} + {}^{i-1}\omega_{i-1} \times \dot{\theta}_i {}^{i-i}\hat{Z}_{i-i} \right) & , \text{ se a junta } i \text{ for rotacional} \\ {}^iR_{i-1} {}^{i-1}\dot{\omega}_{i-1} & , \text{ se a junta } i \text{ for prismática} \end{cases}$$

$${}^i\dot{v}_i = \begin{cases} {}^iR_{i-1}{}^{i-1}\dot{v}_{i-1} + {}^i\dot{\omega}_i \times {}^iR_{i-1}{}^{i-1}P_{iorg} + \\ {}^i\omega_i \times ({}^i\omega_i \times {}^iR_{i-1}{}^{i-1}P_{iorg}) & , \text{ se a junta } i \text{ for rotacional} \\ {}^iR_{i-1}{}^{i-1}\dot{v}_{i-1} + {}^i\dot{\omega}_i \times {}^iR_{i-1}{}^{i-1}P_{iorg} + \\ {}^i\omega_i \times ({}^i\omega_i \times {}^iR_{i-1}{}^{i-1}P_{iorg}) \\ + 2{}^i\omega_i \times {}^iR_{i-1}\dot{d}_i{}^{i-1}\hat{Z}_{i-1} + {}^iR_{i-1}\ddot{d}_i{}^{i-1}\hat{Z}_{i-1} & , \text{ se a junta } i \text{ for prismática} \end{cases}$$

$${}^i\dot{v}_{ci} = {}^i\dot{v}_i + {}^i\dot{\omega}_i \times {}^iP_{ci} + {}^i\omega_i \times ({}^i\omega_i \times {}^iP_{ci})$$

4.4.2 Iterações Reversas

$$i = n, n-1, \dots, 1$$

$${}^iF_i = m_i {}^i\dot{v}_{ci}$$

$${}^iN_i = {}^{ci}I_i {}^i\dot{\omega}_i + {}^i\omega_i \times {}^{ci}I_i {}^i\omega_i$$

$${}^{i-1}f_{i-1} = {}^{i-1}R_i ({}^iF_i + {}^if_i)$$

$${}^{i-1}n_{i-1} = {}^{i-1}R_i \left[{}^iN_i + {}^in_i + ({}^iP_{ci} - {}^iP_{i-1}) \times {}^iR_{i-1}{}^{i-1}f_{i-1} - {}^iP_{ci} \times {}^if_i \right]$$

$$\tau_i = \begin{cases} {}^{i-1}n_{i-1}^T {}^{i-1}\hat{Z}_{i-1} & , \text{ se a junta for rotacional, ou} \\ {}^{i-1}f_{i-1}^T {}^{i-1}\hat{Z}_{i-1} & , \text{ se a junta for prismática.} \end{cases}$$